Catalog

mathematischer Modelle

für den höheren mathematischen Unterricht

veröffentlicht

durch die Verlagshandlung

von

Martin Schilling in **Leipzig.**

Mit 106 Abbildungen.

Siebente Auflage.

LEIPZIG.
Verlag von Martin Schilling.
1911.

Vorwort.

Die ersten Anfänge des Verlages, der bis zu dem im Juli 1899 erfolgten Uebergange in unsern Besitz unter der Firma L. Brill in Darmstadt geführt wurde, reichen in das Jahr 1877 zurück. Sie verdanken ihr Entstehen der tätigen Anregung der Herren Professoren Brill und Klein, die zu jener Zeit an der technischen Hochschule in München wirkten und unter deren Leitung Studierende im Anschluss an die Lösung von Aufgaben aus der höheren Mathematik sich in der Herstellung von mathematischen Modellen versuchten. Auf diese Weise ergaben sich die Serien I, II, V, VIII, die Nummern 6 der Serie VI und 4, 6 und 8—14 der Serie X. Diese Modelle wie die durch sie veranschaulichten Probleme gehören inhaltlich den verschiedensten Gebieten mathematischen Denkens an. Dagegen war es möglich, die weiteren Serien, deren Herausgabe der wissenschaftlichen Mitarbeit der Herren Professoren Dyck, Finsterwalder, Kummer, Rodenberg, Rohn, Schoenflies, H. A. Schwarz, Chr. und H. Wiener und anderen zu verdanken ist, einheitlicher zu gestalten.

Wenn wir nun jetzt nach mehr als zehnjährigem Bestehen des Verlages unter der neuen Firma Martin Schilling in Leipzig die siebente erweiterte und gegen die früheren wesentlich übersichtlicher gestaltete Auflage unseres ausführlichen Kataloges herausgeben, so hoffen wir, durch die in dieser letzten Zeit veröffentlichten neuen Serien gezeigt zu haben, wie sehr auch uns die stete gedeihliche Entwickelung des längst allgemein anerkannten eigenartigen Unternehmens am Herzen liegt. Freilich wäre dieser Erfolg nicht möglich gewesen, wenn uns nicht von Seiten der mathematischen Kreise ein aussergewöhnliches Interesse entgegengebracht wäre; wir möchten daher nicht unterlassen, auch an dieser Stelle vor allem der grossen Zahl der verehrten Autoren zu danken, die uns bei unseren auf die Erweiterung des Verlages gerichteten Bestrebungen in selbstloser Weise unterstützt haben. Wir gedenken im besonderen

unseres wissenschaftlichen Beraters, des Herrn Professors Dr. Fr. Schilling in Danzig, der, abgesehen von der Bereicherung unserer Sammlung durch neue Modelle, uns in dankenswerter Weise stets gern mit Rat und Tat zur Seite gestanden hat.

So ist im Laufe der verflossenen 34 Jahre eine reichhaltige Sammlung von wissenschaftlichen Anschauungsmitteln entstanden, die, dem bisherigen Erfolge entsprechend, hoffen lässt, auch fernerhin zur Belebung aller Zweige des höheren mathematischen Unterrichts an den Universitäten, Technischen Hochschulen, Bergakademien und ähnlichen Bildungsanstalten an ihrem Teile wirksam beizutragen.

Der erste Teil des Kataloges führt die Modelle in der Reihenfolge ihrer Veröffentlichung auf und ermöglicht eine schnelle Orientierung über die Zeit der Entstehnng und über die Urheber der einzelnen Serien und Nummern. Er gibt am besten Aufschluss über die bequemste Form des Bezuges der Modelle, über ihre Preise und deren Ermässigung bei Bestellung ganzer Serien.

Der zweite Teil enthält eine systematische Anordnung der Modelle und gewährt somit einen Ueberblick über das in den einzelnen mathematischen und physikalischen Wissenszweigen Gebotene. Er hebt die charakteristischen Merkmale der verwandten Modelle aus den verschiedenen Serien hervor und soll vornehmlich dem Fachmanne die Aufgabe erleichtern, die für seine speciellen Zwecke gewünschten, insbesondere die für die einzelnen Vorlesungen geeigneten Modelle aufzufinden. Dieser Teil eignet sich also vorzugsweise auch zum Studium für solche Mathematiker, die in das Verständnis der einzelnen Modellgruppen eindringen wollen.

Um beide Teile besser aufeinander beziehen zu können, ist in dem sogleich folgenden ausführlichen Inhaltsverzeichnisse bei den Serien und Nummern des ersten Teiles die Seitenzahl angegeben, wo die Modelle im zweiten Teil zu finden sind.

Durch diesen neuen Katalog werden die älteren Ausgaben ungültig.

Unser Ziel wird es sein, mit stetem Eifer auch fernerhin an der Weiterentwickelung unseres wissenschaftlichen Unternehmens zu arbeiten. Nach wie vor werden wir der Herausgabe von Modellen der reinen Mathematik, insbesondere der Theorie der Raumcurven und Flächen und der Functionentheorie, beides im weitesten Sinne genommen, unsere vornehmlichste Sorge zuwenden; sodann aber möchten wir auch der angewandten Mathematik, insbesondere der Technik, unsere Aufmerksamkeit widmen. Wir denken hier an die Disciplinen der darstellenden Geometrie,

der technischen und theoretischen Mechanik einschliesslich der Kinematik und Festigkeitslehre (Elasticitätstheorie), der verschiedenen Zweige der mathemathischen Physik, der Elektrotechnik sowie des Maschinenbaues überhaupt, soweit hier ein mathematischer Gedanke hervorleuchtet. Wir werden dankbar sein für jede Anregung, die uns aus dem Kreise der Fachgelehrten zu teil wird, und Wünsche nach bestimmten Modellen, um deren Aeusserung wir im Interesse der Sache ergebenst bitten, nach Möglichkeit berücksichtigen.

Und so übergeben wir denn diesen neuen Katalog, der Zeugnis davon ablegt, welche Bedeutung das mathematische Modell als belebendes und das Verständnis des Vortrages förderndes Element bei den Vorlesungen gewonnen hat, der mathematischen Welt in der zuversichtlichen Hoffnung, damit den Kreis der Gönner und Freunde unseres Unternehmens wiederum zu erweitern, und mit der ergebenen Bitte, nun auch unseren Bestrebungen durch umfangreiche Bestellungen die wünschenswerte Förderung angedeihen zu lassen.

Leipzig, Ende 1911.

Martin Schilling

Verlagshandlung.

Vorbemerkungen.

Bei Bestellungen genügt die Angabe der Serie und Nummer, eventuell auch noch des Preises. Die Verpackung der Modelle geschieht aufs sorgfältigste, und die Emballage wird aufs billigste berechnet. Allgemein gültige Sätze lassen sich hierfür leider nicht aufstellen, die Höhe der Kosten richtet sich vielmehr danach, wie sich die einzelnen Modelle zusammenpacken lassen, ohne Schaden zu leiden.

Besondere Wünsche, auch in Betreff der Zahlung, werden gern in weitestem Masse berücksichtigt.

Inhaltsverzeichnis.

Teil I.

Anordnung der Modelle nach Serien.

		I. Teil Seite	II. Teil Nr.
Cartonmodelle. Flächen 2. Ordnung nach A. Brill.			
Nr. 1,2.	Ellipsoide	1	6,7
„ 3.	Einschaliges Hyperboloid	1	13
„ 4.	Zweischaliges „	1	24
„ 5.	Elliptisches Paraboloid	1	28
„ 6.	Hyperbolisches „	1	35
„ 7.	Kegel	1	43
Serie I.	**Gipsmodelle nach Originalen des mathematischen Instituts der kgl. technischen Hochschule München (I. Folge).**		
Nr. 1.	Rotationsfläche der Tractrix	3	230
„ 2.	Brennfläche eines Strahlensystems . . .	3	118—120
„ 3.	Centrafläche des einschaligen Hyperboloids	3	121—123
„ 4.	Geodätische Linien auf d. Rotationsellipsoid	3	213
„ 5.	Geodätische Linien durch die Nabelpunkte des dreiaxigen Ellipsoids	3	214
Serie II.	**Gipsmodelle nach Originalen der techn. Hochschule München (2. Folge).**		
Nr. 1.	Kummersche Fläche	5	95—97
„ 2.	Fläche 3. Ordnung	5	212
„ 3.	Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung	5	239—242
„ 4,5.	Ratationsflächen von constantem negativen Krümmungsmass	5,6	228, 229
„ 6.	Bahncurve eines schweren Punktes auf einer Kugel	6	325

		I. Teil Seite	II. Teil Nr.
Serie III.	**Gipsmodelle von Flächen 2. Ordnung.**		
Nr. 1, 3.	Ellipsoide	7	2, 3
„ 2, 4.	„ mit Krümmungslinien . .	7	178, 179
„ 5, 6.	Einschalige Hyperboloide	7	10, 11
„ 7.	Einschaliges Hyperboloid mit Krümmungslinien	7	186
„ 8.	Zweischaliges Hyperboloid	7	21
„ 9.	„ „ mit Krümmungslinien	7	188
„ 10, 11.	Elliptische Paraboloide	7	26, 27
„ 12.	Elliptisches Paraboloid mit Krümmungslinien	7	189
„ 13—15.	Hyperbolische Paraboloide	7	32—34
„ 16.	Hyperbolisches Paraboloid mit Krümmungslinien	7	190
„ 17.	Elliptischer Kegel	7	41
„ 18.	„ „ mit Krümmungslinien	7	187
Serie IV.	**Fadenmodelle von Flächen 2. Ordnung.**		
Nr. 1—3.	Hyperboloide	9	16—18
„ 4, 5.	Hyperbolische Paraboloide	9, 10	36, 37
Serie V.	**Gipsmodelle nach Originalen der techn. Hochschule München (3. Folge).**		
Nr. 1.	Modelle für die elliptische Function $\varphi = am\,(u, k)$	11	317
„ 2.	Rotationsflächen von constantem positiven Krümmungsmass	11	220—222
„ 3, 4.	Schraubenflächen von constantem positiven u. negativen Krümmungsmass	11	225, 231
„ 5.	Vier Formen der Dupin'schen Cyclide	11	85, 88—90
„ 6.	Kettenlinie auf der Kugel	12	324
„ 7 a, b.	Enveloppen der von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid . . .	12	215, 217
Serie VI.	**Modelle von Wellenflächen und eines Kreiskegels, sowie Gipsmodelle nach Originalen der techn. Hochschule München (4. Folge).**		
Nr. 1—4.	Wellenflächen für optisch zweiaxige und einaxige Krystalle	13	356, 358—360

		I. Teil Seite	II. Teil Nr.
Nr. 5.	Kreiskegel mit Schnitten	13	42
„ 6.	Raumcurven 3. Ordnung nach Klein	13	151
Serie VII.	**Gipsmodelle von Flächen 3. Ordnung nach Rodenberg**	14	44—70
Serie VIII.	**Gipsmodelle nach Originalen der techn. Hochschule München (5. Folge).**		
Nr. 1.	Fläche von constantem negativen Krümmungsmass	17	232
„ 2.	Minimalfläche 9. Ord. nach Enneper	17	246
„ 3.	Fläche 12. Ordnung, Brennfläche etc.	17	117
„ 4.	Reliefperspectivische Darstellung von Körpern	17	283
„ 5.	Röhrenschraubenfläche nebst Krümmungslinien	17	133
„ 6 a.	Windschiefe Schraubenfläche nebst Krümmungs- und Asymptotenlinien	17	245
„ 6 b, c.	Catenoid aus Gips und biegsamem Messingblech	17	243, 244
„ 7.	Rotationsellipsoid und die auf ihm abwickelbare Schraubenfläche . . .	18	234—236
Serie IX.	**Gipsmodelle von Flächen 4. Ordnung nach Kummer**	19	86, 87, 98—104
Serie X.	**Gips-, Draht- und Messingblechmodelle, zum grössten Teil nach Originalen der techn. Hochschule München (6. Folge).**		
Nr. 1.	Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen	21	249
„ 2.	Zwei Modelle f. Fadenconstructionen des Ellipsoids nach Staude . . .	21	191, 192
„ 3.	Dreiaxiges Ellipsoid längs eines Kreisschnittes zerlegbar	21	5
„ 4.	Modell einer Fläche 4. Ordnung . .	21	105
„ 5.	Parabolische Cyclide	21	91
„ 6.	Flächenstreifen von constantem positiven Krümmungsmass	21	223, 224
„ 7.	Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle mit positiver Doppelbrechung	21	357
„ 8.	Drei Typen von Cycliden	22	92—94

		I. Teil Seite	II. Teil Nr.
Nr. 9.	Fläche 8. Ordnung	22	116
„ 10.	Zwölf Typen von Rotationsflächen mit Asymptotencurven	22	196—207
„ 11.	Bohnenförmig gestaltete Körper zur versuchsweisen Bestimmung der parabolischen Krümmungs- und Asymptotenlinien	22	194, 195
„ 12.	Enveloppen der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien . .	22	216, 218, 219
„ 13.	Dreiaxiges Ellipsoid	22	4
„ 14.	Zwei Flächenstreifen von constantem negativen Krümmungsmass . . .	22	233
Serie XI.	**Drahtmodelle über die Projectionen einer unebenen Curve nach Chr. Wiener**	23	134—141
Serie XII.	**Fadenmodelle zu der Raumcurve 4. Ordnung erster Art nach Hermann Wiener**	24	159—162
Serie XIII.	**Fadenmodelle der Regelflächen 4. Ordnung nach Rohn**	27	106—115
Serie XIV.	**Modelle zur Functionentheorie nach Dyck, Abgüsse nach Originalen der techn. Hochschule München (7. Folge)**	29	307—316
Serie XV.	**Projectionsmodelle etc. der sechs regelmässigen vier-dimensionalen Körper und des vier-dimensionalen vierseitigen Prismas nach Schlegel** .	31	284—295
Serie XVI.	**Confocale Flächen 2. Grades nach Neovius und Schwarz.**		
Nr. 1.	Ellipsoid	35	180
„ 2.	Rechteckige Platte	35	181
„ 3.	Kugel	35	182
„ 4.	Einschaliges Hyperboloid	35	12
„ 5.	Zweischaliges „	35	22
„ 6.	Ellipsoid und einschaliges Hyperboloid	36	183
„ 7.	„ „ zweischaliges „	36	184
„ 8.	Einschaliges und zweischaliges „	36	23
„ 9.	Ellipsoid mit Hyperboloiden . . .	36	185

		I. Teil Seite	II. Teil Nr.
Serie XVII.	**Gipsmodelle verschiedener Art, zum Teil nach Originalen der techn. Hochschule München (8. Folge).**		
Nr. 1.	Minimalfläche mit einer Schar reeller Parabeln nach Neovius	39	248
„ 2.	Die sieben Haupttypen der ebenen Curven 3. Ordnung nach Möbius .	39	170, 171
„ 3.	Flächen von constantem positiven Krümmungsmass nach Enneper .	39	226, 227
„ 4.	Catalan'sche Minimalfläche nach Neovius	39	247
„ 5.	Orthogonalsysteme auf der Kugel nach Dyck	39	318—320
„ 6.	Reguläre Gebietseinteilungen auf der Kugel nach Dyck	39	321—323
„ 7.	Conische Knotenpunkte nach Dyck und Finsterwalder	40	208—211
„ 8.	Gestaltsänderungen einer schwingenden Saite nach Klein	40	361, 362
„ 9.	Wärmeströmung in einem Stabe und in einem Ringe nach Klein . .	40	363—365
„ 10—12.	Riemann'sche Flächen	40	303—305
„ 13.	Fläche, auf welcher das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird	40	193
Serie XVIII.	**Fadenmodelle der Regelflächen 3. Grades nach Chr. Wiener**	43	71—74
Serie XIX.	**Reguläre Gebietsteilungen des Raumes nach Schoenflies**	45	366—377
Serie XX.	**Fadenmodelle der Regelschraubenflächen nach Chr. Wiener**	47	127—132
Serie XXI.	**Fadenmodelle der abwickelbaren Flächen der Raumcurven 4. Ordnung 2. Art nach Rohn** .	49	163—169
Serie XXII.	**Cartonmodelle über die Krümmung der Flächen nach Chr. Wiener**	52	172—174
Serie XXIII.	**Einfache Modelle der Flächen 2. Ordnung und des Cylindroids nach H. Wiener.**		
Nr. 1 a.	Ellipsoid	53	1
„ 1 b.	„ mit Krümmungslinien . .	53	177

		I. Teil Seite	II. Teil Nr.
Nr. 2.	Einschaliges Hyperboloid	53	8
„ 3.	Zweischaliges „	53	20
„ 4, 5.	Paraboloide	53	25, 29
„ 6.	Umdreh-Hyperboloid	53	9
„ 7.	Raumcurve 4. Ordnung	54	158
„ 8 a, b.	Paraboloide	54	30, 31
„ 9 a, b.	Cylindroide	54	75, 76
„ 10.	Cylindroid und Paraboloid vereint .	54	77
Serie XXIV.	**Kinematische Modelle nach Fr. Schilling** . .	56	329—335, 347—351
Serie XXV.	**Fadenmodelle d. Kegel 3. Ordnung nach H. Wiener**	58	78—84
Serie XXVI.	**Modelle für darstellende u. projective Geometrie.**		
Nr. 1—10.	Architectonische Polyeder nach Hauck	61	257—266
„ 11—18.	Acht Modelle nach Fr. Schilling . .	62	267—275
„ 19—23.	Fünf Modelle nach Fr. Schilling . .	62, 63	14, 15, 38—40
Serie XXVII.	**Drahtmodelle electrischer Aequipotential- und Kraftlinien nach O. Wiener**	69	353—355
Serie XXVIII.	**Modelle d. Raumcurven 3. Ordnung nach Ludwig.**		
Nr. 1—4.	Die vier Typen auf Celluloidcylindern	72	152—155
„ 5.	Abwickelbare Fläche der cubischen Ellipse	72	156
„ 6.	Horoptercurve	72	157
Serie XXIX.	**Modelle zur Kreiseltheorie nach Grassmann** .	75	326—328
Serie XXX.	**Gipsmodelle verschiedener Art.**		
Nr. 1, 2.	Abbildung der projectiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche nach Hilbert	78	298, 299
„ 3.	Fläche 3. Ordnung mit parabolischem Punkt nach Stäckel	78	175
„ 4.	Grenzfläche des parabolischen Strahlennetzes nach Zindler	78	124
„ 5.	Fläche der Sehnenmittelpunkte einer Raumcurve nach Finsterwalder und Voss	78	125
„ 6, 7.	Zwei auf das Rotationsparaboloid abwickelbare Flächen nach Darboux	78	237, 238

		I. Teil Seite	II. Teil Nr.
Nr. 8.	Fläche mit einem Punkt $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \mp \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ nach Sommer	78	176
Serie XXXI.	**Zweite Sammlung kinematischer Modelle, insbesondere für Verzahnungstheorie nach Fr. Schilling**	85	336—346
Serie XXXII.	**Verschiedene Modelle.**		
Nr. 1.	Ellipsenzirkel nach Rohn	88	276
„ 2.	Erläuterung des Dandelin'schen Satzes nach Kötter	88	277
„ 3.	Demonstration der räumlichen Entstehungsweise der Kegelschnitte nach Hildebrandt	88	278
„ 4, 5.	Drei-dimensionale Netze zu vier-dimensionalen Körpern nach Gaetschenberger	88	296, 297
„ 6	Planigraph nach Koenigs	88	352
Serie XXXIII.			
Nr. 1.	Fadenmodell der Discriminantenfläche der Gleichung 5. Grades nach Bolza	94	300
„ 2, 3.	Fadenmodelle der Discriminantenfläche der Gleichung 4. Grades nach Klein und Hartenstein	94	301, 302
Serie XXXIV.	**Cartonmodelle der Singularitäten von Raumcuven nach Zeuthen**	96	142—150
Serie XXXV.	**Cartonmodelle von reduzierten Kreisbogenvierecken nach Ihlenburg**	97	306
Serie XXXVI.	**Modelle zur Darstellung affiner Transformationen von Punktsystemen in der Ebene und im Raume nach Klein**	98	279—282
Serie XXXVII.	**Pappmodelle der 4 regelmässigen Sternvielflache nach Fr. Schilling und Wiesing** . .	100	253—256
Serie XXXVIII.	**Modell zur Theorie des Nullsystems nach Fr. Schilling**	102	126
Serie XXXIX.	**Modell zur Erzeugung des Rotationshyperboloids nach Doehlemann**	104	19
Serie XL.	**Gipsmodelle von Flächen constanter Breite nach Meissner**	106	250—252

Teil II.

Anordnung der Modelle nach ihrer sachlichen Zusammengehörigkeit.

	Seite
I. Flächen 2. Ordnung.	
a. Ellipsoide	111
b. Hyperpoloide	111
c. Paraboloide	114
d. Kugel, Kegel und Cylinder	115
II. Algebraische Flächen 3. Ordnung.	
a. Nichtgeradlinige Flächen	116
b. Regelflächen, insbesondere Kegel	120
III. Algebraische Flächen 4. Ordnung.	
a. Cycliden	123
b. Kummersche Flächen	125
c. Flächen mit 4 längs Kreisen berührenden Ebenen	125
d. Flächen mit Doppelgeraden	126
e. Regelflächen	127
IV. Algebraische Flächen von höherer als 4. Ordnung, Liniengeometrie.	128
V. Schraubenflächen	130
VI. Raumcurven und abwickelbare Flächen	131
VII. Infinitesimalgeometrie der Flächen.	
a. Krümmung der Flächen im einzelnen Punkte	136
b. Krümmungslinien, insbesondere auf den Flächen 2. Ordnung; confocale Flächen	137
c. Asymptotencurven und parabolische Curven	139
d. Geodätische Linien auf Flächen 2. Ordnung	141
e. Flächen von constantem Krümmungsmass und aufeinander abwickelbare Flächen	142
f. Flächen von constanter mittlerer Krümmung; Minimalflächen	146
g. Flächen constanter Breite	148
VIII. Darstellende und projective Geometrie.	
a. Hilfsmittel für das geometrische Zeichnen; projective Erzeugung der Kegelschnitte; Reliefperspective	149
b. Projectionen vier-dimensialer Körper	154
IX. Analysis situs	157
X. Algebra	158
XI. Functionentheorie	159
XII. Mechanik und Kinematik	162
XIII. Mathematische Physik. (Electricität, Optik, Elasticität, Wärmelehre).	167
XIV. Krystallstructur (Reguläre Gebietsteilungen des Raumes)	169
Anh.: Modelluntersätze und Stative	172

Erster Teil.

Anordnung der Modelle

nach

Serien.

Erster Teil.

Ein * an der Nummer bedeutet, dass sich im II. Teil des Katalogs eine Abbildung des Modells befindet.

Carton-Modelle von Flächen zweiter Ordnung,

construiert nach Angabe
von

Dr. A. Brill,
ord. Professor an der kgl. techn. Hochschule zu München.

Dargestellt durch ineinandergefügte Ausschnitte aus farbigem Carton.

No. 1.* **Ellipsoid,** gebildet aus 22 Kreisen.
„ 2. desgl., anderer Construction, gebildet aus 30 Kreisen.
„ 3.* **Hyperboloid, einschaliges,** gebildet aus 34 Kreisen.
„ 4. desgl., **zweischaliges** (eine Hälfte), gebildet aus 24 Kreisen.
„ 5.* **Paraboloid, elliptisches,** gebildet aus 28 Kreisen.
„ 6. desgl., **hyperbolisches,** gebildet aus 26 geradlinig begrenzten Schnitten.
„ 7. **Kegel** (eine Hälfte), gebildet aus 26 Kreisen.

Die Cartonscheiben sind, unbeschadet der Beweglichkeit, gegenseitig so befestigt, dass ein Auseinanderfallen der Modelle verhütet wird. Eine wissenschaftliche Erläuterung ist beigefügt.

Preis der Serie 16 Mark.

Auf Verlangen werden die Modelle Nr. 4 und 7, damit die beiden Flächenmäntel in ihrer gegenseitigen Lage veranschaulicht werden können, in je **2 Exemplaren** geliefert. Zum Aufstecken des Doppelkegels eignet sich dann das für das einschalige Hyperboloid bestimmte Gestell Nr. 2, während für Nr 4 (zweischaliges Hyperboloid) zwei Gestelle Nr. 1 erforderlich sind. Die Mehrkosten betragen Mark 2.30 für jedes weitere Modell.

Diese im Jahre 1874 veröffentlichten Modelle verdanken ihr Entstehen der Anregung, die das auf der Mathematiker-Versammlung in Göttingen ausgestellte Modell eines elliptischen Paraboloids von Prof. Henrici in London, aus Halbkreisen zusammengesetzt, dem Urheber gab. Er änderte die Construction in zweckentsprechender Weise ab und dehnte das Verfahren auf die Darstellung aller Flächen zweiter Ordnung aus.

Die Modelle unterscheiden sich von anderen durch ihre Beweglichkeit, vermöge deren jedes einzelne Modell nicht nur ein einzelnes Ellipsoid, Hyperboloid etc., sondern ein ganzes System von Flächen der einen oder anderen Art darstellt, Flächenformen, welche das Modell der Reihe nach durch Anwendung eines leichten Druckes oder Zuges annimmt.

Bei der Biegsamkeit des Stoffes, aus dem die Modelle hergestellt sind, schien es geboten, zweckentsprechende Stative anfertigen zu lassen, um die Modelle beim Gebrauch zu schonen und einzelne Formteile beim Anfassen mit der Hand nicht undeutlich werden zu lassen.

		Preise
Stativ Nr. 1*	zum Aufstecken der Mod. Nr. 1, 2, 4, 5 u. 7 .	Mark 2.—.
„ „ 2*	zum Aufstecken des Mod. Nr. 3	„ 3.—.
„ „ 3*	zum Aufstecken des Mod. Nr. 6	„ 1.—.

Bei Bestellung der Stative ohne Angabe der gewünschten Anzahl werden diese für sämtliche Modelle mitgeliefert, mithin 5 Stück von Nr. 1, je 1 Stück von Nr. 2 u. 3.

Serie I.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (1. Folge.)

Ausgeführt
unter Leitung von Professor Dr. Brill.

Nr 1.* **Die Rotationsfläche der Tractrix mit geodätischen und Haupttangenten-Curven.** Modelliert von stud. math. *J. Bacharach.* (Grösse des Modells 25×18 cm.) Mark 11.—.

„ 2. **Die Brennfläche eines Strahlensystems,** welche mit der **Fläche der Krümmungscentra des elliptischen Paraboloids** in collinearer Verwandtschaft steht. Modelliert von stud. math. *L. Schleiermacher.*

a) Die beiden Mäntel der Fläche getrennt (Grösse 10×10 u. 7×7 cm.) zu je Mark 6.—

b) Die beiden Mäntel vereinigt (Grösse 10×11 cm.) Mark 6.—.

„ 3.* **Die Centrafläche des einschaligen Hyperboloids.** Modelliert von stud. math. *W. Dyck.*

a) Die beiden Mäntel der Fläche getrennt (Grösse 17×16 und 17×16 cm.) Mark 9.50 und 10.50.

b) Die beiden Mäntel vereinigt (Grösse 17×16 cm.) Mark 12.—.

„ 4. **Die geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid.** Construiert von stud. math. *K. Rohn* (Grösse 12×18 cm.) Mark 7.—.

„ 5. **Die geodätischen Linien durch die Nabelpunkte des dreiaxigen Ellipsoids.** Construiert von stud. math. *K. Rohn.* (Grösse 10×18 cm.) Mark 7.—.

Preis der ganzen Serie 70 Mark.

Bei Gelegenheit der Uebungen, welche im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München von den Herren Professoren Brill und Klein geleitet wurden, wurde als Zweck der auszuführenden Untersuchung wohl die Herstellung eines Modells oder einer Zeichnung ins Auge gefasst. Einige der so als Uebungsbeispiele entstandenen Modelle erwiesen sich, mit Rücksicht darauf, dass an derartigen

Anschauungsmitteln kein Ueberfluss ist, als der Vervielfältigung wert, und eine erste Serie derselben, welche unter Leitung von Herrn Brill entstanden ist, wurde der Oeffentlichkeit übergeben. Die Modelle sind wie sie gerade ausgeführt wurden, aneinandergereiht und erheben schon infolge ihrer Entstehungsweise nicht den Anspruch, etwas in sich Abgeschlossenes zu geben oder allen Anforderungen eines weiteren Gesichtskreises zu genügen. Immerhin dürften dieselben auch in dieser Form manches Neue und des Interesses Werte enthalten, wie denn die beigefügten Abhandlungen keineswegs nur Bekanntes reproducieren; und der Zweck, den Urheber und Verleger im Auge haben, wäre erreicht, wenn die Anregung, die von räumlichen Darstellungen auszugehen pflegt, einen Vorzug auch der vorliegenden Modelle bilden würde.

Veröffentlicht 1877.

Serie II.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (2. Folge.)

Ausgeführt
unter Leitung der Professoren Dr. Brill und Dr. Klein.

Ausgeführt unter Leitung von Professor Dr. Klein.

Nr. 1.* **Drei Modelle der Kummer'schen Fläche.** Von stud. math. *K. Rohn.*
a) Alle sechzehn Knotenpunkte sind reell. (Grösse 21×18 cm.) Mk. 28.—.
b) Acht Knotenpunkte reell. (Grösse 30×20 cm.) Mark 32.50.
c) Vier Knotenpunkte reell. (Grösse 20×15 cm.) Mark 21.—.

„ 2. **Fläche dritter Ordnung mit vier reellen conischen Knotenpunkten nebst Haupttangentenkurven.** Von stud. math. *J. Bacharach.* (Grösse 13×22 cm.) Mark 16 50.

Ausgeführt unter Leitung von Professor Dr. Brill.

„ 3.* **Die Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung nebst geodätischen Linien.** Von stud. math. *A. v. Braunmühl.*
a) Onduloid (Grösse 12×26 cm.) Mark 10.50.
b) Nodoid (Grösse 11×8 cm.) Mark 9.50.
c) Ring des Nodoids, durch Umdrehung der Schleife entstanden. Mk 2.50.
d) Catenoid (Grösse 16×10 cm.) Mark 9.50.

„ 4. **Rotationsfläche von constantem negativen Krümmungsmass (Kegel-Typus) nebst geodätischen und Asymptoten-Linien.** Von stud. math. *J. Bacharach.* (Grösse 17×17 cm.) Mark 10.50.

Nr. 5.* **Rotationsfläche von constantem negativen Krümmungsmass (Hyperboloid-Typus) mit parallelen geodätischen Linien und geodätischen Kreisen.** Von stud. math. *W. Dyck*. (Grösse 13×21 cm.) Mark 14.—.

„ 6. **Bahncurve eines schweren Punktes auf einer Kugel.** Von stud. math. *L. Schleiermacher*. (Grösse 18×11 cm.) Mark 13.—.

Preis der ganzen Serie 140 Mark.

Den Nummern 1—5 ist ein erläuternder Text beigefügt, bei Nr. 6 ist die erforderliche Erläuterung unmittelbar an dem Modell angebracht.

Veröffentlicht 1877.

Serie III.

Gips-Modelle von Flächen zweiter Ordnung,

ausgeführt unter Leitung von Professor Dr. **Brill**

von

R. Diesel,

Studierendem der kgl. technischen Hochschule in München.

Ganze Serie, bestehend aus 18 Modellen.

I. Gruppe, 7 Modelle (Nr. 1, 3, 5, 8, 10, 13 u. 17). — **II. Gruppe,** 11 Modelle (Nr. 2, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 16 u. 18).

Nr. 1. **Ellipsoid,** grosse Halbaxe 5 cm.; Axenverhältnis $\sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}$. Mk. 1.60.
„ 2. Dasselbe mit Krümmungslinien. Mark 3.20.
„ 3. **Ellipsoid,** grosse Halbaxe 9 cm.; Axenverhältnis $\sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}$. Mk. 2.25.
„ 4.* Dasselbe mit Krümmungslinien Mark 8.—.
„ 5. **Einschaliges Hyberboloid mit dem Asymptoten-Kegel;** grosse Halbaxe der Kehllellipse 4 cm. (Höhe des Modells 23 cm.) Mark 9.50.
„ 6.* Dasselbe mit den beiden Scharen von geraden Erzeugenden. Mk. 16.—.
„ 7. Dasselbe mit Krümmungslinien. Mark 13.—.
„ 8. **Zweischaliges Hyberboloid** (vgl. Nr. 17), reelle Halbaxse 0,93 cm. (Höhe des Modells 23 cm.) Mark 16.—.
„ 9.* Dasselbe mit Krümmungslinien. Mark 19.50.
„ 10. **Elliptisches Paraboliod,** Halbaxen der Grundellipse 9,5 cm. u. 6 cm. (Höhe des Modells 20 cm.) Mark 3.30.
„ 11. Dasselbe mit Schnitten parallel zur Grundellipse. Mark 4.50.
„ 12.* Dasselbe mit Krümmungslinien. Mark 8.—.
„ 13. **Hyperbolisches Paraboloid,** gleichseitig, Durchmesser des Begrenzungscylinders 14 cm. Mark 4.50.
„ 14. Dasselbe mit ebenen Hyperbel-Schnitten. Mark 8.—.
„ 15.* Dasselbe mit den beiden Scharen von Erzeugenden. Mark 6.60.
„ 16. Dasselbe mit Krümmungslinien. Mark 5.70.
„ 17. **Elliptischer Kegel,** Halbaxen der Grundellipse 10,4 cm. und 5,4 cm. (Höhe des Modells 11,5 cm.) Dieser Kegel ist Asymptoten-Kegel sowohl zu dem einschaligen Hyperboloid (Nr. 5), wie zu dem zweischaligen (Nr. 8). Mark 4.50.
„ 18.* Derselbe mit Krümmungslinien. Mark 6.60.

Auf sämtlichen Modellen der I. Gruppe sind die Hauptschnitte angegeben.

Preis der ganzen Serie 115 Mark,
„ „ I. Gruppe 41 „
„ „ II. „ 86 „

Die vorliegende Serie von Modellen richtet sich an den grossen Kreis derjenigen Mathematiker, die im Verlauf ihrer Lehrtätigkeit oder gelegentlich ihrer Untersuchungen das Bedürfnis einer anschaulichen Darstellung der verschiedenen Typen der Flächen zweiter Ordnung empfunden haben. So lange schon dieses Bedürfnis besteht, so wenig ist bis jetzt geschehen, demselben abzuhelfen; existierte bis dahin doch eine systematische Zusammenstellung der Flächentypen zweiter Ordnung — mit einziger Ausnahme der in diesem Verlage erschienenen Cartonmodelle — überhaupt nicht, von Modellen mit Krümmungslinien garnicht zu reden. So entschloss sich die Verlagshandlung zur Herstellung der obigen Serie, und es gelang ihr, in dem Autor derselben eine wissenschaftlich wie technisch gleich befähigte Kraft zur Ausführung ihres Unternehmens zu gewinnen. Um jedem Wunsche begegnen zu können, wurde die Serie in zwei Gruppen geteilt, von denen die erstere sämtliche Flächen zweiter Ordnung, teilweise in mehreren Typen vertreten, jedoch nur mit Angabe der Hauptschnitte umfasst, während die zweite dieselben Typen mit den beiden Scharen von Krümmungslinien, ferner einige mit Parallelschnitten und einige mit den geraden Erzeugenden enthält. Der letzten Abteilung sind zwei kleine Abhandlungen über die Herstellung der Krümmungslinien beigefügt.

Durch diese Einteilung glaubt die Verlagshandlung den Wünschen der Hochschulen ebensosehr wie denen der technischen Mittelschulen entgegenzukommen. Den Industrie- und Gewerbeschulen, Real- und Kunstschulen namentlich glaubt der Verleger die erste Gruppe der Serie empfehlen zu dürfen; auch wenn die Lehrpläne und Studienprogramme derselben nicht in das Studium der Flächen zweiter Ordnung unmittelbar einführen, sollte doch jedem zukünftigen Techniker die Gelegenheit geboten werden, sich wenigstens auf dem Wege der Anschauung eine Vorstellung davon zu erwerben, was man unter einem Paraboloid, einem Ellipsoid u. s. w. versteht. Andererseits dürften bei Vorträgen an Hochschulen die Modelle der zweiten Gruppe, welche wichtige Eigenschaften derselben zur Anschauung bringen, nicht weniger willkommen sein.

Veröffentlicht 1878.

Serie IV.

Fünf Faden-Modelle von Flächen zweiter Ordnung,

dargestellt

durch Seidenfäden in Messinggestellen.

Nr. 1. Unveränderliches **Hyperboloid.** Das Modell zeigt zwei Systeme von Flächenerzeugenden nebst Asymptotenkegel. Jedes System wird durch 64 Fäden repräsentiert. Abstand der Grundplatten 24 cm., Axenverhältnis der Kehlellipse 21 : 13. Mark 30.—.

Nr. 2.* Bewegliches **Hyperboloid,** in der einen Grenzlage ein Cylinder, in der anderen ein Kegel. Das Modell ist so angeordnet, dass beide Grundplatten beliebig gegen einander gedreht und geneigt werden können. Die durch 64 Erzeugende gebildete Fläche durchläuft dabei alle Lagen des geraden oder schiefen Rotations-Hyperboloids zwischen Cylinder und geradem, bezw. schiefem Kegel und bildet bei gegen einander geneigten Grundplatten Flächen vierter Ordnung mit leicht erkennbarer Strictionslinie. Die durch 22 Erzeugende dargestellte Tangentenebene an Cylinder und Kegel durchläuft alle Lagen des das Hyperboloid längs einer Erzeugenden tangierenden hyperbolischen Paraboloids. Abstand der Grundplatten 26 cm., Höhe des ganzen Modells 55 cm. Mark 85.—.

Auf Wunsch kann das Modell auch mit 2 Systemen von Erzeugenden, ähnlich wie bei Nr. 3, hergestellt werden. Preis dann Mark 90.—.

Nr. 3.* Bewegliches **Hyperboloid,** in beiden Grenzlagen ein Kegel. Die Grundplatten sind beweglich wie in Nr. 2, aber es sind zwei Systeme von Fäden gespannt, welche in einer mittleren Lage die Erzeugenden eines Hyperboloids darstellen, bei einer Drehung der Grundplatten jedoch sich von einander trennen und zwei verschiedene Hyperboloide bilden, welche in der Grenzlage in zwei Kegel übergehen. Die durch 22 Erzeugende dargestellte Tangentenebene durchläuft wechselnde Lagen des die äussere Fläche berührenden hyperbolischen Paraboloids. Abstand der Grundplatten 22,5 cm., Durchmesser der oberen 10 cm., der unteren 20 cm., Höhe des ganzen Modells 50 cm. Mark 90.—.

Nr. 4* Unveränderliches **hyperbolisches Paraboloid.** Da die Fläche eine allseitig offene ist, so wurde die Vorstellung des Flächenhaften durch Anordnung besonders dicht gespannter Fäden zu erhöhen gesucht. Die Tangentialebene im Scheitel enthält zwei Erzeugende der Fläche, welche n o r m a l zu einander stehen. Eine dieser Ebene parallele bildet die Grundplatte des Modells; der Abstand der beiden anderen dazu senkrechten Begrenzungsebenen beträgt 17 cm. Mark 50.—.

Nr. 5.* Bewegliches **hyperbolisches Paraboloid.** Die Fläche ist in ein gleichseitiges windschiefes Viereck einbeschrieben, dessen Seiten paarweise fest verbunden sind. Durch Drehung um eine horizontale Axe (Diagonale des Vierseits) lassen sich diese Seitenpaare aus der horizontalen in eine vertikale Grenzlage drehen, wobei die aus zwei sich kreuzenden Systemen von je 42 Erzeugenden gebildete Fläche aus einer horizontalen Ebene in eine vertikale Doppelebene übergeht. Durch Klemmschrauben ist die Fläche in jeder Lage leicht festzustellen. Seite des Vierecks 32 cm. Mark 90.—.

Diese Serie dient den Darstellungsarten der Cartonmodell-Serie und der Serie 3 der Gipsmodelle von Flächen zweiter Ordnung als wesentliche Ergänzung.

Preis der ganzen Serie 330 Mark.

Die Messinggestelle sind schwarz gebeizt, und bei sämtlichen Modellen sind die Verbindungen der Messingteile mit aller Sorgfalt einfach und dauerhaft hergestellt.

Veröffentlicht 1879.

Serie V.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (3. Folge.)

Ausgeführt

unter Leitung von Professor Dr. Brill.

Nr. 1.* **Darstellung der elliptischen Function $\varphi = am\,(u, k)$ durch eine Fläche.** Von den stud. math. *Th. Kuen* und *Chr. Wolff*. (Grösse 19×25×35 cm.) Mark 21.—.

„ 2. **Rotationsflächen von constantem positiven Krümmungsmass mit geodätischen Linien (drei Typen mit gleichem Krümmungsmass).** Nach den Zeichnungen von *E. Bour* (Journal de l'Ecole Polyt., Tome 22) modelliert und mit geodätischen Linien versehen von Assistenten Dr. *P. Vogel*.

a) Die Kugel. (Grösse 9 cm.) Mark 1.25.

b) Die Meridiancurve der Umdrehungsfläche trifft die Axe. (Grösse 11×7 cm.) Mark 4.60.

c) Die Meridiancurve der Umdrehungsfläche trifft die Axe nicht. (Grösse 10×12 cm.) Mark 10.50.

„ 3. **Schraubenfläche von constantem positiven Krümmungsmass.** (Letzteres ist das der Flächen unter Nr. 2). Von stud. math. *Th. Kuen*. (Grösse 24×15 cm.) Mark 15.—.

„ 4.* **Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass.** (Meridiancurve ist die Tractrix. Vgl. U. Dini, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 1865, 1. Sem. S. 340). Von Dr. *P. Vogel*. (Grösse 24×15 cm.) Mark 18.—.

„ 5.* **Vier Formen der Dupin'schen Cyclide** (vgl. die Abhandlung von Clerk Maxwell in Quart. Journ. of Math. Bd. 9, S. 111) von Dr. *P. Vogel*.

a) Ringcyclide mit imaginären Knotenpunkten. (Grösse 7×14 cm.) Mark 10.50.

b) Horncyclide; zwei reelle Knotenpunkte vereinigen zwei auseinander liegende Flächenmäntel. (Grösse 6×19 cm.) Mark 13.50.

c) Spindelcyclide; zwei reelle Knotenpunkte vereinigen zwei ineinander liegende Flächenmäntel. (Grösse 10×11 cm.) Mark 7.50.

d) Parabolische Cyclide mit zwei reellen Knotenpunkten; erstreckt sich mit einem unpaaren Flächenmantel ins Unendliche. (Grösse 12×15 cm.) Mark 13.50.

Nr 6. **Die Kettenlinie auf der Kugel.** (Vgl. die Abhandlung von Clebsch in Crelle's Journ. Bd. 57, S. 104.) (Grösse 9 cm.) Mark 9.—.
Die beiden (auf einer Kugel vereinigten) Typen entsprechen dem Fall, wo das elliptische Integral sich auf ein Kreisintegral reduciert. In den Bezeichnungen der genannten Abhandlungen: $\rho \sin \varepsilon = 1$, a) $\rho = 3/4$, b) $\rho = 5/4$.

„ 7. **Die Enveloppen der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid.** Von Dr. *A. v. Braunmühl.* (Vgl. dessen Abhandlung in den Math. Annalen Bd. 14, S. 557.)
a) Das verlängerte Rotationsellipsoid (ein Ausgangspunkt). (Grösse 12×8 cm.) Mark 7.50.
b) Das Sphäroid, mit den Enveloppen für zwei verschiedene Ausgangspunkte. (Grösse 7×10 cm.) Mark 7.50.

Preis der ganzen Serie 115 Mark.

Den Nummern 1, 3, 4 und 7 sind Abhandlungen beigefügt, in welchen der Gang der Rechnung kurz dargelegt wird.

Veröffentlicht 1880.

Serie VI.

Modelle von Wellenflächen und eines Kreiskegels, sowie Gipsmodelle,

nach Originalen der techn. Hochschule München (4. Folge).

Nr. 1.* **Die Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle.** Verhältnis der Axenlängen 12 : 8,3 : 6,1. (Grösse 12×8 cm.) Mark 10.50.

a) Der äussere Mantel (längs eines Hauptschnittes zerlegbar) mit Ausschnitten, die den inneren Mantel zeigen.

b) Der innere Mantel.

„ 2. **Das zugehörige Ellipsoid** mit den gleichen Axen. Mark 4.60.

„ 3. **Die Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle** mit negativer Doppelbrechung. Ein Ausschnitt des Sphäroids zeigt die Kugel. Das Axenverhältnis 8,8 : 7,8 ist ungefähr das des Kalkspaths. (Grösse 8×9 cm.) Mark 4.60.

(Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle mit positiver Doppelbrechung s. Serie X, Nr. 7).

„ 4. **Die Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle in einzelnen Octanten mit den sphärischen und ellipsoidischen Linien auf beiden Mänteln und 8 Nabelpunkten.** Verhältnis der Axenlänge 12 : 9 : 6. (Grösse der halben Fläche, zwei Octanten, 24×9 cm.) Mark 10.—.

„ 5. Ein **Kreiskegel** mit Ellipsen-, Hyperbel- und Parabel-Schnitt. Die einzelnen Stücke sind beweglich. (Grösse 32×19 cm.) Mark 25.—.

„ 6. **Die Raumcurven dritter Ordnung auf Cylindern zweiter Ordnung** dargestellt von stud. math. *E. Lange*. Gipsabgüsse nach den unter Leitung von Professor Dr. *Klein* im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (Grösse 10,5×6,5 cm.) Mark 20.50.

a) Die cubische Ellipse. b) Die cubische Hyperbel. c) Die cubische Parabel. d) Die cubische hyperbolische Parabel.

Preis der ganzen Serie 68 Mark.

Der Nr. 4 ist eine Abhandlung von Herrn Rector Dr. Böklen in Reutlingen beigefügt, der Nr. 6 eine solche des Verfertigers.

Die Nummern 1, 2, 3 und 5 sind auf Veranlassung von Prof. Dr. Brill entstanden.

Veröffentlicht 1880.

Serie VII.

Gips-Modelle von Flächen dritter Ordnung.

Die verschiedenen Gestalten der Flächen dritter Ordnung mit parabolischen Curven und die wichtigsten ihrer Hesse'schen Flächen

von

Dr. Carl Rodenberg,

Professor der Mathematik an der Gr. technischen Hochschule zu Darmstadt.

Ganze Serie, bestehend aus 27 Modellen.

I. Gruppe Mod. Nr. 1—15, **II. Gruppe** Mod. Nr. 16—26.

Nr. 1.* Diagonalfläche mit 27 reellen Geraden. (Grösse 15×24 cm.) Mk. 25.—.

„ 2—6. Flächen mit 4 reellen C_2*), welche unter sich collinear sind und nur im Verhalten zur unendlich fernen Ebene Unterschiede zeigen. (Grösse 13×15 cm.) Nr. 2, 3 u. 5 je Mark 12.—, Nr. 4 u. 6 je Mark 11.—.

„ 7. Fläche mit 3 reellen C_2, zu denen kein vierter treten kann. (Grösse 11×15 cm.) Mark 11.—.

„ 8. Dieselbe Art, von der anderen Flächenseite betrachtet, zur Bildung des U_6 (Modell 16). (Grösse 11×15 cm.) Mark 11.—.

„ 9. Fläche mit 3 reellen B_3. (Grösse 11×15 cm.) Mark 10.—.

„ 10. Fläche mit B_3, dessen Ebenen in je drei reellen Knotenstrahlen schneiden. Das Modell dient gleichzeitig zur Überführung des B_3 in einen U_6. (Grösse 10×15 cm.) Mark 10.—.

„ 11. Fläche mit B_3, dessen Ebenen conjugiert imaginär sind. (Grösse 12×15 cm.) Mark 10.—.

„ 12 u. 13. Fläche mit $B_4 + 2 \left\{\begin{matrix}\text{reellen}\\ \text{imaginären}\end{matrix}\right\} C_2$. Bei 12 sind die Ebenen des B_4 reell, bei 13 imaginär. Nr. 12 (Grösse 13×15 cm.) Mark 11.—. Nr. 13 (Grösse 13×16 cm.) Mark 10.—.

„ 14. Fläche mit $B_5 + C_2$. (Grösse 13×15 cm.) Mark 11.—.

„ 15. Fläche mit $B_6 + C_2$. (Grösse 12×15 cm.) Mark 11.—.

„ 16 u. 17. Fläche mit U_6, dessen Ebene in $\left\{\begin{matrix}\text{drei}\\ \text{einem}\end{matrix}\right\}$ reellen $\left\{\begin{matrix}\text{Strahlen}\\ \text{Strahl}\end{matrix}\right\}$ schneidet. Nr. 16 (Grösse 12×15 cm.) Mark 11.—. Nr. 17 (Grösse 12×15 cm.) Mark 10.—.

„ 18. Fläche mit U_7. (Grösse 12×15 cm.) Mark 10.—.

„ 19. Fläche mit U_8. (Grösse 12×15 cm.) Mark 7.50.

---

*) Die Buchstaben C, B, U bedeuten einen conischen, einen biplanaren, einen uniplanaren Knoten, der angehängte Zeiger gibt die Anzahl der Einheiten an, um welche die Klasse durch die betreffende Singularität erniedrigt wird. — Vergl. übrigens die Ausführungen im 2. Teil.

Nr. 20. Regelfläche, deren Doppelgerade völlig von reellen Flächenteilen umgeben ist. (Grösse 13×15 cm.) Mark 15.—.

„ 21. Regelfläche, bei deren Doppelgerade dies nur für eine endliche, von zwei Cuspidalpunkten begrenzte Strecke der Fall ist. (Grösse 13×15 cm.) Mark 12.—.

„ 22 u. 23. Cayley'sche Regelfläche mit $\left\{\begin{matrix}\text{unendlich fernem}\\ \text{im Endlichen gelegenen}\end{matrix}\right\}$ Cuspidalpunkte. Nr. 22 (Grösse 13×15 cm.) Mark 13.—. Nr. 23 (Grösse 13×15 cm.) Mark 16.50.

„ 24a.* Hesse'sche Fläche zu 2 und 5. (Grösse 21×25 cm.) Mark 45.—.

„ 24b. Sternförmiger Teil der vorhergehenden für ein Pentaeder, das aus der unendlich fernen Ebene und einem regulären Tetraeder besteht. (Grösse 13×16 cm.) Mark 11.—.

„ 25.* Hesse'sche Fläche zu 7. (Grösse 21×25 cm.) Mark 40.—.

„ 26. (Drahtmodell) Abbildung der Flächen mit 1, 2, 3, 4 C_2, welche einem reellen Pentaeder angehören, auf den Punktraum. (Grösse 14×22 cm) Mark 10.—.

Preis der ganzen Serie 340 Mark.

I. Gruppe 160 Mark. II. Gruppe 180 Mark.

Die wenigen bis jetzt publicierten Modelle von Flächen dritter Ordnung stehen, wenn man von den einfachsten Arten, den Regelflächen, absieht, in keinem organischen Zusammenhange mit einander und weisen nur die niedrigsten Singularitäten auf. Durch die vorliegende Serie wird nun eine **Darstellung sämtlicher charakteristischen Typen von Flächen dritter Ordnung,** namentlich auch der mit höheren Singularitäten begabten beabsichtigt, mit deren Hilfe man sich ein vollständiges und abgeschlossenes Bild aller möglichen Formen von Flächen dritter Ordnung, die für eine Gesamtdarstellung zu zahlreich wären, verschaffen kann, indem man jeden beliebigen Typus aus einem der gegebenen (und ebenso irgend zwei der vorliegenden auseinander) durch continuierliche Deformation auf anschauliche Weise und ohne jede Schwierigkeit ableiten kann. Dieselbe Aufgabe ist zugleich für diejenigen Hesse'schen Flächen gelöst, welche einem eigentlichen reellen Pentaeder angehören. Von der nicht mehr schwierigen Behandlung der übrigen Arten dieser Fläche, welche den verschiedentlich degenerierten Pentaedern zukommen, wie sie der Verfasser im Bd. 14 der Math. Annalen aufgezählt hat, konnte füglich abgesehen werden.

Für die wirkliche Darstellung erwiesen sich besonders diejenigen Typen geeignet, die neben der gegebenen höheren Singularität noch so viel wie möglich conische Knoten zeigen, und wurden daher diese Flächen modelliert. Die übrigen mit weniger und keinem conischen

Knoten mag man sich dann durch Anwendung der beiden Processe des „Verbindens“ und „Trennens“, wie sie Herr Prof. *Klein* in seiner Arbeit; Math. Annalen Bd. VI., benutzt, und welche an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen, ableiten. Dies gilt auch namentlich für Flächen mit nur conischen Knoten oder ohne Singularitäten, welche imaginäre Linien haben.

Unterschiede in der Gestalt, welche in verschiedenem Verhalten einer und derselben Art zur unendlich fernen Ebene ihren Grund haben, sind nur an einer Gruppe, den Flächen mit $4C_2$, klar gelegt, welche sich hierzu besonders eignen. Alle übrigen — mit Ausnahme der Regelflächen — werden von der unendlich fernen Ebene in einem unpaaren Curvenzuge getroffen, da sich gerade bei dieser Annahme die Bildung höherer Singularitäten aus niederen, insbesondere aus C_2, sehr anschaulich macht, indem nur endliche Deformationen notwendig werden. Hat man an letzteren Modellen dann einmal das Verhalten der Fläche in der Nähe der Singularität und deren Entstehung kennen gelernt, so gibt ein Blick auf diejenigen mit $4C_2$ eine Vorstellung von den ihnen collinearen Gestalten.

Da ein conischer Knoten in einem gegebenen Punkt bei festem eigentlichen Pentaeder die Fläche vollständig bestimmt, so kann er als Bild derselben gedacht werden. Mit Hilfe des Modells Nr. 26 kann man dann ohne Weiteres die Art der zugehörigen Fläche angeben und eine Vorstellung von ihrem ungefähren Verlaufe gewinnen.

Den Modellen ist eine zwei Bogen in gr. 8^0 umfassende Abhandlung beigefügt.

Veröffentlicht 1881.

Serie VIII.

Gips-Modelle.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. (5. Folge.)

Ausgeführt
unter Leitung von Professor Dr. Brill.

Nr. 1.* **Fläche von constantem negativen Krümmungsmass mit ebenen Krümmungslinien** (nach *L. Bianchi*, vergl. Mathematische Annalen Bd. 16, sowie *A. Enneper*, Göttinger Nachrichten 1868). Von stud. math. *J. Mack.* (Grösse 24×18 cm.) Mark 18.50.

„ 2. **Minimalfläche neunter Ordnung** (nach *Enneper*, vgl. Göttinger Nachrichten 1871, S. 28). Von cand. math. *G. Herting.* (Grösse 26×34 cm.) Mk. 24.—.

„ 3. **Fläche zwölfter Ordnung, Brennfläche** der von einer leuchtenden Linie ausgehenden Strahlen nach ihrer Reflexion an einem Cylinder, dessen Axe die Linie trifft. Von stud. math. *S. Finsterwalder.* (Grösse 13×20×12 cm.) Mark 17.50.

„ 4.* **Reliefperspectivische Darstellung** eines Würfels, einer Kugel, eines Kegels und eines Hohlcylinders, auf einem Untersatz vereinigt. Von stud. math. *H. Thoma.* (Grösse 20×45×5 cm.) Mark 26.50.

„ 5. **Röhren-Schraubenfläche** nebst Krümmungslinien. Von Assistenten *Th. Kuen.* (Grösse 20×30 cm.) Mark 15.50.

„ 6a*. **Windschiefe Schraubenfläche** nebst Krümmungslinien und Asymptotencurven. Von cand. math. *G. Herting.* (Grösse 23×22 cm.) Mark 19.50.
Um die Abwicklung dieser Fläche auf ein Catenoid zu zeigen:

b*. **Catenoid** (Umdrehungsfläche der Kettenlinie) aus biegsamem Messingblech. Der Kehlkreis der Rotationsfläche geht bei der Deformation in die Axe der Schraubenfläche über; s. Teil II. Mark 2.50.

c. **Dasselbe** in Gips, nebst Krümmungslinien und Asymptotencurven. (Grösse 14×20 cm.) Mark 12.—.

Das Catenoid aus Messingblech wird in die windschiefe Schraubenfläche in der Weise übergeführt, dass man die Endpunkte des Kehlkreises fasst und diesen in eine gerade Linie auszieht, indem man gleichzeitig ein wenig dreht.

Nr. 7a. **Auf das Rotationsellipsoid abwickelbare Schraubenfläche** (nach *E. Bour*, Journal de l'Ecole polytechnique Bd. XXII). (Grösse 25×12 cm.) Mk. 12.—.
b. **Rotationsellipsoid** aus biegsamem Messingblech. Mark 2.50.
c. **Dasselbe** in Gips. (Grösse 3×9 cm.) Mark 1.75.

Preis der ganzen Serie 142 Mark.

Der Nr. 1 ist eine Abhandlung von Assistenten *Th. Kuen,* den Nummern 2, 3, 5 sind Abhandlungen der Verfertiger beigefügt. Die Erläuterung zu Nr. 4 ist auf dem Modell selbst angebracht.

Veröffentlicht 1882.

Serie IX.

Gips-Modelle von Flächen vierter Ordnung

nach Professor Dr. Kummer in Berlin.

Abgüsse nach den im Besitze des mathematischen Seminars der kgl. Universität zu Berlin befindlichen Originalen, von Prof. Dr. Kummer besprochen in den Monatsberichten der kgl. Academie der Wissenschaften zu Berlin von 1862, 1866, 1872.

Nr. 1—6. Sechs Typen von Flächen vierter Ordnung mit vier längs Kreisen berührenden Ebenen.

Die Kreise sind die Durchschnittslinien einer Kugel mit den Seitenflächen eines regulären concentrischen Tetraeders.

Nr. 1. Die Fläche besteht aus **vier congruenten Teilen**, die in **sechs biplanaren Knotenpunkten** zusammenhängen. Mark 19.50.

„ 2. Wie in Nr. 1, die Tangentialebenen in den Knotenpunkten sind jedoch **imaginär.** Mark 21.50.

„ 3*. **Die römische Fläche von Steiner** mit Haupttangentencurven. Sie besitzt drei Doppelgerade, die sich in einem Punkte treffen. Mark 11.50.

„ 4. Die Fläche besteht aus **zehn** (sechs und vier je unter sich congruenten) **Teilen, die in zwölf conischen Knotenpunkten zusammenhängen.** Mk. 26.50.

„ 5*. Die Fläche besteht aus **sechs congruenten Teilen, die in vier uniplanaren Knotenpunkten zusammenhängen.** Mark 24.50.

„ 6. Die Fläche besteht aus **vier congruenten Teilen, die in vier uniplanaren Knotenpunkten zusammenhängen.** Mark 26.50.

„ 7, 8. Zwei Modelle der **Dupin'schen Cyclide** mit den Schnittcurven mehrerer doppelt berührenden Ebenen. Zusammen Mark 14.—.

„ 9. **Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden:** geometrischer Ort der Krümmungskreise der Normalschnitte einer beliebigen Fläche in einem positiv gekrümmten Flächenelement. Mark 7.—. (Vgl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 2. Teil, 3. Aufl., Cap. VI, § 308).

Preis der ganzen Serie 138 Mark.

Die Verlagshandlung hat von Herrn Professor Dr. *Kummer* in Berlin die Erlaubnis zur Entnahme von Abgüssen der von ihm angefertigten und dem math. Seminar der kgl. Universität zu Berlin überlassenen Modelle erhalten. Diese Förderung ihrer Absichten von berufenster Seite erfüllt sie mit Genugtuung und verpflichtet sie zu um so lebhafterem Dank, als diese bisher unveröffentlichten Modelle des berühmten Geometers zu den schönsten und elegantesten gehören, die bisher entstanden sind. Mit gütiger Einwilligung des Herrn Professors Dr. *Weierstrass* in Berlin wurden die Copien unmittelbar von den Originalen entnommen.

Den Modellen 1—6 liegt ein Abdruck der in den Monatsberichten der Berliner Academie von 1863, 1866 und 1872 erschienenen Besprechung der Modelle von Professor Dr. Kummer bei.

Veröffentlicht 1883.

Serie X.

Gips-, Draht- und Messingblech-Modelle,

zum grössten Teil nach Originalen der techn. Hochschule München (6. Folge).

Nr. 1.* **Zehn Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen** mittelst Seifenlösung. Preis Mark 15.—.

a. Zwei Ringe mit Griff und Füssen zur Darstellung der Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung (Plateau, Statique des liquides T. 1 p. 93—103).

b. Schraubenlinie zur Darstellung der windschiefen Schraubenfläche (ibd. p. 216).

c—g. Kanten des Oktaeders, der vierseitigen Pyramide, des dreiseitigen Prismas, des Tetraeders und Würfels (vgl. Schwarz, Bestimmung einer speciellen Minimalfläche 1871, pag. 84).

h. Kanten des sechsseitigen Prismas (ibd. p. 93).

i. Drahtgestell zur Darstellung der ersten der fünf von Scherck (Crelle's Journal XIII, p. 185) angegebenen Minimalflächen.

k. Zwei rechtwinklich gekreuzte Rechtecke zur Darstellung der fünften Scherck'schen Minimalfläche.

(Nebst einer Anweisung zur Herstellung der Seifenlösung.)

„ 2 **Zwei Modelle für Fadenconstructionen des Ellipsoids,** von Dr. *O. Staude.* Mit zwei Abhandlungen. Preis zusammmen Mark 15.50.

a. Construction aus den beiden Focalcurven. Mark 8.50.

b. Construction aus einem confocalen Ellipsoid und Hyperboloid. Mk.7.—.

„ 3. **Dreiaxiges Ellipsoid** in Gips, längs eines Kreisschnittes in zwei Teile zerlegbar. Mark 4.75.

„ 4.* **Modell einer Fläche vierter Ordnung** mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden. Von stud. math. *S. Finsterwalder.* (Grösse 10 cm.) Mark 4.—

„ 5. **Parabolische Cyclide** mit vier imaginären Knotenpunkten. Modelliert von stud. math. *S. Finsterwalder.* Mit einer Abhandlung. (Grösse 12×20 cm.) Mark 12.—. (Nachtrag zu den Dupin'schen Cycliden Serie V, Nr. 5.)

„ 6. **Zwei Flächenstreifen von constantem positiven Krümmungsmass** aus dünnem Messingblech. Preis zusammen Mark 4.50. (Nachtrag zu Serie V, Nr. 2.)

„ 7. **Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle** mit positiver Doppelbrechung, deren Axenverhältnisse ungefähr dem Zinnober entsprechen. (Grösse 9 cm.) Mark 4.75. (Nachtrag zu Serie VI, Nr. 3.)

Nr. 8. **Drei Typen von Cycliden,** für welche die Krümmungslinien Kreise und sphärische Curven vierter Ordnung sind. Von *S. Finsterwalder.* Preis zusammen Mark 14.—.

Nebst einer Abhandlung von *S. Finsterwalder.*

„ 9. **Fläche achter Ordnung,** die durch Bewegung einer Kreislinie entsteht, deren Ebene senkrecht zur Ebene zweier sich senkrecht schneidenden Geraden bleibt, während die Endpunkte eines Durchmessers auf diesen Geraden gleiten; oder durch Bewegung des Randes einer Kreisscheibe, welche gegen eine verticale und eine horizontale Wand gelehnt aus der verticalen in die horizontale Lage gleitet. Von *S. Finsterwalder.* Mk. 4.75.

„ 10. **Zwölf Typen von Rotationsflächen mit aufgezeichneten Asymptoten- (Haupttangenten-) Curven.** Von *G. Herting.* Preis zusammen Mark 92.—.

Es befindet sich darunter die Fläche, die durch Umdrehung der Sinuslinie um eine Axe senkrecht zur Wellenrichtung entstanden ist (diese Eine modelliert von *H. Sievert*), ferner solche, für welche die Projection der Asymptotencurven auf eine Ebene senkrecht zur Umdrehungsaxe ein System von Kreisen, von logarithmischen und anderen Spiralen, von Pascal'schen Schneckenlinien u. s. w. ist.

Nebst einer Abhandlung von *G. Herting.*

„ 11. **Zwei bohnenförmig gestaltete Körper zur versuchsweisen Bestimmung der parabolischen Curve, der Krümmungs- und Asymptotenlinien** u. s. w. Preis zusammen Mark 3.50.

„ 12. **Enveloppen der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien.** Von Dr. *A. v. Braunmühl.* Preis zusammen Mark 16.—.

a) Auf einem dreiaxigen Ellipsoid.

b) Auf einem grossen abgeplatteten Rotationsellipsoid (zur Demonstration mit gespanntem Faden, der an einem Stift im Ausgangspunkt befestigt ist, geeignet).

c) Auf einem grossen verlängerten Rotationsellipsoid (desgleichen).

„ 13. **Dreiaxiges Ellipsoid** mit dem Axenverhältnis 1 : 2 : 3. Mark 1.40.

„ 14. **Zwei Flächenstreifen von constantem negativen Krümmungsmass** aus biegsamem Messingblech, mit deren Hilfe das Aufbiegen einer solchen Fläche auf eine andere und deren Verschieblichkeit in sich, überhaupt der Begriff einer „Geometrie" auf diesen Flächen erläutert werden kann. Das Krümmungsmass ist dasjenige des Modells Serie II, Nr. 5. Preis je Mk. 4.—.

Preis der ganzen Serie 185 Mark.

Bis auf Nr. 2, a und b sind diese Modelle sämtlich nach Originalen der technischen Hochschule in München hergestellt.

Veröffentlicht 1885.

Serie XI.

Acht Draht-Modelle*

über die Abhängigkeit der Rückkehrelemente der Projectionen einer unebenen Curve von denen der Curve selbst.

Von

Geh. Hofrat Dr. **Chr. Wiener,**

Professor an der Grossh. techn. Hochschule zu Karlsruhe.

Wenn sich auf einer unebenen Curve ein Punkt und mit ihm die Tangente und die Schmiegungsebene der Curve hinbewegt, so kann an einer Stelle jedes dieser Elemente seinen Bewegungssinn beibehalten oder ihn umkehren. Dieses Verhalten wird der Charakter der Curve und ein umkehrendes Element ein Rückkehrelement genannt. Durch Verbindung der verschiedenen Charaktere treten acht Möglichkeiten ein. — Die Projection der Curve auf eine Ebene zeigt im allgemeinen für den Punkt und die Tangente dieselben Charaktere wie die unebene Curve selbst. Nur bei den Projectionen auf die drei Hauptebenen, die Schmiegungs-, die Normal- und die rectificierende Ebene, zeigen sich Änderungen der Charaktere, so dass hier Spitzen und Wendepunkte in der Projection auftreten können, die an der Curve nicht vorhanden sind, und solche verschwinden, die sich an der Curve befinden.

Die Modelle zeigen die acht möglichen Fälle. Sie stellen die Curven aus Draht und die Projectionen auf die drei Hauptebenen durch Zeichnung dar und lassen durch Visieren oder Schattenwerfen die Abhängigkeit ihrer Charaktere, und durch allmähliche Änderung der Projectionsrichtung die Entstehung der Singularitäten der Projectionen erkennen.

Preis der ganzen Serie 60 Mark.

Veröffentlicht 1884.

Serie XII.

Vier Faden-Modelle

zu der Raumcurve vierter Ordnung erster Art und ihrer abwickelbaren Fläche.

Von

Professor Dr. **H. Wiener**

in Darmstadt.

Nr. 1.* **Erster Fall.** Die Curve liegt auf vier reellen Kegeln. Darstellung der Curve als Schnitt dieser Kegel. Mark 128.—.

„ 2. **Erster Fall.** Die abwickelbare Fläche der Tangenten der Curve. Mk. 128.—.

„ 3.* **Zweiter Fall.** Die Curve liegt auf zwei reellen und zwei imaginären Kegeln. Darstellung als Schnitt jener beiden. Die abwickelbare Fläche ihrer Tangenten. Mark 128.—.

„ 4. **Dritter Fall.** Die Curve liegt auf vier imaginären Kegeln. Darstellung als Schnitt zweier geradliniger Hyperboloide. Die abwickelbare Fläche der Tangenten. Mark 75.—.

Preis der ganzen Serie 435 Mark.

Die vorliegenden Modelle sollen die Haupteigenschaften derjenigen Raumcurven vierter Ordnung, die der Schnitt der Flächen zweiter Ordnung eines Büschels sind, sowie der abwickelbaren Fläche ihrer Tangenten und der Doppelcurve dieser Fläche zur Anschauung bringen. Und zwar ist dies für die drei wesentlich verschiedenen Formen der als reell vorausgesetzten Raumcurve durchgeführt, welche von der Reellität der vier im Flächenbüschel enthaltenen Kegel abhängen*). Je nachdem von diesen nämlich vier oder zwei oder keine reell sind, besitzt ihre Schnittkurve zwei paare Äste, einen einzigen Ast oder zwei unpaare Äste.

*) Man vergleiche v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Art. 558, 560 u. 561.

Modell 1 zeigt die Curve, welche der Durchschnitt von vier reellen Kegeln ist. Von jedem derselben ist eine Anzahl von Erzeugenden durch Fäden dargestellt. Es laufen dann immer vier Fäden durch einen Curvenpunkt und halten eine Perle, deren Gesamtheit die Curve veranschaulicht.

Modell 2 bildet eine Ergänzung des ersten, indem es dieselbe Curve wie jenes vorführt, diesmal aber eingehüllt durch ihre vermittelst Fäden dargestellten Tangenten. In den Ebenen je dreier Kegelspitzen treffen sich die Tangenten paarweise und bilden so die aus vier rationalen ebenen Curven vierter Ordnung zusammengesetzte Doppelcurve der abwickelbaren Fläche. Jede dieser vier Curven besitzt in drei Kegelspitzen Doppelpunkte, von denen je einer isoliert ist. Die Punkte der Doppelcurve sind da, wo sich zwei Fäden treffen, wieder durch Perlen bezeichnet. Da sie aber auch isolierte Teile enthält, in denen sie die Fläche verlässt, so zeigen Drähte ihren vollständigen Verlauf an. Die Zwickpunkte der Doppelcurve, in denen die isolierten Teile auf die Fläche stossen, sind die Schnittpunkte der vier Ebenen, in denen sie liegt, mit der Raumcurve.

Diese Punkte sind auch bezüglich der Raumcurve als singuläre Punkte ausgezeichnet. Sie besitzen nämlich Rückkehrschmiegungsebenen (diese Singularität ist im zweiten Modell der Serie XI. dargestellt). Es ist dadurch zugleich der allgemeine Satz veranschaulicht, dass in einem derart singulären Punkt einer beliebigen Raumcurve die abwickelbare Fläche diese verlässt und weiterhin isoliert verläuft.

Modell 3, welches die Curve darstellt, durch die nur zwei reelle Kegel gehen, vereinigt für diesen Fall, was für den ersten in zwei Modelle getrennt ist.

Modell 4 stellt die Raumcurve vierter Ordnung dar, durch welche kein reeller Kegel geht. Da die Curve die Eigentümlichkeit hat, dass sie nur auf geradlinigen Flächen zweiter Ordnung liegt, so war es möglich, sie durch zwei Hyperboloide herzustellen, von welchen je eine Schar von Erzeugenden durch eine Anzahl von Fäden veranschaulicht ist. Die vier imaginären Kegelspitzen liegen paarweise auf zwei reellen Geraden und diese sind einander conjugiert in Bezug auf jedes der beiden Hyperboloide, d. h. sie sind Gegenkanten von zwei Tetraedern, deren übrige Kanten durch Erzeugende je einer der Fläche gebildet sind. Diese Erzeugenden sind durch besondere Fäden, jene Gegenkanten durch Drähte hervorgehoben. Jeder von diesen schneidet die beiden Hyperboloide in sich trennenden Punktepaaren, den Eckpunkten der Tetraeder. Die

Involution, der diese Punktepaare angehören, hat die imaginären Kegelspitzen zu Doppelpunkten.

Die abwickelbare Fläche ist auch hier angegeben, sie zerfällt, wie die Curve selbst, in zwei Teile, die in diesem Falle vollständig getrennt sind, indem ihre Doppelcurve durchweg imaginär ist.

Es stellen die ersten beiden Modelle die Gebilde in der grössten auftretenden Vollständigkeit dar; in dem einfacheren Falle konnten sie in einem einzigen Modelle, dem dritten, vereinigt werden; das vierte Modell zeigt von den anderen völlig verschiedene, besonders interessante Formen.

Zum Schluss mag noch auf die verschiedenen Formen hingewiesen werden, welche die Projectionen der Raumcurve auf eine Ebene annehmen. Es sind Curven mit zwei Doppelpunkten, und sie erschöpfen sämtliche Formen, die eine solche Curve aufweisen kann. Auch hier tritt, wie bei den Raumcurven, der Unterschied derer mit zwei paaren Ästen, einem einzigen Ast, oder zwei unpaaren Ästen auf. Aber in jeder dieser Abteilung treten noch sehr verschiedenartige Formen auf, welche erkannt werden, wenn man das Auge in die verschiedenen Teile des Raumes bringt, die durch die Kegel und die abwickelbare Fläche begrenzt werden. So sind allein bei der Curve des ersten Falles 18 verschiedene Formen der Projection zu unterscheiden, während im zweiten und dritten Falle 11 und 3 verschiedene Formen auftreten.

Die Anregung zur Anfertigung dieser Modelle hat der Verfasser durch seinen Vater erhalten, indem er schon in seiner Studienzeit an der technischen Hochschule zu Karlsruhe ein zu dieser Gruppe gehöriges Modell für die Unterrichtssammlung für darstellende Geometrie ausführte.

Veröffentlicht 1884.

Serie XIII.

Zehn Faden-Modelle der Regelflächen 4. Ordnung

von

Dr. **Karl Rohn,**

Professor der Mathematik an der königl. technischen Hochschule zu Dresden.

Nr. 1. **Regelfläche mit zwei reellen Doppelgeraden und vier Pinchpoints auf jeder derselben.** Sie besteht aus zwei Teilen, auf welchen je ein Stück von jeder Doppelgeraden liegt. Mark 42.—.

„ 2*. **Regelfläche mit zwei reellen Doppelgeraden ohne Pinchpoints.** Die beiden Mäntel der Fläche durchsetzen sich gegenseitig längs der beiden Doppelgeraden. Mk. 49.—.

„ 3. **Regelfläche mit zwei reellen Doppelgeraden und vier Pinchpoints auf einer derselben.** Die beiden Mäntel dieser Fläche enthalten je ein Stück der einen Doppelgeraden und durchschneiden sich gegenseitig längs der andern. Mark 45.—.

„ 4. **Regelfläche mit zwei conjugiert imaginären Doppelgeraden;** sie besteht aus zwei hyperpoloidartigen Flächenteilen. Mark 42.—.

„ 5. **Regelfläche mit einer Selbstberührungsgeraden und vier Pinchpoints auf derselben.** Diese Fläche besitzt zwei gleichartige Teile und geht aus der Fläche 1 durch Zusammenrücken der beiden Doppelgeraden hervor. Mk. 12.—.

„ 6. **Regelfläche mit einer dreifachen Geraden und vier Pinchpoints auf derselben;** diese Fläche besitzt noch eine einfache Leitgerade. Mk. 45.—.

„ 7. **Regelfläche mit einer dreifachen Geraden und zwei constanten Tangentialebenen längs derselben;** d. h. die Erzeugende, welche die Fläche beschreibt, geht zweimal durch die Lage der dreifachen Geraden hindurch. Es gibt auf der dreifachen Geraden zwei höhere singuläre Punkte. Mk. 45.—.

„ 8.* **Regelfläche mit einem Doppelkegelschnitt und einer ihn schneidenden Doppelgeraden.** Als Doppelkegelschnitt ist ein Kreis gewählt, auf demselben, sowie auf der Doppelgeraden liegen zwei Pinchpoints. Der gemeinsame Punkt des Kreises und der Doppelgeraden ist ein Selbstberührungspunkt der Fläche. Mark 49.—.

„ 9. **Regelfläche mit einer Doppelcurve dritter Ordnung und vier Pinchpoints.** Sie besteht aus einem einzigen Flächenteil, der aus reellen und ideellen Doppelsecanten der Raumcurve dritter Ordnung gebildet wird. Der Fläche gehören vier Tangenten der Raumcurve an, welche den Übergang von den reellen zu den ideellen Secanten bilden. Mark 45.—.

„ 10. **Regelfläche mit einer Doppelcurve dritter Ordnung ohne Pinchpoints.** Sie wird aus reellen und ideellen Doppelsecanten der Raumcurve dritter Ordnung gebildet, und wiederum sind es vier Tangenten der Raumcurve, welche den Übergang bilden. Die Fläche besteht aus einem einzigen Teile, der sich längs der ganzen Doppelcurve durchsetzt. Mk. 45.—.

Preis der ganzen Serie 430 Mark.

Schon verschiedentlich sind specielle Flächen vierter Ordnung modelliert worden; es sei nur erinnert an die Flächen mit 16 Knotenpunkten, an die Plücker'schen Complexflächen, an eine Art von Flächen mit 12 Knoten, sowie an die Cycliden. Das Modellieren solcher Flächen ist in der Regel eine Folge der genaueren Kenntnis der Eigenschaften derselben. Die Kenntnis verschiedener Eigenschaften der Regelflächen vierter Ordnung ist aber bereits früher durch mehrere Abhandlungen und ein Einblick in ihre verschiedenen Gestalten neuerdings durch die Abhandlung des Verfassers gewonnen worden, so dass die Modelle dieser Regelflächen schon aus diesem Grunde ein allgemeineres Interesse verdienen. Einen zweiten wesentlichen Grund für die Bedeutung und den Wert dieser Modelle findet der Verfasser aber darin, dass sie in der grossen Gattung der Regelflächen so ziemlich die ersten sind. Ausser einigen abwickelbaren Flächen — also Regelflächen speciellster Art — und den drei Regelflächen dritter Ordnung sind Regelflächen nicht modelliert. Und doch sind gerade die Regelflächen besonders instructiv, und die Fadenmodelle haben den grossen Vorzug, das man ihre Conturen ihrer ganzen Erstreckung nach wirklich sehen kann. Bei den vorliegenden Regelflächen ergeben sich als Projectionen Curven vierter Klasse mit zwei resp. drei Doppeltangenten oder einer dreifachen Tangente, Curven, welche manche Eigentümlichkeiten aufweisen.

Je nach der Art der vielfachen Curve unterscheidet man Regelflächen mit zwei Doppelgeraden, Regelflächen mit einer dreifachen Geraden, Regelflächen mit einem Doppelkegelschnitt und einer Doppelgeraden und Regelflächen mit einer Doppelcurve dritter Ordnung. Flächen der ersten Art stellen die Modelle 1, 2, 3, 4 und 5 vor, Flächen der zweiten Art die Modelle 6 und 7, eine Fläche der dritten Art das Modell 8, undendlich zwei Flächen der letzten Art die Modelle 9 und 10. Die Modelle 1 bis 5 geben über die Flächen der ersten Art einen Ueberblick, während bei den übrigen Arten nur die Fälle modelliert wurden, welche besonders interessant sind und ohne Modelle sich schwerer vorstellen lassen. Noch ist zu erwähnen, dass alle Modelle symmetrisch gebaut sind; dadurch gewinnen sie ungemein an Uebersichtlichkeit, ohne an ihrer Allgemeinheit einzubüssen. Bei den Flächen 1, 2, 3 und 8, 9, 10 sind die Constanten ausserdem so gewählt, dass die Erzeugenden sich in windschiefe Vierseite anordnen lassen, was für die Gestalten dieser Flächen durchaus keine Specialisierung bedeutet.

Den Modellen ist eine $1\,^1/_2$ Bogen in gr. 8^0 umfassende Abhandlung beigefügt.

Veröffentlicht 1886.

Serie XIV.

Modelle zur Functionentheorie.

Abgüsse nach den im mathematischen Institut der königl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen (7. Folge).

Ausgeführt
unter Leitung von Professor Dr. Walther Dyck.

Die vorliegende Serie von Modellen ist entstanden im Anschluss an eine einleitende Vorlesung über Functionentheorie. Die Schwierigkeit einer möglichst anschaulichen Schilderung des Verhaltens einer Function in der Umgebung singulärer Stellen liess den Wunsch aufkommen, auch auf diesem Gebiete und wenigstens für die wichtigsten singulären Vorkommnisse das Hilfsmittel räumlicher Anschauung zu besitzen, das schon auf eine Reihe anderer Gebiete — und besonders durch die von den früheren Leitern des Münchener mathematischen Instituts ausgegangene Anregung — so zweckmässig und fördernd im Unterricht sich erwiesen hat.

Um für gewisse singuläre Punkte einer Function, dann auch für den Gesamtverlauf gewisser Functionstypen eine räumliche Darstellung zu gewinnen, sind (in der bekannten Weise) der reelle und der imaginäre Teil der Werte einer Function über der Ebene des complexen Arguments als Ordinaten aufgetragen. So entstehen für jede Function zwei Flächen (mit R und I bezeichnet), deren gleichzeitige Betrachtung ein Bild des Functionsverlaufs liefert. Auf den Flächen (für welche gleichmässig die Einheit des Massstabes zu 3 cm. gewählt wurde) ist ein System von Niveaulinien und deren Orthogonaltrajectorien aufgetragen. Die durch Projection dieser Curvensysteme auf die Ebene des complexen Arguments entstehenden quadratischen Systeme sind (mit Ausnahme von Nr. 4 und 5, wo es sich nur um die ganz bekannten Kreissysteme handelt) in besonderen Tafeln den Modellen beigegeben; ebenso ist den Modellen ein erläuternder Text beigefügt, welcher in Kürze die wichtigsten geometrischen wie analytischen Beziehungen für die einzelnen dargestellten Functionen entwickelt und auf den bezüglich der näheren Ausführungen hier verwiesen sein mag.

Die Serie enthält folgende Darstellungen:

Die Modelle 1, 2 und 3 veranschaulichen das Verhalten einer Function in der Nähe von Verzweigungsstellen, und zwar:

Nr. 1. Für $w^2 = z^2 - 1$. Zwei Modelle (Grösse 12×12×12 cm.), ausgeführt von Lehramtscandidaten *A. Wildbrett*. Preis für a. und b. je Mark 11.50.

„ 2. Für $w^2 = z^4 - 1$. Zwei Modelle (Grösse 12×12×12 cm.), ausgeführt von Lehramtscandidaten *A. Wildbrett*. Preis für a. und b. je Mark 16.—.

„ 3*. Für $w^4 = 1 - z^2$. Ein Modell (Grösse 12×12×12 cm.), ausgeführt von Lehramtscandidaten *A. Wildbrett*. Mark 18.50.

Die Modelle 4 und 5 dienen zur Darstellung des Zusammenrückens zweier logarithmischer Unendlichkeitspunkte in einen (einfachen) algebraischen, und zwar gibt:

Nr. 4. Die Function $w = \frac{1}{z}$. Ein Modell (Grösse 12×12×12 cm.), ausgeführt von Lehramtscandidaten *A. Wildbrett*. Mark 12.50.

„ 5. Die Function $w = \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{z-\varepsilon}{z+\varepsilon} \left(\varepsilon = \frac{\pi}{4}\right)$. Zwei Modelle (Grösse 12×12×12 cm.), ausgeführt von Assistenten *H. Burkhardt* und stud. math. *J. Kleiber*. Preis für a. und b. je Mark 12.50.

Modell 6 gibt das Verhalten einer Function in der Umgebung des einfachsten, wesentlich singulären Punktes durch

Nr. 6. $6w = e^{\frac{1}{6z}}$. Ein Modell (Grösse 17×18×15 cm.), ausgeführt von stud. math. *J. Kleiber*. Mark 21.—.

Die Modelle 7 bis 10 veranschaulichen den Verlauf der elliptischen Functionen $p(u)$ und $p'(u)$ (in der Weierstrass'schen Normalform), und zwar speciell:

Nr. 7* u. 8 für die Invarianten $g_2 = 4$, $g_3 = 0$. Drei Modelle (Grösse 16×16×16 cm.), berechnet und ausgeführt von Assistenten *H. Burkhardt* und Lehramtscandidaten *A. Wildbrett*. Preis für Nr. 7a und b je Mark 38.—, für Nr. 8 Mark 44.—.

Nr. 9* u. 10 für die Invarianten $g_2 = 0$, $g_3 = 4$. Vier Modelle (Grösse 15×22×16 cm.), berechnet und ausgeführt von Assistenten *H. Burkhardt* und Lehramtscandidaten *A. Wildbrett*. Preis für Nr. 9a und b je Mark 41.—, für Nr. 10a und b je Mark 48.—.

Beigegeben ist ein erläuternder Text zu sämtlichen Modellen (1 Bogen gr. 8⁰ umfassend), sowie (in 5 Tafeln) die Darstellung der auf den Flächen eingetragenen Curvensysteme.

Preis der ganzen Serie 400 Mark.

Veröffentlicht 1886.

Serie XV.

Projections-Modelle

der sechs regelmässigen vier-dimensionalen Körper
und des vier-dimensionalen vierseitigen Prismas.

Von
Dr. **Victor Schlegel**
in Hagen i. W.

A. Drahtmodelle mit Seidenfäden.

Nr. 1. **Fünfzell,** dargestellt durch ein in 4 Tetraeder zerlegtes regelmässiges Tetraeder. Der Körper enthält 10 Flächen, 10 Kanten, 5 Ecken. (Kante des äusseren Tetraeders 6 cm.) Mark 1.20.

„ 2. **Achtzell,** dargestellt durch ein in 7 Hexaeder zerlegtes regelmässiges Hexaeder. Der Körper enthält 24 Flächen, 32 Kanten, 16 Ecken. (Kante des äusseren Würfels 6 cm.) Mark 4.50.

„ 3. **Sechzehnzell,** dargestellt durch ein in 15 Tetraeder zerlegtes regelmässiges Tetraeder, Der Körper enthält 32 Flächen, 24 Kanten, 8 Ecken. (Kante des äusseren Tetraeders 8 cm.) Mark 4.—.

„ 4. **Vierundzwanzigzell,** dargestellt durch ein in 23 Oktaeder zerlegtes regelmässiges Oktaeder. Der Körper enthält 96 Flächen, 96 Kanten, 24 Ecken. (Kante des äusseren Oktaeders 13 cm.) Mark 12.—.

„ 5. **Sechshundertzell,** dargestellt durch ein in 599 Tetraeder zerlegtes regelmässiges Tetraeder. Der Körper enthält 1200 Flächen, 720 Kanten, 120 Ecken. (Kante des äusseren Tetraeders 69 cm.) Mark 160.—.

„ 6. **Hundertzwanzigzell,** dargestellt durch ein in 119 Dodekaeder zerlegtes regelmässiges Dodekaeder. Der Körper enthält 720 Flächen, 1200 Kanten, 600 Ecken. (Kante des äusseren Dodekaeders 21,5 cm.) Mark 200.—.

„ 7. **Projections-Modell des vier-dimensionalen vierseitigen Prismas** und seiner Zerlegung in vier inhaltsgleiche Fünfzelle. (Seitenkante des Prismas 11 cm.) Mk. 4.—.

B. Ansichten, Netze und Modelle aus Carton.

zu Nr. 5 (Sechshundertzell) und Nr. 6 (Hundertzwanzigzell).

Nr. 8. **Zwei Hefte** mit lithograph. Ansichten und Netzen der Modelle 5 und 6. Mark 4.—.

„ 9.* **Fünf Carton-Modelle** zu Nr. 5 (Sechshundertzell). Mark 30.—.

„ 10. **Netze** zu Nr. 5, behufs Ausschneiden und Zusammenkleben der Carton-Modelle. Mark 1.50.

„ 11.* **Drei Carton-Modelle** zu Nr. 6 (Hundertzwanzigzell). Mark 30.—.

„ 12. **Netze** zu Nr. 6, behufs Ausschneiden und Zusammenkleben der Carton-Modelle Mark 2.50.

Preis der ganzen Serie, ohne Nr. 10 u. 12, 430 Mark.

Nr. 1—6. Im vier-dimensionalen Raume gibt es, entsprechend den fünf regelmässigen Körpern des gewöhnlichen Raumes, sechs regelmässige Gebilde, welche von regelmässigen Tetraedern, Hexaedern, Oktaedern oder Dodekaedern so begrenzt werden, dass in jeder Ecke gleichviele Kanten, Flächen und Körper, und in jeder Kante gleichviele Flächen und Körper zusammenstossen. Diese Gebilde sind: 1) das Fünfzell, bel grenzt von 5 Tetraedern, 2) das Achtzell, begrenzt von 8 Hexaedern, 3) das Sechzehnzell, begrenzt von 16 Tetraedern, 4) das Vierundzwanzigzell, begrenzt von 24 Oktaedern, 5) das Einhundertzwanzigzell, begrenzt von 120 Dodekaedern, 6) das Sechshundertzell, begrenzt von 600 Tetraedern. — Obwohl diese Gebilde selbst unserer Anschauung unzugänglich ind, kann man dennoch Projectionen derselben im drei-dimensionalen Raume construieren, welche alle an den Gebilden befindlichen Ecken, Kanten, Flächen und Körper in ganz analoger Weise zur Darstellung bringen, wie eine ebene Abbildung die Ecken, Kanten und Flächen eines regelmässigen Polyeders. Diese Projectionskörper enthalten gleichzeitig die Lösung eines rein stereometrischen Problems, nämlich: Ein Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder so in Körper derselben Art zu zerlegen, dass in jeder Ecke gleichviele Kanten, Flächen und Körper, und in jeder Kante gleichviele Flächen und Körper zusammenstossen.

Die Modelle bringen diese vier-dimensionalen Gebilde in Centralprojection zur Darstellung, wobei das Projections-Centrum so gedacht ist, dass kein Grenzkörper einen anderen durchdringt, und ein einziger als Ganzes alle übrigen als seine Teile in sich schliesst.

In allen Modellen sind die Körper durch ihre in Draht und Seide ausgeführten Kanten zur Darstellung gebarcht, und zwar so, dass im Allgemeinen die Grenzkanten jeder Polyeder-Schicht in Draht, dagegen die Verbindungskanten je zweier auf einander folgender Schichten in verschiedenfarbiger Seide ausgeführt sind.

Die Modelle wurden zum ersten Male auf der 57. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte (1884) in Magdeburg, sodann (1886) in Darmstadt bei Gelegenheit des Jubiläums der dortigen Hochschule ausgestellt.

Nr. 7. Entsprechend dem zwei-dimensionalen Parallelogramm („ebenen zweiseitigen Prisma") und dem drei-dimensionalen dreiseitigen Prisma gibt es im vier-dimensionalen Raume ein vier-dimensionales vierseitiges Prisma, begrenzt von zwei congruenten Tetraedern in parallelen drei-dimensionalen Räumen und von vier dreiseitigen Prismen. —

Wie das Parallelogramm durch einen Diagonalschnitt (Strecke) in zwei inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt werden kann, und das dreiseitige Prisma durch zwei Diagonalschnitte (Dreiecke) in drei inhaltsgleiche Tetraeder, so lässt sich das vier-dimensionale vierseitige Prisma durch drei Diagonalschnitte (Tetraeder) in vier inhaltsgleiche Fünfzelle zerlegen. — Und gerade so, wie in einer Ebene zwei congruente Dreiecke mit paarweise parallelen Seiten, deren homologe Ecken verbunden sind, die ebene Parallelprojection eines dreiseitigen Prismas darstellen, so lässt sich auch durch analoge Construction die räumliche Parallelprojection eines vier-dimensionalen vierseitigen Prismas herstellen. Dasselbe gilt auch von der oben erwähnten Zerlegung.

Modell Nr. 7 gibt diese Projection des vier-dimensionalen vierseitigen Prismas und seiner Zerlegung in vier inhaltsgleiche Fünfzelle, wobei die Kanten des Prismas durch Messingdraht, die neu hinzukommenden Kanten der teilenden Tetraeder durch Seide dargestellt sind.

Das Modell bezweckt einerseits, die Übung in den strengen Analogieschlüssen, welche aus dem Gebiete der drei-dimensionalen Geometrie in das der vier-dimensionalen führen, durch ein anschauliches und (vermöge der Mannigfaltigkeit der darin vorkommenden Gebilde) vielseitiges Beispiel zu fördern. Andrerseits soll es zur Einübung desjenigen Denkprozesses dienen, vermöge dessen ein räumliches Gebilde ebenso als Projection eines vier-dimensionalen erkannt wird, wie eine ebene Zeichnung als Projection eines drei-dimensionalen.

Nr. 8—12. Die zu Nr. 5 und 6 der Modelle gehörigen Hefte enthalten Ansichten und Netze zu den Vielflachen dieser beiden complicierteren Drahtkörper. Die Modelle aus Carton sind aus diesen Netzen zusammengefügt und zeigen die schalenförmig sich umschliessenden Polyeder jener beiden Drahtkörper. Die Hefte und Cartonmodelle dürften sowohl für diejenigen Mathematiker von Interesse sein, welche der Betrachtung und dem Studium der Projectionsmodelle der regelmässigen vier-dimensionalen Körper an sich ihre Aufmerksamkeit schenken, wenn sie auch nicht im Besitz der Modelle sind, als auch für diejenigen Kreise, welche jene zwei grossen Drahtkörper von der Verlagshandlung bereits bezogen haben. Wird doch das Anschauungsvermögen bei Betrachtung der einzelnen Teile der Drahtkörper durch Vergleichung derselben mit den Cartonmodellen wesentlich unterstützt, da bei letzteren vermöge ihrer Darstellungsweise, entgegen den Drahtkörpern, alle Kanten

weniger ins Auge fallen, die Flächen jedes einzelnen Körpers dagegen mehr hervortreten und eine klarere Vorstellung von der Gestaltung jedes einzelnen Polyeders ermöglichen. Wenn auch ein richtiges Gesamtbild allerdings dann wiederum nur durch die grossen Drahtkörper ermöglicht wird, so bilden in vorerwähntem Sinne die Cartonmodelle eine wünschenswerte Ergänzung der Drahtkörper, die ohne grossen pecuniären Aufwand beschafft werden kann.

Für diejenigen Mathematiker, welche eine Herstellung der Cartonmodelle selbst vorzunehmen wünschen, ist die Einrichtung getroffen, dass die Cartonbogen mit den lithographierten Netzen zu oben bemerkten Preisen von der Verlagshandlung in gleicher Weise wie die Hefte mit den Ansichten separat bezogen werden können.

Den Nummern 1—7 sind Erläuterungen beigefügt.

Veröffentlicht 1886.

Serie XVI.

Gips-Modelle zur Lehre von den confocalen Flächen zweiten Grades

im Anschluss an einige von Professor Dr. **E. R. Neovius** in Helsingfors angefertigte Modelle.

A. Krümmungslinien des Ellipsoids und conforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel.

Nr. 1.* **Ellipsoid mit drei Hauptschnitten und achtzehn Krümmungslinien.** (Grösse 16×14×9 cm.) Von Professor *Neovius*.

„ 2.* **Rechteckige Platte,** beiderseitig mit geraden Linien versehen, welche einzeln den auf dem Modell Nr. 1 ersichtlich gemachten krummen Linien entsprechen. (Grösse 16×13 cm.)

„ 3.* **Kugel mit drei grössten Kreisen und achtzehn confocalen sphärischen Kegelschnitten.** (Grösse 14,5 cm.) Von Professor *Neovius*.

Preis mit Untersatz Mk. 35.—.

B. Confocale Flächen zweiten Grades.

„ 4. **Einschaliges Hyperboloid.** (Höhe 21 cm.) Mark 15.—.
Das durch dieses Modell dargestellte einschalige Hyperboloid ist zu dem durch Modell Nr. 1 dargestellten Ellipsoid confocal und geht durch eine der auf dem Modelle dieses Ellipsoids zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch. Von jeder der beiden Scharen der geradlinigen Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids sind auf dem Modelle 32 Individuen zur Anschauung gebracht

„ 5. **Zweischaliges Hyperboloid.** (Grösse 21×30 cm.) Mark 18.—.
Dieses Modell besteht aus zwei, durch eiserne Stäbe mit einander verbundenen Stücken. Das dargestellte zweischalige Hyperboloid ist zu dem durch Modell Nr. 1 dargestellten Ellipsoid und zu dem durch Modell Nr. 4 dargestellten einschaligen Hyperboloid confocal und geht durch eine der auf dem Ellipsoidmodell zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch

Nr. 6. **Vereinigung eines Ellipsoids mit einem confocalen einschaligen Hyperboloid.** Durchdringung der Modelle 1 und 4. Mark 18.—.

„ 7.* **Vereinigung eines Ellipsoids mit einem confocalen zweischaligen Hyperboloid.** Durchdringung der Modelle 1 und 5. Mark 21.—.

„ 8. **Vereinigung eines einschaligen Hyperboloids mit einem confocalen zweischaligen Hyperboloid.** Durchdringung der Modelle 4 und 5. Mark 21.—.

„ 9.* **Vereinigung eines Ellipsoids mit einem confocalen einschaligen und einem confocalen zweischaligen Hyperboloid.** Durchdringung der Modelle 1, 4 und 5. Mark 25.—.

Preis der ganzen Serie 145 Mark.

Nr. 1—3. Wenn es sich darum handelt, auf einem Modelle einer Fläche zweiten Grades, insbesondere auf der Oberfläche eines Ellipsoids, die beiden Scharen der Krümmungslinien dieser Fläche durch eine grössere oder kleinere Anzahl der zu diesen Scharen gehörenden Curven zur Anschauung zu bringen, und wenn zugleich die wohlberechtigte Forderung gestellt wird, dass diese Curven möglichst gleichmässig auf der Fläche verteilt sein sollen, so ist die Auswahl der auf dem Modelle ersichtlich zu machenden Curven keineswegs willkürlich.

Da nun die Flächen zweiten Grades die Eigenschaft haben, durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden zu können, so liegt der Gedanke nahe, bei der erwähnten Auswahl von der Forderung auszugehen, dass je zwei benachbarte der zur Anschauung zu bringenden Krümmungslinien der einen Schar und je zwei solche benachbarte Krümmungslinien der andern Schar auf dem Ellipsoid ein krummliniges Viereck begrenzen sollen, welches in gewissem Sinne einem Quadrate möglichst nahe kommt.

Die Unbestimmtheit, mit welcher diese Forderung behaftet zu sein scheint, verschwindet, sobald diejenige conforme Abbildung der Ellipsoidoberfläche auf eine Ebene ins Auge gefasst wird, bei welcher den Krümmungslinien des Ellipsoids gerade Linien der Ebene entsprechen.

Es entsteht auf diese Weise die Aufgabe, zu untersuchen:
„Wie muss ein Ellipsoid beschaffen sein, damit die Oberfläche desselben durch seine Hauptschnitte und eine endliche Anzahl seiner Krümmungslinien in eine endliche Anzahl solcher krummliniger Vierecke geteilt werden kann, welche sämtlich in Rücksicht auf die erwähnte conforme Abbildung Quadraten möglichst nahe kommen?“

Diese Frage hat Herr Dr. E. R. Neovius, Professor der Mathematik an der Universität zu Helsingfors, in einer Abhandlung beantwortet, welche unter dem Titel: „Anwendung der Theorie der elliptischen Func-

tionen auf eine die Krümmungslinien eines Ellipsoids betreffende Aufgabe" im Jahre 1885 im 15. Bande der Acta Societatis Scientiarum Fennicae veröffentlicht worden ist.

Gleichzeitig mit der erwähnten Abhandlung sind der Finnländischen Gesellschaft der Wissenschaften einige Modelle vorgelegt worden, durch welche das Ergebnis der angestellten Untersuchung für einen ausgewählten speciellen Fall in höchst instructiver Weise zur Anschauung gebracht wird.

Das Ellipsoid, dessen Constanten von Professor Neovius berechnet worden sind, ist durch folgende Festsetzungen bestimmt:

a. Die Halbaxen des Ellipsoids sollen die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden.

b. Die Fläche jedes Oktanten des Ellipsoids soll durch vier Krümmungslinien der den einschaligen confocalen Hyperboloiden entsprechenden Schar und fünf Krümmungslinien der den zweischaligen confocalen Hyperboloiden entsprechenden Schar in $5 \cdot 6 = 30$ krummlinige Vierecke zerlegt werden können, welche in dem angegebenen Sinne Quadraten möglichst nahe kommen.

Bei diesem Modelle lässt die durch die Verfolgung des angegebenen Gedankens erreichte Gleichmässigkeit der Verteilung der zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien kaum etwas zu wünschen übrig. In dieser Beziehung dürfte dieses Modell alle anderen bisher in den Handel gebrachten Ellipsoid-Metalle, auf denen Krümmungslinien zur Anschauung gebracht sind, übertreffen

Aus dem angegebenen Grunde eignet sich dieses Modell in vorzüglicher Weise auch zur anschauligen Erläuterung der Bedeutung des Satzes, dass die Oberfläche eines Ellipsoids durch die beiden Scharen der Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann

Die Hauptschnitte des Ellipsoids sind durch rote, die übrigen zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien sind durch schwarze Linien bezeichnet.

Die rechteckige Platte dient zur Veranschaulichung der conformen Abbildung der Oberfläche des durch das Modell Nr. 1 dargestellten Ellipsoids auf die doppelt zu denkende Fläche eines Rechtecks. Die Eckpunkte des Rechtecks entprechen den Nabelpunkten des Ellipsoids. Den Krümmungslinien des Ellipsoids entsprechen hierbei Parallelen zu den Seiten des Rechtecks.

Die Kugel stellt diejenige conforme Abbildung der Oberfläche des Ellipsoids auf eine Kugel dar, bei welcher den drei Hauptschnitten des Ellipsoids drei grösste Kreise der Kugel entsprechen.

Wegen der Einzelheiten, insbesondere bezüglich der Bestimmung der Werte derjenigen Constanten, welche bei der Herstellung der Modelle 1, 2 und 3 zu Grunde gelegt worden sind, wird auf die angeführte Abhandlung von Professo Neovius verwiesen.

Zu den Modellen gehört ein gemeinsamer **Holzuntersatz**, welcher dazu dient, diese in eine solche Lage zu bringen, dass die Mittelpunkte sich in gleicher Höhe befinden, während die Ebenen der drei einander entsprechenden Hauptschnitte parallele Lage erhalten.

Nr. 4—9 sind zunächst hergestellt in Exemplaren, welche sich in der unter Leitung von Herrn Professor H. A. Schwarz stehenden Königl. Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle der Universität Göttingen befinden. Die zu ihrer Herstellung erforderlichen Rechnungen und Zeichnungen sind von Herrn R. Haussner, Studiosus der Mathematik an der Universität Göttingen ausgeführt worden. Die Modelle 6—9 bilden eine Ergänzung zu den bisher in den Handel gebrachten Modellen von Flächen zweiten Grades und werden denjenigen Lehrern der höheren Mathematik gewiss höchst willkommen sein, die bei ihrem Unterrichte auf die Lehre von den confocalen Flächen zweiten Grades in mehr oder weniger ausführlicher Weise eingehen und den Wunsch haben, ihren Zuhörern die Gewinnung einer deutlichen Vorstellung der gegenseitigen Lage eines Ellipsoids und der beiden Arten der zu demselben confocalen Hyperboloide durch Anschauung geeigneter, in passenden Grössenverhältnissen ausgeführter Modelle zu erleichtern.

Die Modelle dieser Serie sind von Herrn Professor *H. A. Schwarz* der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegt worden.

Veröffentlicht 1888.

Serie XVII.

Gips-Modelle verschiedener Art.

Nr. 1.* **Modell einer Minimalfläche, welche eine Schar reeller Parabeln enthält,** deren Ebenen mit einer festen Ebene des Raumes einen constanten Winkel einschliessen. Modelliert unter Leitung von Professor Dr. *E. R. Neovius* von *Hj. Tallqvist*, Studierendem an der Universität zu Helsingfors. (Grösse des Gipsmodells 21×25 cm.) Mark 45.—.

„ 2. **Die sieben Haupttypen der ebenen Curven 3. Ordnung,** nach Möbius auf einer Kugel dargestellt. Unter Leitung von Professor Dr. *Brill* modelliert von cand math. *Dollinger* in Tübingen. Zwei Modelle in Gips. (Durchmesser 10 cm.) Preis zusammen Mark 12.—.

„ 3. **Flächen von constantem positiven Krümmungsmass** mit einem System ebener Krümmungslinien nach Enneper. Von Studienlehrer Dr. *Sievert* in Nürnberg. Zwei Modelle in Gips: Der elliptische und der cyclische Typus. (Grösse 16×16×8 u 16×15×14 cm.) Preis zusammen Mk. 21.—.

„ 4. **Modell der Catalan'schen Minimalfläche.** Modelliert unter Leitung von Professor Dr. *E. R. Neovius* von *J. Laine*, Studierendem an der Universität zu Helsingfors. (Grösse des Gipskörpers 22×22×14 cm.) Mark 45.—.

Modelle zur Functionentheorie,

angefertigt auf Veranlassung von Professor Dr. *Dyck* im mathematischen Institut der Kgl. technischen Hochschule in München. (8. Folge.)

Nr. 5. **Orthogonalsysteme auf der Kugel,** ausgeführt von Assistenten *J. Kleiber*. (Durchm. 15 cm.) Die Modelle geben quadratische Einteilungen auf der Kugel

a. u. b. durch zwei aufeinander senkrechte Kreissysteme mit zwei getrennten, bezw. zusammenfallenden Polen. Preis zusammen Mark 30.—.

c. durch zwei Scharen von aufeinander senkrechten Loxodromen. Mark 10.—.

„ 6. **Die den regulären Polyedern entsprechenden regulären Gebietseinteilungen auf der Kugel.** (Durchmesser 9 cm.) Die Modelle geben

a. den Tetraedertypus, Einteilung in 24 Dreiecke mit d. Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$. Mark 6.50.

b. den Oktaedertypus, Einteilung in 48 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$. Mark 8.—.

c. den Ikosaedertypus, Einteilung in 120 Dreiecke mit d. Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$. Mark 9.20.

Modelle zur Flächentheorie,

angefertigt unter Leitung von Professor Dr. *Dyck* und Professor Dr. *Finsterwalder* im mathematischen Institut der Kgl. technischen Hochschule in München. (8. Folge.)

Nr. 7*a, b, c, d. **Modelle für die verschiedenen Typen konischer Knotenpunkte mit Angabe des Verlaufes der parabolischen Curve und der Haupttangentencurven in der Umgebung dieser Punkte.** Ausgeführt von Professor *A. Sucharda* in Prag. Die vier dargestellten Typen konischer Knotenpunkte unterscheiden sich nach der Realität der sechs Schnittgeraden der durch die Glieder zweiter und dritter Ordnung gegebenen Näherungskegel. (Höhe ca. 20 cm.) Preis zusammen Mark 84.—.

Modelle zur mathematischen Physik,

angefertigt auf Veranlassung von Professor Dr. *F. Klein* in Göttingen von Oberlehrer Dr. *Schellenberg* in Mülheim a. d. R.

„ 8a u. b. **Modelle zur Darstellung der Gestaltsänderungen einer schwingenden Saite** (Fortpflanzung stehender Wellen). Die Modelle zeigen die Änderungen der Gestalt der schwingenden Saite mit der Zeit und zwar a) für die gezupfte, b)für die angeschlagene Saite. (Grösse 33×26×7 cm.) Preis für 8a Mark 18.—; für 8b Mark 23.—.

„ 9a, b u. c. **Modelle zur Theorie der Wärmeströmung in einem Stabe** (2 Modelle) **und in einem Ringe** (1 Modell). Die Modelle versinnlichen die Ausbreitung der ursprünglich in einem Punkte zugeführten Wärmemenge über den Stab (bezw. Ring) in ihrem zeitlichen Verlaufe. (Grösse 28×17×18 cm.) Preis für 9a Mark 18.—; für 9b Mark 20.50; für 9c Mark 23.—.

Modelle einiger Riemann'schen Flächen.

„ 10. **Zweiblättrige einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche,** welche in ihrem Innern einen Windungspunkt **erster** Ordnung enthält. Mk. 2.30.

„ 11. **Dreiblättrige einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche,** welche in ihrem Innern einen Windungspunkt **zweiter** Ordnung enthält. Mk. 2.30.

„ 12. **Dreifach zusammenhängende Riemann'sche Fläche** mit **einer** in sich zurückkehrenden Begrenzungslinie. (Siehe Riemann's Gesammelte mathematische Werke, herausgegeben von H. Weber, Seite 89, Figur 3.) Mark 3.50.

Preis der drei Modelle zusammen Mark 7.—.

„ 13. **Fläche, auf welcher das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird.** Von Dr. *K. Reinbeck* in Einbeck. Preis Mark 14.—.

Preis der ganzen Serie 375 Mark.

Nr. 1. Dieses Modell stellt diejenige Minimalfläche dar, welche durch geometrische Addition der gewöhnlichen Schraubenfläche und der sog. Catalan'schen Minimalfläche entsteht. Die Catalan'sche Fläche enthält bekanntlich eine Schar reeller Parabeln, deren Ebenen alle auf einer festen Ebene senkrecht stehen. Auf der Additionsfläche liegt ebenfalls eine Schar reeller Parabeln, deren Ebenen mit einer festen Ebene einen constanten, von 90^0 verschiedenen Winkel einschliessen. Für die durch das vorliegende Modell dargestellte Fläche beträgt die Grösse dieses Winkels 45^0. Durch die auf dem Modell dargestellten Parabeln und deren orthogonale Trajectorien wird die Eigenschaft der Fläche veranschaulicht, dass sie durch die beiden Curvenscharen in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann. Ausser diesen beiden Scharen ist noch die Scheitelcurve der Parabeln auf dem Modell zur Anschauung gebracht.

Nr. 2. Seine schönen Untersuchungen über Curven 3. Ordnung gründet bekanntlich Möbius nicht, wie dies Newton tut, auf die Betrachtung der Kegel dritter Ordnung, deren ebene Schnitte die collinear verwandten Typen ergeben, sondern auf die Schnittcurven dieser Kegel mit einer Kugel, deren Mittelpunkt sich in der Spitze des Kegels befindet. Die so erhaltenen sphärischen Curven haben vor den ebenen den Vorzug, alle gestaltlichen Eigentümlichkeiten der durch Projection aus einander ableitbaren Curvenarten in einem Bilde zu vereinigen.

Von Interesse ist die Spaltung des einen der fünf Newton'schen Typen in drei Unterarten, wie sie auf einer der beiden Kugeln dargestellt sind. Die andere Kugel weist die vier übrigen Typen auf.

Nr. 3. Die eine dieser Flächen bildet in gewisser Hinsicht das Gegenstück zu der Bianchi'schen Fläche von constantem negativen Krümmungsmass (Serie VIII, Nr. 1), während die andere den ersten Fall der allgemeinen Enneper'schen Flächen darstellt.

Nr. 4. Das Modell stellt die sog. Catalan'sche Minimalfläche dar. Diese Fläche gehört bekanntlich zu den Minimalflächen, welche eine Schar reeller Curven zweiten Grades enthalten, und zwar sind bei der Catalan'schen Fläche die Curven zweiten Grades Parabeln. Die Ebenen der Parabeln sind senkrecht auf einer festen Ebene, welche eine Symmetrieebene der Fläche ist. In dieser Symmetrieebene liegt eine von einer gewöhnlichen Cycloide gebildete geodätische Linie der Fläche. Die auf dem Modell dargestellten Parabeln und deren orthogonale Trajectorien veranschaulichen die Eigenschaft der Fläche, dass dieselbe durch die beiden Curvenscharen in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann.

Nr. 13. Das vorliegende Modell stellt diejenige Fläche dar, auf welche das Ellipsoid vermöge der punktweisen Zuordnung durch parallele Normalen in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet wird.

Das Modell soll die Eigenschaft dieser Fläche zur Anschauung bringen — soweit dieses überhaupt durch ein Modell möglich ist —, dass dieselbe durch die beiden Scharen ihrer Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann.

Ausserdem ist hervorzuheben, dass dieses Modell zugleich ein Hilfsmittel darbietet, um eine Vorstellung von der Gestalt derjenigen Flächen zu gewinnen, auf welche die übrigen Flächen zweiten Grades, d. h. die beiden Hyperboloide und die beiden Paraboloide durch parallele Normalen conform abgebildet werden.

Den Nummern 1—9 u. 13 ist ein erläuternder Text beigefügt.

Veröffentlicht 1886, 1888, 1891 u. 1898.

Serie XVIII.

Vier Faden-Modelle der Regelflächen dritten Grades,

angefertigt
an der Grossh. technischen Hochschule zu Karlsruhe
unter Leitung des Geh. Hofrats Professor Dr. Wiener
von
Assistenten **C. Tesch.**

Als Leitlinien der Regelflächen dritten Grades können dienen ein Kegelschnitt, als welcher ein Kreis gewählt wurde, eine den Kegelschnitt schneidende und eine ihn nicht schneidende Gerade. Es sind die vier Hauptfälle in den Modellen dargestellt.

Nr. 1.* Die eine der Leitgeraden schneidet die Ebene des Leitkegelschnittes innerhalb desselben. Mark. 30.—.
„ 2. Die eine der Leitgeraden schneidet die Ebene des Leitkegelschnittes ausserhalb desselben. Mark 30.—.
„ 3. Die eine der Leitgeraden schneidet die Ebene des in das Unendliche gerückten und durch einen Richtkegel bestimmten Leitkegelschnittes ausserhalb desselben. Mark 30.—.
„ 4.* Die beiden Leitgeraden fallen in eine den Leitkegelschnitt schneidende Gerade zusammen. Man erhält dadurch die Cayley'sche Fläche Mk. 30.—.

Preis der ganzen Serie 110 Mark.

Die Erzeugenden der Flächen sind durch schwächere, die Leitgeraden durch stärkere Fäden bezeichnet, und die Schnittpunkte beider durch Perlen hervorgehoben. Der Leitkreis ist durch Fäden seiner Ebene und durch Perlen veranschaulicht, welche in den Schnittpunkten dieser Fäden mit den Erzeugenden der Fläche aufgezogen sind. Der Richtkegel in dem dritten Falle ist durch seine Erzeugenden dargestellt.

Die den Kegelschnitt schneidende Leitgerade ist eine Doppellinie der Fläche, welche in dem ersten Falle in ihrem ganzen Verlaufe reell der Fläche als Doppellinie angehört, im zweiten und dritten Falle dagegen

nur zum Teil in dieser Weise, zum anderen Teil als isolierte Linie sich darstellt. In diesen Fällen treten in den Grenzpunkten dieser Teile Cuspidalpunkte auf, von denen reelle Kanten der Fläche ausgehen. Im zweiten Falle ist der zwischen den Cuspidalpunkten gelegene endliche Teil die reelle Doppellinie, der durch das Unendliche gehende Teil die isolierte Linie, im dritten Falle der endliche Teil der isolierte, der durch das Unendliche gehende Teil die reelle Doppellinie. Im vierten Falle bildet die einzige Leitgerade sowohl eine Doppellinie als auch eine Kante der Fläche.

Modelle dieser Art in grösseren Maßen befinden sich in der Sammlung der Grossh. technischen Hochschule zu Karlsruhe. Diejenigen des ersten und zweiten Falles wurden von *Heinr. Schaumkell* in den Jahren 1882 und 1883, dasjenige des vierten Falles von *Barth. Hendriks* im Jahre 1887 angefertigt. Der Verfasser unterzog sie auf Anregung des Geh. Hofrats Professor Dr. *Wiener* einer neuen Bearbeitung und construierte Modelle in kleineren Maßen in den Räumen von Würfeln von 20 cm. Seitenlänge.

Veröffentlicht 1891.

Serie XIX.

Zehn Modelle* zur Darstellung von regulären Gebietsteilungen des Raumes.

Von
Dr. **A. Schoenflies,**
Privatdocenten an der Universität zu Göttingen.

Eine reguläre Raumteilung ist eine solche Zerlegung des Raumes in lauter gleiche Bereiche, bei welcher jeder Bereich auf analoge Art von den Nachbarbereichen umgeben ist. Eine regelmässige Anordnung von Würfeln oder beliebigen Parallelepipeden bildet den einfachsten Fall derselben. Die Zahl derartiger Raumteilungen ist unbegrenzt gross.

Die Modelle dienen dazu, an einigen Beispielen die Art und Weise zu veranschaulichen, in welcher sich die Raumteilung aus den einzelnen Bereichen aufbaut.

Die Form der einzelnen Bereiche kann sehr mannigfaltig gewählt werden. Ihre Begrenzung unterliegt der Bedingung, gewisse gerade Linien zu enthalten, im übrigen ist sie in den meisten Fällen der verschiedensten Wandlungen fähig. Sie ist für alle Modelle möglichst einfach angenommen worden. Aus technischen Gründen empfiehlt es sich, nur ebene Grenzflächen zuzulassen; im theoretischen Interesse liegt es, die stets vorhandene Beziehung zu den Symmetrie-Axen und den Gestalten des Würfels und Quadrat-Oktaeders möglichst hervortreten zu lassen. Dies sind die Gesichtspunkte, welche für die den Bereichen aufgeprägten Formen massgebend gewesen sind.

Die Serie besteht aus **zehn verschiedenen Typen.** Von jedem Typus ist ein grösserer Block hergestellt, welcher die Anordnung der Bereiche deutlich erkennen lässt; er stellt denjenigen Körper dar, welcher durch vorschriftsmässige Zusammensetzung von ungefähr zwölf einzelnen

Bereichen entsteht. Um diesen Block nach den verschiedensten Richtungen vergrössern zu können, werden von jedem Typus ausserdem einige Einzelbereiche geliefert. Die Art, in welcher dieselben an den Block anzusetzen sind, ist, soweit nötig, kenntlich gemacht worden.

Die Serie dürfte nicht allein für das geometrische Problem der singulären Raumteilung von Interesse sein, sondern auch für die physikalischen, mineralogischen und sonstigen naturwissenschaftlichen Disciplinen, für welche die regelmässige Anordnung gleichartiger Molekeln theoretische Bedeutung besitzt.

Eine Abhandlung ist beigefügt.

Preis der ganzen Serie 160 Mark.

Auf Wunsch werden von jedem Modell-Typus weitere Einzelsteine zum Preise von je 50 Pfg. nachgeliefert.

Veröffentlicht 1891.

Serie XX.

Fünf Faden-Modelle der Regelschraubenflächen.

Die Modelle Nr. 1—3 sind nach den
an der Grossh. technischen Hochschule zu Karlsruhe
unter Leitung von Geh. Hofrat Professor Dr. Wiener
hergestellten Originalen
entworfen von
Assistenten **C. Tesch.**

Nr. 1a. **Die abwickelbare Schraubenfläche.** Es ist $\varepsilon = \sigma$; der Schnitt normal zur Axe ist eine gemeine Kreisevolvente. Mark 40.—

„ 1b Dieselbe Fläche aus Carton hergestellt. Mark 5.—.

„ 2. **Die verschlungene Regelschraubenfläche.** Es ist $\varepsilon < \sigma$; der Normalschnitt ist eine verschlungene Kreisevolvente. Mark 40.—.

„ 3. **Die geschweifte Regelschraubenfläche.** Es ist $\varepsilon > \sigma$; der Normalschnitt ist eine geschweifte Kreisevolvente. Mark 40.—.

„ 4. **Die gerade geschlossene Schraubenfläche** (Wendelfläche), bei der die Erzeugenden die Schraubenaxe senkrecht treffen. Mark 35.—.

„ 5. **Die schiefe geschlossene Schraubenfläche,** bei der die Erzeugenden die Schraubenaxe schief treffen. Mark 35.—.

Höhe der Modelle 22 cm.

Preis der ganzen Serie 185 Mark.

Wird eine Schraubenfläche durch eine Gerade erzeugt, die einer Schraubenbewegung unterworfen wird, so unterscheidet man dabei geschlossene und offene Schraubenflächen, je nachdem die geschraubte Gerade die Schraubenaxe trifft oder nicht trifft.

Nr. 1—3. Ist für eine offene Regelschraubenfläche σ der Steigungswinkel der Kehlschraubenlinie, ε der Neigungswinkel der Erzeugenden gegen eine zur Schraubenaxe normale Ebene, so sind die durch die Modelle 1—3 dargestellen Fälle durch die Bedingungen $\varepsilon = \sigma$, $\varepsilon < \sigma$ und $\varepsilon < \sigma$ unterschieden.

Die Erzeugenden der Flächen sind durch gelbe Fäden, die vorkommenden Doppellinien durch rote Fäden bezeichnet. Bei den Nummern 1 und 3 stellt ausserdem die aus einem Zinkstreifen gebildete Schraubenlinie des Gestelles eine Doppellinie dar.

Der abwickelbaren Schraubenfläche ist noch die Abwickelung beigegeben.

Nr. 4 u. 5. Diese Modelle stellen die geschlossenen Schraubenflächen dar, da sie gerade diejenigen Fälle ausmachen, die bei den in der Technik gebräuchlichen Schrauben zur Anwendung kommen. Der erste Fall kommt (in Verbindung mit cylindrischen Begrenzungen) bei Schrauben mit flachem Gewinde zur Verwendung, der zweite Fall bei Schrauben mit scharfem Gewinde.

Den Nummern 1—3 ist eine Abhandlung beigefügt.

Veröffentlicht 1891 u. 1898.

Serie XXI.

Faden-Modelle der abwickelbaren Flächen der Raumcurven vierter Ordnung zweiter Species.

Von

Dr. **Karl Rohn,**

Professor der Mathematik an der Königl. technischen Hochschule zu Dresden.

Nr. 1. **Raumcurve 4. Ord. mit 4 reellen Tangenten, die sie noch ausserdem schneiden; sie besitzt keine reellen Punkte mit Wendeebenen und liegt ganz im Endlichen.** Die Trisecanten schneiden die Curve, die ganz im Endlichen liegt, teils in drei, teils in einem reellen Punkte. Die abwickelbare Fläche liegt teils ausserhalb, teils innerhalb des Hyperboloids, das sie längs jener Tangenten durchdringt; ihre Doppelcurve liegt ganz ausserhalb und ruht mit vier Spitzen auf demselben auf. Die Raumcurve 4. Ord. kann als ebene Curve mit dreifachem, oder mit drei reellen Doppelpunkten, worunter auch einer oder zwei isoliert sein können, oder mit einem reellen und zwei conjugiert imaginären Doppelpunkten projiciert werden. Mark 64.—.

„ 2. **Raumcurve 4. Ord. mit 4 reellen Punkten mit Wendeebenen;** es gibt dann keine reellen, sie schneidenden Tangenten. Die Curve liegt ganz im Endlichen; alle Trisecanten treffen sie nur in einem reellen Punkte. Die abwickelbare Fläche liegt ganz ausserhalb des Hyperboloids; ihre Doppelcurve durchdringt das Hyperboloid in jenen vier Punkten, welche Pinchpoints für sie sind; die beiden Stücke der Doppelcurve im Innern des Hyperboloids verlaufen isoliert. Die Raumcurve 4 Ord. lässt sich als ebene Curve mit drei reellen Doppelpunkten, worunter auch einer oder zwei isoliert sein können, oder mit einem reellen und zwei conjugiert imaginären Doppelpunkten projicieren. Mark 54.—.

„ 3. **Raumcurve 4. Ord. ohne reelle Punkte mit Wendeebenen und ohne reelle, sie schneidende Tangenten.** Die Curve verläuft vier Mal durchs Unend liche und kann überhaupt nicht ganz ins Endliche gelegt werden. Die abwickelbare Fläche liegt ganz innerhalb des Hyperboloids; ihre Doppelcurve ist imaginär. Die Raumcurve projiciert sich mit dreifachem Punkte, oder mit drei reellen Doppelpunkten, von denen einer isoliert sein kann. Mark 30.—.

„ 4. **Raumcurve 4. Ord. mit zwei reellen Punkten mit Wendeebenen und zwei reellen, sie schneidenden Tangenten;** sie verläuft zwei Mal durchs Unendliche, kann aber ganz ins Endliche gebracht werden. Von dem Fundamentaltetraeder sind hier nur noch zwei Gegenkanten reell, von denen eine als Axe des Hyperboloids in der Ebene des Kehlkreises gewählt ist. Die Raumcurve ist nur noch in Bezug auf diese Axe symmetrisch. Die ab-

wickelbare Fläche liegt teils im Innern des Hyperboloids, teils ausserhalb; ihre Doppelcurve ruht in zwei Spitzen auf demselben und durchdringt es in zwei anderen Punkten; letztere sind wieder Pinchpoints der Fläche. Das Stück der Doppelcurve, welches ausserhalb des Hyperboloids sich befindet, verläuft isoliert. Mark 52.—.

Nr. 5. **Raumcurve 4. Ord. mit zwei Streckungspunkten,** in denen drei consecutive Curvenpunkte in gerader Linie liegen. Diese Curve ist speciell, sie bildet den Übergang von 1 nach 2. Die abwickelbare Fläche zeigt eine Doppelcurve von gleicher Beschaffenheit, wie die gegebene Raumcurve und ausserdem zwei Rückkehrgeraden, nämlich die Tangenten in den Streckungspunkten. Im Fall 1 vereinigen sich diese Rückkehrgeraden mit der Doppelcurve, wobei dann die Spitzen entstehen; im Fall 2 verschwinden sie. Mk. 48.—.

„ 6. **Specialfall des vorigen.** Die beiden Punkte mit Wendeebenen fallen mit den Schnittpunkten der beiden schneidenden Curventangenten zusammen. Natürlich ist auch diese Curve nur in Bezug auf eine Axe symmetrisch. Die abwickelbare Fläche besitzt eine dreifache Curve — im Modell ist sie ein Kreis —, die dadurch entsteht, dass im Fall 5 jede Spitze der Doppelcurve mit einem ihrer beiden Durchdringungspunkte (Pinchpoints der Fläche) zusammenrückt. Ein Teil des dreifachen Kreises liegt im Innern des Hyperboloids, durch ihn geht nur ein Flächenmantel, der andere Teil liegt aussserhalb und in ihm durchsetzen sich drei Flächenmäntel. Mark 49.—.

„ 7. **Raumcurve 4. Klasse, die aus No. 6 durch reciproke Raumtransformation abgeleitet ist;** sie liegt auf einem Kreiscylinder und besitzt zwei Spitzen. Die Erzeugenden ihrer abwickelbaren Fläche liegen zu drei und drei in den Tangentialebenen jenes Cylinders, und deren Doppelcurve ist wieder eine Raumcurve 4. Ord. Mark 49.—.

Äussere Begrenzung der Modelle 20 cm.

Preis der ganzen Serie [illegible] Mark 320

Von den Raumcurven 4. Ordnung erster Species und ihren abwickelbaren Flächen existieren bereits mehrfältig Fadenmodelle. Eine Modellierung der Raumcurven 4. Ordnung zweiter Species bietet indes in mancherlei Hinsicht noch grösseres Interesse als die vorerwähnten Raumcurven und scheint nur wegen der sich dabei darbietenden Schwierigkeiten bislang unterblieben zu sein. Einmal lassen sich die Curven 4. Ord. erster Species als Schnitt zweier Flächen 2. Grades (zweier Kegelflächen) leichter vorstellen und ihre verschiedenen Gestalten leichter übersehen, als dieses bei den Raumcurven 4. Ord. zweiter Species der Fall ist, die als teilweiser Schnitt eines Hyperboloids mit einer Fläche 3. Grades erscheinen. Zum andern ist der Reichtum der Gestalten bei letzteren grösser, als bei ersteren. Drittens zeigen sich bei letzteren Vorkommnisse, die bei ersteren nicht eintreten können, und die

besonders auf die Gestaltung der abwickelbaren Fläche und ihrer Doppelcurve von wesentlichem Einfluss sind. Es ist hier das Vorkommen von Curventangenten gemeint, die die Curve noch in einem weiteren Punkte schneiden.

Bei den Raumcurven 4. Ord. zweiter Species existiert ein Fundamentaltetraeder; in Bezug auf dieses gruppieren sich die Curvenpunkte zu je vier derart, dass ihre 6 Verbindungslinien die Gegenkanten des Tetraeders paarweise treffen und dass sie durch die Kanten harmonisch getrennt werden. Drei der Kanten des Tetraeders sind Doppelsecanten der Curve, sie schneiden sich in einer Tetraederecke, die wir als Hauptpunkt bezeichnen. Das Tetraeder ist zugleich Polartetraeder für das Hyperboloid, auf dem die Curve gelegen ist. Bei den Modellen 1, 2, 3 und 4 wurde nun ein Rotationshyperboloid, sein Mittelpunkt als Hauptpunkt und seine Axen als Doppelsecanten aus ihm gewählt. Es ist das keine Specialisierung, kann vielmehr aus der allgemeinen Lage durch räumliche Collineation abgeleitet werden. Zu jedem Curvenpunkte findet man dann drei weitere, indem man auf die Axen Lote fällt und diese um sich verlängert; d. h. dreht man die Curve um eine der drei Axen um 180^0, so nimmt sie wieder die nämliche räumliche Lage ein. Durch Verwendung dieser Symmetrieverhältnisse in Bezug auf die Axen gewinnt die Raumcurve und ihre abwickelbare Fläche ungemein an Übersichtlichkeit. Als Curvenpunkte von besonderer Bedeutung treten erstens die vier Punkte mit Wendeberührebenen (Ebenen mit vier consecutiven Curvenpunkten) auf. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche geht durch sie hindurch und sie erscheinen deshalb als Pinchpoints derselben. Zweitens gibt es vier Curventangenten, die die Curve noch in einem weiteren Punkte schneiden. Diese Punkte bilden Spitzen für die Doppelcurve, und längs jener Tangenten durchschneidet die abwickelbare Fläche das Hyperboloid.

Es mag noch erwähnt werden, dass von dem Hyperboloid, auf dem die Raumcurve liegt, bei den Modellen nur die Schar von Erzeugenden angegeben ist, welche Trisecanten derselben sind.

Eine Abhandlung wird beigefügt.

Veröffentlicht 1892.

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Serie XXII.

Drei Carton-Modelle über die Krümmung der Flächen.

Nach den an der Grossh. techn. Hochschule zu Karlsruhe unter Leitung von Geh. Hofrat Professor Dr. **Chr. Wiener** hergestellten Originalen entworfen von

Ingenieur **C. Tesch,**

früher Assistent der darstellenden Geometrie an der techn. Hochschule zu Karlsruhe.

Sind r_1 nnd r_2 die Hauptkrümmungsradien einer Fläche in einem gewissen Punkte, so sind für das Gauss'sche Krümmungsmass folgende drei Fälle zu unterscheiden:

Nr. 1. $\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} > 0.$ Die Krümmungskreise liegen auf derselben Seite der Berührungsebene.

„ 2. $\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = 0.$ Der eine der Hauptkrümmungskreise ist in eine Gerade übergegangen.

„ 3. $\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} < 0.$ Die Krümmungskreise liegen auf den entgegengesetzten Seiten der Berührungsebene.

Aus den passend gewählten Hauptkrümmungsradien sind für diese drei Fälle die Krümmungsradien von Normalschnitten in Abständen von 15^0 zu 15^0 bestimmt, und die Krümmungskreise durch Cartonscheiben in den Modellen zur Darstellung gebracht. Sie werden durch eine zweite Schar von Cartonscheiben, welche auf der Flächennormale senkrecht stehen, zusammengehalten.

Höhe der Modelle 18, $15^1/_2$ und $22^1/_2$ cm.

Eine kurze Abhandlung wird beigefügt.

Preis der ganzen Serie 16 Mark.

Veröffentlicht 1894.

Serie XXIII.

Einfache Modelle der Flächen zweiter Ordnung und des Cylindroids,
vorzugsweise zum Gebrauche für Studierende.

A. Gips-Modelle der Flächen zweiter Ordnung.

Diese stellen die fünf Fälle der nicht ausartenden Flächen zweiter Ordnung dar; auf jedem Modell ist eine Anzahl von Curven eingeritzt.

Nr. 1. **Das dreiaxige Ellipsoid** (Grösse 10×8×6 cm.);
a) mit den drei Ellipsen der drei Hauptschnitte und einer Anzahl ebener Schnitte, deren Ebenen auf der grössten Axe senkrecht stehen. Mk. 1.80.
b) mit Krümmungslinien. Mark 2.40.

„ 2.* **Das einschalige Hyperboloid** mit Geraden der beiden Scharen von Erzeugenden. Die Innenwandung des Modells enthält den Asymptotenkegel mit den beiden Hauptschnitten. (Höhe 12 cm.) Mark 2.60.

„ 3.* **Das zweischalige Hyperboloid** mit den Hauptschnitten und mit einer Schar paralleler ebener Schnitte, deren Ebenen auf der reellen Axe senkrecht stehen. Das Modell besitzt denselben Asymptotenkegel wie das vorige. Die beiden Schalen der Fläche sind durch Stäbchen in der richtigen Entfernung mit einander verbunden. (Höhe 12 cm.) Mark 2.60.

„ 4. **Das elliptische Paraboloid.** (Höhe 11 cm.) Mark 2.20.

„ 5. **Das hyperbolische Paraboloid.** (Grösse 9×7 1/2 cm.) Mark 2.20.
Auf Nr. 4 u. 5 sind die Hauptschnitte und eine Schar von ebenen Schnitten, deren Ebenen zur Paraboloidaxe senkrecht stehen, eingeritzt.

B. Faden-Modelle einiger einfachen Flächen
von Professor Dr. *H. Wiener* in Darmstadt.

„ 6. **Veränderliches Umdreh-Hyperboloid** mit zwei Scharen von Erzeugenden. (Durchmesser 10 cm.) Mark 3.20.
Das Modell stellt ein einschaliges Umdreh-Hyperboloid dar, das durch zwei gleich grosse Kreise begrenzt ist. Dadurch, dass die Schnittpunkte beider Scharen von Erzeugenden mit dem einen Begrenzungskreis festgehalten werden, während in dem anderen die Schnittpunkte der einen Schar gegen die der zweiten Schar gedreht werden, ändert das Hyperboloid seine Gestalt zwischen Cylinder und Kegel als Grenzlagen.

Nr. 7. **Raumcurve vierter Ordnung** mit unendlich fernem isolierten Doppelpunkt. (Grösse $11^1/_2 \times 12^1/_2$ cm.) Mark 6.20.
Diese Curve, die für die in den Nummern 8 bis 10 dargestellten Gebilde von Bedeutung ist, erscheint als Schnitt dreier Cylinder, von denen der eine ein Umdrehcylinder, die beiden anderen parabolische Cylinder sind. Die drei Cylinder sind in einem Messingrahmen durch Fäden dargestellt.

„ 8a* u. b. **Das rechtwinklige Paraboloid.** Preis je Mark 2.50.
Die Fläche ist durch die (schon in Nr. 7 dargestellte) Raumcurve begrenzt gedacht, in der sie von einem Umdrehcylinder getroffen wird, der dieselbe Axe wie das Parboloid besitzt. Das ganze Modell besteht aus einem diese Curve darstellenden durchbohrten Messingdraht, zwischen welchem Fäden als Bilder der beiden Scharen von Erzeugenden gezogen sind. Das Modell ist in zwei Ausführungen angefertigt
a. in der Höhe von 12 cm. und der Breite von 11 cm.
b. in der Höhe von $7^1/_2$ cm. und der Breite von 15 cm.
Bei a ist die Begrenzungscurve dieselbe wie bei Nr. 7; bei b ist sie durch Aufwickelung einer reinen Sinuslinie auf einem Umdreh-Cylinder entstanden gedacht, so dass sie sich nach zwei vollen Wellen schliesst.

„ 9a u. b. **Das Cylindroid (Plückersches Conoid).** Preis je Mark 2.50.
Das Modell besteht aus demselben Begrenzungsdraht, wie das vorige, nur mit anders eingezogenen Fäden. 9a stimmt in seiner Begrenzungscurve mit 8a, 9b mit 8b überein.

„ 10.* **Das Cylindroid und das rechtwinklige Paraboloid vereint.** Mark 5.80.
Das rechtwinklige Paraboloid ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Geraden gleichweit abstehen. Es hat zu unendlich vielen Geradenpaaren diese Lage, und diese sind die Erzeugenden eines Cylindroids. Das Modell gibt diese beiden Flächen in dieser Lage vereint wieder. Die Begrenzungen sind dieselben wie bei 8b und 9b.

Preis der ganzen Serie 38 Mark.

Für die Fadenmodelle sind auch passende Stative angefertigt, die auf Wunsch mitgeliefert werden.

Stativ Nr. 1. **Dreifuss** zum Aufhängen des Modells Nr. 6. Mark —.50.

„ „ 2. **Gestelle aus Draht** als Untersatz für die Modelle Nr. 8a, b. und 9a, b. je Mark —.30.

Zu den wichtigsten Bestandteilen der bis jetzt herausgegebenen Modelle gehören diejenigen Serien, welche die Modelle von Flächen zweiter Ordnung enthalten. Sind letztere doch durch ihre mannigfaltigen Formen und durch die Fülle schöner geometrischer Beziehungen vorzugsweise geeignet, dem Studierenden den Nutzen und die Bedeutung des Modells als wichtiges Unterrichtsmittel nahe zu legen und ihm hiermit rascher und sicherer über die Schwierigkeiten abstracter Theorien hinweg zu helfen. Wenn nun auch die Gips- und Fadenmodelle der III. und

IV. Serie zur Demonstration in den Hörsälen völlig ausreichen, so machte sich doch das Bedürfnis geltend, Modelle kleinerer Abmessung zu tunlichst billigem Preise herzustellen, um auch dem Studierenden deren Anschaffung zu ermöglichen. Durch die Güte des Herrn Professors *H. Wiener*, dessen Anregung diese Serie ihre Entstehung verdankt, wurden aus der reichen Sammlung seines Instituts die betreffenden Modelltypen der Verlagshandlung zur Vervielfältigung freundlichst überlassen. So entstand eine Reihe von kleinen, zierlichen Gips- und Fadenmodellen, die in dieser Art allgemeinen Anklang gefunden haben.

Veröffentlicht 1898.

Serie XXIV.

Kinematische Modelle

herausgegeben
von Professor Dr. **Fr. Schilling** in Göttingen.

I. Gruppe.

Nr. 1.* Erzeugung der **Epitrochoiden** als solche mit **freiem** Centrum. Mk. 56.—.
„ 2. Erzeugung der **Epitrochoiden** als solche mit **bedecktem** Centrum. „ 67.—.
„ 3. Erzeugung der **Hypotrochoiden** als solche mit **freiem** Centrum „ 59.—.
„ 4. Erzeugung der **Hypotrochoiden** als solche mit **bedecktem** Centrum. „ 64.—.

II. Gruppe.

„ 5. Erzeugung von **Ellipsen und Strecken** . . . . . Mk. 59.—.
„ 6. Erzeugung von **Kreisevolventen** . . . . . „ 66.—.
„ 7. Erzeugung von **Cycloiden** . . . . . „ 58.—.

III. Gruppe.

„ 8 **Gleichläufiges Zwillingskurbelgetriebe** . . . . . Mk. 20.—.
„ 9.* **Gegenläufiges Zwillingskurbelgetriebe** . . . . . „ 24.—.

IV. Gruppe.

„ 10.* Inversor von **Peaucellier** . . . . . Mk. 22.—.
„ 11. Inversor von **Hart** . . . . . „ 22.—.
„ 12. Inversor von **Sylvester-Kempe** . . . . . „ 28.—.

Grösse der Modelle ca. 22×27 cm.

Preis der ganzen Serie 545 Mark.

Mit diesen Modellen hat Herr Professor Schilling den Gedanken zu verwirklichen begonnen, der auf der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Frankfurt (1896) unter allseitiger lebhafter Zustimmung ausgesprochen wurde: es möge eine Sammlung einfacher kinematischer Modelle herausgegeben werden, welche die wichtigsten Mechanismen derart zur Anschauung bringt, dass der mathematische Grundgedanke überall deutlich hervortritt. Die Originalmodelle der

Sammlung haben der Versammlung in Düsseldorf (1898) vorgelegen und den vollen Beifall der Teilnehmer gefunden.

Der bequemen Übersicht wegen sind die Modelle in vier Gruppen geordnet.

Die vier Modelle der ersten Gruppe stellen die Erzeugung der allgemeinen cyclischen Curven durch Abrollung eines beweglichen Kreises auf einem festen Kreise dar. Je zwei einander entsprechende Modelle zeigen neben anderen Eigenschaften die bekannte doppelte Entstehungsweise der Epitrochoiden und Hypotrochoiden.

Die drei Modelle der zweiten Gruppe repräsentieren die speciellen Fälle der cyclischen Curven. Sie zeigen die Erzeugung von Ellipsen und Strecken durch Abrollung eines Kreises in einem solchen von doppeltem Radius, die Erzeugung von verschlungenen, gespitzten und gestreckten Kreisevolventen und Cycloiden durch Abrollung einer Geraden auf einem Kreise oder eines Kreises auf einer Geraden.

Die dritte Gruppe zeigt in zwei Modellen das sogenannte gleichläufige und das gegenläufige Zwillingskurbelgetriebe mit ihren Polbahnen, zwei congruenten Ellipsen oder Hyperbeln.

Die vierte Gruppe endlich veranschaulicht in drei Modellen die Inversoren von Peaucellier, Hart und Sylvester-Kempe. Durch eine einfache Einrichtung wird in jedem Apparat einer der einander zugeordneten Punkte auf einem Bogen entweder eines durch das Inversionscentrum gehenden Kreises oder eines das letztere einschliessenden Kreises geführt, sodass der zugeordnete Punkt entweder eine Strecke oder ebenfalls einen Kreisbogen beschreibt.

Eine eingehende Beschreibung der Modelle mit Abbildungen ist in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 1899, Heft 4, erschienen.

Eine ausführliche Abhandlung wird beigefügt.

Veröffentlicht 1898.

Serie XXV.

Sieben Faden-Modelle der Kegel dritter Ordnung

von

Professor Dr. **H. Wiener** in Darmstadt.

A. Kegel vom Geschlechte Null.

Nr. 1.*	1.	Kegel mit Rückkehrkante (von der dritten Klasse).	Mk. 18.—.
	2.	Kegel mit Doppelkante (von der vierten Klasse), die	
„ 2.		a. als Selbstschnitt, ...	„ 18.—.
„ 3.		b. als isolierte Doppelkante auftritt.	„ 20.—.

B. Kegel vom Geschlechte Eins
(von der sechsten Klasse).

„ 4.*	1.	aus einem paaren und unpaaren Mantel bestehend; . .	„ 20.—.
	2.	aus einem einzigen unpaaren Mantel bestehend,	
„ 5.		a. in Dreikantslage, ...	„ 16.—.
„ 6.*		b. in Vierkantslage, ...	„ 20.—.
„ 7.		c. mit drei durch eine Gerade gehenden Wendeberührebenen.	„ 16.—.

Höhe der Modelle 17 cm.

Preis der ganzen Serie 128 Mark.

Eine Einteilung der ebenen Curven dritter Ordnung, wie sie der Unterscheidung der Curven zweiter Ordnung in Ellipse, Hyperbel und Parabel entspricht, hat zuerst *Newton* unternommen. Indem er die verschiedenen Gestalten ihrer Gleichung untersucht, wird er auf 72 verschiedene Curvenarten geführt, von denen er nebenbei bemerkt, dass sie sich aus fünf besonderen Curven, den „divergierenden Parabeln" durch Projection ableiten lassen. Nach ihm griff *Möbius* die Aufgabe wieder auf; er verzichtet aber gänzlich auf eine genauere Einteilung der Curven in Arten und will nur die wichtigsten Gattungen feststellen, aus denen

durch Projection alle übrigen gewonnen werden können. Um keine einzelne vor den anderen gleichberechtigten auszuzeichnen, setzt er an die Stelle der Curven die projicierenden Kegel und unterscheidet von diesen 7 Gattungen.

Ist das Geschlecht der Curven also auch der projicierenden Kegel, gleich Null, so gibt es nur drei projectiv verschiedene Gestalten von Kegeln, während es für das Geschlecht Eins deren unendlich viele gibt. Aber unter den letzteren sind doch wesentliche Unterschiede in der Gestalt vorhanden. So kann ein solcher Kegel entweder allein aus einem unpaaren Mantel oder aus einem solchen und einem hinzutretenden paaren Mantel bestehen, und man wird bei Berücksichtigung dieses Unterschiedes zwei Gattungen von Kegeln vom Geschlechte Eins zu unterscheiden haben, die zusammen mit den drei Gattungen vom Geschlechte Null den 5 Newton'schen Parabeln entsprechen. Aber unter den einmanteligen Kegeln vom Geschlechte Eins gibt es noch einen ausgezeichneten, bei dem nämlich die drei Berührebenen der Wendekanten durch eine Gerade hindurchgehen, und dieser ist ein Zwischenglied zwischen solchen, bei denen der Kegelmantel sich entweder durch drei Dreikante oder durch drei Vierkante hindurchwindet, die durch jene drei Berührebenen und die Ebene der drei Wendekanten begrenzt werden. So kommt man mit *Möbius* zu den 7 Gattungen von Kegeln, die durch die vorliegenden Fadenmodelle dargestellt werden. Diese Modelle sollen also auch hauptsächlich dem Studium der Curven dritter Ordnung dienen, insofern es diejenigen Gestalten betrifft, die durch ihr Verhalten gegen die unendlich ferne Gerade bedingt sind. Legt man irgend eine schneidende Ebene durch einen der 7 Kegel dritter Ordnung, so erhält man eine Schnittcurve, die drei unendlich ferne Punkte besitzt. Von diesen können sein:

a. alle drei getrennt, und zwar
   α. alle drei reell,
   β. einer reell und zwei conjugiert imaginär;
b. zwei zusammenfallend und einer davon getrennt,
c. alle drei in einen einzigen zusammenfallend.

Dabei kann das Zusammenfallen zweier Punkte bei b und c verschiedene Ursache haben, je nachdem die unendlich ferne Gerade die Curve berührt oder durch einen Doppelpunkt geht.

Diese Unterschiede ergeben eine gewisse Einteilung der Curven in Arten, denen eine feinere Teilung in Unterarten noch folgen kann; und je nachdem die Teilung mehr oder weniger weit verfolgt wird, er-

hält man auch verschiedene Anzahlen von Curvengestalten. So zählt *Newton* deren 72, bei denen aber (trotz seiner Einteilung in 5 Parabeln) alle 7 Kegel zur Verwendung kommen, *Plücker* zählt 216 Arten, *Salmon* unter Zugrundelegung der 5-Teilung 30 Unterarten.

Will man an den Modellen die Gestalt der Schnittcurve irgend einer gedachten Ebene erkennen, so lege man durch die Kegelmitte eine Parallelebene. Aus der Art des Schnittes der letzteren geht die Art, Zahl und Richtung der Asymptoten (reelle, imaginäre, parabolische) der Schnittcurve hervor, und daraus lässt sich die Gestalt der Curve selbst ohne weiteres absehen.

Die Kegel selbst verdienen insbesondere auch als einfache Beispiele von Kegeln unpaarer Ordnung Beachtung. Ein Strahl, der einen solchen erzeugt, kehrt dabei nicht in gleichem, sondern in umgekehrtem Sinne in die Anfangslage zurück. Bei projectiver Auffassung zerlegt ein unpaarer Kegel, der sich nicht selbst durchsetzt, den Raum nicht in zwei Gebiete, und seine Fläche dient als Beispiel einer einseitigen Fläche im Möbius'schen Sinne.

Der Anschaulichkeit halber sind die Kegel mit möglichst vielen Symmetrie-Ebenen und -Axen ausgestattet, je eine in Nr. 1 und 2, je drei in Nr. 3 bis 7.

Eine ausführliche Abhandlung wird beigefügt.

Veröffentlicht 1899.

Serie XXVI, A—C.

Hilfsmittel für den Unterricht in darstellender und projectiver Geometrie.

A. Zehn Gips-Modelle architektonischer Polyeder

von

Dr. **Guido Hauck,**
† Professor an der Königl. technischen Hochschule in Berlin.

Nr. 1. **Einfaches Grabkreuz.**	Nr. 6. **Achtseitige Säule.**
„ 2.* **Gothisches Grabkreuz.**	„ 7. **Romanische Säule.**
„ 3. **Denkstein.**	„ 8. **Brunnensäule.**
„ 4.* **Warttürmchen.**	„ 9. **Achtseitiges Türmchen.**
„ 5.* **Gruftbau.**	„ 10.* **Sechsseitiges Türmchen.**

Höhe der Modelle 22—26 cm.

Einzelne Nummern 14 Mark.

Preis der ganzen Abteilung 130 Mark.

Zum Schutze der Modelle, insbesondere gegen Staub, sind passende **Glasglocken mit Holzuntersätzen** zum Einzelpreise von Mk. 2.75 bis 8.50, je nach Grösse, hergestellt, deren Anschaffung sich empfiehlt, da die Modelle meistens auch während der Benutzung in den Zeichensälen unter den Glocken stehen bleiben können und so erheblich geschont werden.

Billige Ausgabe dieser Modelle.

Die Modelle dieser billigen Ausgabe sind aus gewöhnlichem Gips hergestellt und grau angestrichen.

Einzelne Nummern Mark 5.—.

Bei gleichzeitiger Abnahme von mindestens 10 Modellen derselben oder auch verschiedener Nummern

Preis pro Stück Mark 4.50.

Die Herstellung dieser billigen Ausgabe verdankt noch einer Anregung des verstorbenen Professors *Hauck* ihre Entstehung. Es hat sich gezeigt, dass die Modelle ihren Zweck am besten erfüllen, wenn sie dem Schüler in die Hand ge-

geben werden, so dass er sie drehen und wenden, stellen und legen kann. Freilich wird auf diese Weise die Lebensdauer des einzelnen Modelles beschränkt, denn es wird sich kaum vermeiden lassen, dass im Gebrauch hin und wieder Ecken abgestossen werden. Doch dürfte der pädagogische Vorteil, der sich bei diesem Verfahren ergibt, die geringen Kosten einer Neuanschaffung einzelner Nummern, die im Laufe der Zeit unbrauchbar geworden sind, voll aufwiegen.

Damit die Modelle gegen Staub weniger empfindlich sind, haben sie einen grauen Anstrich erhalten und lassen sich zudem noch abwaschen.

Die unten wiedergegebene kurze Anleitung zum Gebrauch der Modelle wird jeder der beiden Ausgaben in zwei Exemplaren beigefügt, von denen eins zum Aufhängen auf Pappe gezogen ist.

B. Acht Modelle,

herausgegeben von

Professor Dr. **Fr. Schilling** in Göttingen.

Nr. 11a.* **Grosse Projectionstafel** mit zwei Hilfstafeln, 8 Stahlstäben, 4 mit Messingkugel an einem Ende, 4 an beiden Enden spitz, und 10 Korkkugeln. (Grösse 110×90 cm.) Mark 100.—.

„ 11b. **Festes Gestell** zum Aufhängen der Tafel. Mark 22.—.

„ 12. **Kleine Projectionstafel** aus Pappe mit Schiefertafelpapier bezogen. (Grösse 52×45 cm.) Mark 5.—.

„ 13.* **Durchdringung von Pyramide und Prisma.** (Grösse 68×48×50 cm.) Mark 30.—.

„ 14. **Gerader Kreiscylinder** mit elliptischem Schnitt nebst 10 Bogen Papier, um die Abwickelung der Schnittkurve darzustellen. (Höhe 42 cm Durchmesser 24 cm.) Mark 12.—.

„ 15. **Zwei congruente Ellipsen** mit gemeinsamer kleiner Axe, sich rechtwinklich schneidend, dem vorigen Modell entsprechend. Mark 12.—.

„ 16.* **Drei Schraubenlinien** derselben Ganghöhe mit gemeinsamer Axe. (Höhe 70 cm.) Mark 70.—.

„ 17. **Einzelne Schraubenlinie** mit 5 Windungen. (Höhe 50 cm.) Mark 7.50.

„ 18.* **Projective Erzeugung der Kegelschnitte.** (Grösse 70×52 cm.) Mk. 75.—.

C. Fünf Modelle,

herausgegeben von

Dr. **Fr. Schilling,**

Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in Danzig.

Nr. 19a.* **Kugel, Durchmesser 35 cm.,** mit schwarzem Tafelanstrich, einem Holzringe als Untersatz und einem biegsamen Lineal mit Gradeinteilung zum Abtragen gegebener Winkel auf den grössten Kreisen. Mark 19.—.

b.* **Ringgestell** hierzu zum Einzeichnen der grössten Kreise. Mark 18.—.

c.* **vier Ringe** zum Einzeichnen kleinerer Kreise. Mark 6.20.

Nr. 20a. **Kugel, Durchmesser 14 cm.,** mit schwarzem Tafelanstrich und einem Holzringe als Untersatz. Mark 4.50.
b. **Ringgestell** hierzu zum Einzeichnen der grössten Kreise. Mark 6.50.
c. **ein Ring** zum Einzeichnen eines kleineren Kreises. Mark 1.20.
„ 21a **Kugel, Durchmesser 10 cm.,** mit schwarzem Tafelanstrich und einem Holzringe als Untersatz. Mark 2.50.
b. **Ringgestell** hierzu zum Einzeichnen der grössten Kreise. Mark 6.—.
c. **ein Ring** zum Einzeichnen eines kleineren Kreises. Mark 1.—.
„ 22. **Einschaliges Rotationshyperboloid mit Asymptotenkegel.** (Grösse 32×32×40,5 cm.) Mark 48.—.
„ 23. **Einschaliges allgemeines Hyperboloid mit Asymptotenkegel.** (Grösse 36×29×40,5 cm.) Mark 48.—.

Modelle Nr. 1—10. Für den Anfangsunterricht in der darstellenden Geometrie besteht eine überaus wichtige und fruchtbare Übung, um das Verständnis für die Darstellung in Grund- und Aufriss zu fördern, darin, dass dem Schüler das Modell eines Körpers in die Hand gegeben und ihm die Aufgabe gestellt wird, davon in vorgeschriebener Stellung den Grundriss und Aufriss zu zeichnen. Es werden hierfür meist die elementaren stereometrischen Körper, namentlich die regulären Polyeder, verwendet. Der Bestand derselben ist aber ein recht spärlicher; auch sind sie vermöge ihrer durchgängigen Convexität zu gleichartig und zu einfach. Eine Folge hiervon ist die häufig beobachtete Erscheinung, dass Schüler, die in der theoretischen Projectionslehre Tüchtiges leisten, mitunter nicht imstande sind, die einfachsten architektonischen Grundrisse zu verstehen und aus dem Grundriss und Aufriss das räumliche Object sich zur inneren Vorstellung zu bringen. Gewiss werden Prismen, Pyramiden, Obelisken u. s. w. immer den Grundstock des Übungsstoffes bilden müssen. Aber doch erscheint die Herbeiziehung von reicher gegliederten Polyederformen für den angegebenen Zweck höchst wünschenswert. Denselben muss eine gewisse Regelmässigkeit im Aufbau zukommen; die Beschränkung auf durchgängige Convexität der Flächenwinkel muss aber aufgegeben werden. Modelle dieser Art können leicht durch geometrische Stilisierung von architektonischen Motiven gewonnen werden. Eine Auswahl solcher enthält die vorliegende Sammlung von 10 Modellen.

Beim Aufnehmen dieser Modelle in Grund- und Aufriss wird man im allgemeinen in der Art vorgehen, dass man zuerst die geometrische Form der Grundrissfigur in freihändiger Skizzierung zu ergründen sucht und dann an der gewonnenen Skizze in Erwägung zieht, welche Abmessungen am Modell erforderlich sind, um die Figur geometrisch exact

construieren zu können. Ist hierauf der Grundriss aufgezeichnet, so erfolgt die Construction des Aufrisses durch Ziehen der Grundlote und Auftragen der Höhen auf ihnen, wobei der jedesmalige Höhenunterschied zwischen zwei Punkten ermittelt wird als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete die Grundrissprojection der Verbindungsstrecke der zwei Punkte und dessen Hypotenuse die am Modell abzumessende wahre Länge der Verbindungsstrecke ist.

Die sich etwa anschliessenden weiteren Übungen (wie Herstellung des Seitenrisses, eventuell des Diagonalrisses, ebener Schnitte, der Cavalierperspective, der malerischen Perspective, Schattenconstructionen u. s. w.) sind dann ohne Zuhilfenahme des Modells auszuführen, mit blosser Benutzung des Grundrisses und Aufrisses, aus welchen der Schüler lernen muss, sich die plastische Form in seiner inneren Anschauung zu vergegenwärtigen. Nur beim Eintreten von grösseren Vorstellungsschwierigkeiten mag das Modell als ultima ratio — und auch dann nur vorübergehend — zu Rate gezogen werden.

Modelle Nr. 11—18. Diese Modelle für den Unterricht in darstellender und projectiver Geometrie zeigen ein ganz anderes Gepräge, als die sonst wohl bisher erschienenen Modelle ähnlicher Art. Ihre Herausgabe war eben wesentlich durch den Umstand veranlasst, dass es an solchen in hinlänglich grossem Massstabe ausgeführten Modellen, die auch in sehr grossen Auditorien mit Vorteil benutzt werden können, bisher gänzlich fehlt. Die Modelle zeigen nicht besonders schwer vorzustellende geometrische Gebilde; aber jeder Lehrer der darstellenden Geometrie weiss, welche grosse Schwierigkeit einerseits selbst einfache Dinge dem Anfänger bei der rein sinnlichen Vorstellung bereiten, wie überaus leichter und schärfer andererseits sich die Ausdrucksweise des Vortrages gestalten lässt, wie viel einfacher sich die gewünschte geometrische Vorstellung bei den Zuhörern erwecken lässt, wenn man Hilfsmittel zur Hand hat, an die man die Erläuterung unmittelbar anknüpfen kann. Wie viel leichter lassen sich z. B. schon die Grundvorstellungen schildern, die sich auf die Grund- und Aufrisstafeln beziehen, wenn ein geeignetes, bewegliches Tafelmodell bei der Erklärung benutzt werden kann.

Die vorliegenden Modelle dürften, ebenso wie die der ersten Abteilung dieser Serie, gerade jetzt um so gelegener kommen, wo auch an den Universitäten die darstellende Geometrie als regelmässiger Lehrgegenstand ihre Einführung findet. Im folgenden seien der Reihe nach kurz die einzelnen Modelle besprochen und ihre Anwendungsweisen erläutert.

Modell Nr. 11a. Die grosse Projectionstafel, nach Art der Schulwandtafeln hergestellt, besteht aus zwei Teilen, welche der ersten und der zweiten Tafel des Grund- und Aufrissverfahrens entsprechend im rechten Winkel gegeneinander eingestellt werden können, und zwar mittelst selbsttätigen Einschnappens eines Hebels. Gerade diese Tafel dürfte ganz besonders gute Dienste im Unterricht leisten. Der Tafel selbst werden noch zwei kleinere Hilfstafeln beigegeben, die in die grosse leicht eingesetzt werden können. Von diesen stellt die eine die Seitenrissebene dar, die dann ebenfalls umgeklappt werden kann und überdies eine Vorrichtung trägt, um genau im rechten Winkel gegen die Grund- und Aufrisstafeln eingestellt werden zu können. Die andere Hilfstafel stellt eine allgemein gelegene Ebene dar und ist um ihre erste Spur in die erste Tafel umlegbar. Endlich gehören zu der ganzen Vorrichtung noch acht Stahlstäbe, von denen vier einerseits zur Darstellung von Punkten in Messingknöpfe endigen, während die übrigen zur Darstellung von Geraden beiderseits in Spitzen auslaufen und somit leicht in jede beliebige Lage in die Projectionstafel eingesetzt werden können. Die zweite Hilfstafel besitzt ungefähr in der Mitte noch eine Durchbohrung, um jeden der Stäbe hier einsetzen zu können. Beigegeben sind den Stäben noch mehrere durchlochte Korkkugeln, welche zur Bezeichnung von Punkten dienen sollen.

Modell Nr. 11b. Das Gestell dient zum Aufhängen der Projectionstafel. Es bietet den Vorteil, dass man die Tafel an jeder beliebigen Stelle des Hörsales aufstellen kann. Man kann die Tafel aber auch fest an die Wand oder mit geeigneten übergreifenden Haken über andere Tafeln des Hörsales aufhängen.

Über die überaus vielseitige Benutzung dieser Projectionstafel brauchen wir kaum zu sprechen. Alle die Vorlesung einleitenden Elementaraufgaben, die sich auf die mannigfache Verknüpfung von Punkten, Geraden und Ebenen (Schnitte zwischen Geraden und Ebenen, Neigungen derselben gegen die Tafeln, Hauptlinien der Ebene, kürzesten Abstand zweier Geraden und so fort) beziehen, finden in denkbar einfachster Weise durch die geeignet zusammengestellte Projectionstafel ihre unmittelbare Veranschaulichung. Um von weiteren Aufgaben, für deren Erläuterung die Tafel sich als bequemes Hilfsmittel erweist, noch etwas zu nennen, sei z. B. an die Projectionen des Kreises in allgemeiner Lage und an die Schattenconstructionen beliebiger Körper erinnert, deren Modelle sich auf die erste Tafel aufsetzen lassen.

Modell Nr. 12. Der grossen Projectionstafel ist noch ein kleines Modell aus Pappe hinzugefügt, welches gleichfalls die Grund- und Aufrisstafeln und ihre Umklappung in eine Ebene darstellen soll, wobei jedoch die Tafeln über ihre Schnittlinie hinaus sich erstrecken. Dies Modell findet z. B. auch sehr gute Anwendung für die Erläuterung der Affinität und centralen Collineation, d. h. für die Beziehung zweier Ebenen auf einander entweder durch Parallelstrahlen oder durch Strahlen von einem im Endlichen gelegenen Punkte aus.

Modell Nr. 13 stellt die Durchdringung eines fünfseitigen Prismas und einer dreiseitigen Pyramide dar. Ersteres ist leicht abzuheben und zeigt dann besonders deutlich die Schnittlinie beider Körper, die auch auf der Pyramide eingezeichnet ist, und den ihnen gemeinsamen Raumteil.

Modell Nr. 14, ein gerader Kreiscylinder mit elliptischem Schnitt, ist so eingerichtet, dass der obere Teil gegen den unteren gedreht werden kann. Bei halber Umdrehung veranschaulicht das Modell den mathematischen Gedanken bei dem einfachen Kreuzgewölbe, zwei sich doppelt berührende gerade Kreiscylinder mit rechtwinkligen Axen. Dem Modell beigegeben sind noch zehn Bogen Papier. Wird ein solcher auf den Cylinder aufgerollt und dann längs der Schnittcurve mit einem scharfen Messer eingeschnitten, so gibt er abgenommen die Abwickelung der Schnittcurve mit mehreren Perioden, die affine Curve einer einfachen Sinuslinie. Diese einfache Methode ist wohl zuerst von Herrn Hermann Wiener in Darmstadt beim Unterricht angewandt worden.

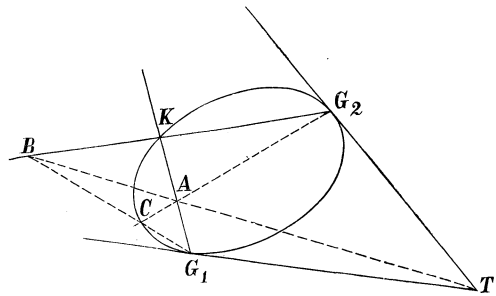
Modell Nr. 15. Um die vollständige Schnittcurve bei dem soeben beschriebenen Kreuzgewölbe besser übersehen zu können, ist diese als Ergänzung des vorigen Modells aus starkem Aluminiumdraht für sich dargestellt. Das Modell vor die Wandtafel haltend, erkennt man bei der Drehung desselben die verschiedenen Projectionen der Schnittcurve (scheinbare Doppelpunkte), wenn man es nicht vorzieht, das Modell in den Lichtkegel eines Skioptikons zu halten und so auf dessen Schirm zu projicieren.

Modell Nr. 16. Dieses zeigt drei gewöhnliche Schraubenlinien mit derselben Axe und Ganghöhe und zwar in zwei vollen Windungen. Die Schraubenlinien selbst sind aus Messingdraht, die Axe und Speichen aus vernickeltem Eisendraht sorgfältig hergestellt. Wird es vor die Wandtafel gehalten, so lassen sich sowohl die senkrecht zur Axe und Tafel ausgeführten Projectionen der verschiedenen Schraubenlinien als affine Curven derselben Sinuslinie, wie ihre schiefen Parallelprojectionen als affine Curven

von Cycloiden veranschaulichen. Im letzteren Falle ist es besonders lehrreich, das Modell so anzusehen, dass die mittlere Schraubenlinie sich in der Projection als affine Curve einer Cycloide mit Spitzen darstellt, wobei dann die äussere als solche einer verschlungenen, die innere als solche einer gestreckten Cycloide dem Auge erscheint. Dass das Modell auch in manchen anderen Disciplinen, z. B. in der Theorie der Raumcurven, in der Kinematik und in der Lehre vom Nullsystem gute Verwendung findet, sei nur nebenbei bemerkt.

Modell Nr. 17. Es schien wünschenswert, noch eine einzelne Schraubenlinie für sich darzustellen, doch nun mit sehr vielen Windungen. Die Ausführung und Verwendung dieses Modelles ist analog wie beim vorigen.

Modell Nr. 18 veranschaulicht die allgemeine procjective Erzeugung der Kegelschnitte, speciell einer Ellipse. Auf einem Reissbrett, dessen Zeichenblatt zunächst die ausgezogenen Linien der nebenstehenden Figur in der Grösse des Modelles zeigt, sind in den vier Punkten T, G_1, G_2, K kleine Säulen angebracht, welche den Tangenten TG_1, TG_2 und den Geraden KG_1, KG_2 entsprechend feste Stäbe aus Stahl tragen. Ausserdem sind noch aus Messing zwei weitere Stäbe G_1B und G_2A um die den Punkten G_1 und G_2 entsprechenden Zapfen drehbar, und ein dritter Stab TAB um den dem Punkt T entsprechenden Zapfen drehbar angebracht in der Anordnung, wie sie in der Figur gestrichelt eingezeichnet ist. An den Schnittpunkten A und B befinden sich zwei kleine Griffe; an diese anfassend, kann man leicht die beweglichen Stäbe drehen, deren gegenseitige Bewegung mit Hilfe von mehrfachen längs den Geraden gleitenden Prismenführungen sich von selbst regelt. An der Stelle C ist dann ein in eine Spitze auslaufender Stift angebracht, der hierbei auf der Ellipse entlang gleitet. Naturgemäss lässt sich nur ein Teil der Ellipse durch den Stift beschreiben. Bei der Construction des Modelles ist besondere Sorgfalt darauf verwandt, dass die technischen Nebenteile durchaus nicht den mathematischen Gedanken verdunkeln.



Zur mathematischen Erläuterung sei nur bemerkt, dass die Punktreihen (A) und (B) der Geraden KG_1 und KG_2 von T aus durch die Gerade TAB perspectiv auf einander bezogen, und bez. von G_2

und G_1 aus dann durch projective Strahlbüschel $(G_2 A)$ und $(G_1 B)$ projiciert werden, deren entsprechende Strahlen sich in C schneiden. Diese Erzeugung des Kegelschnittes lässt unmittelbar den speciellen Fall des Pascalschen Satzes erkennen, bei dem zwei Gegenseiten des Sechsecks in Tangenten ausgeartet sind, wie die Figur zeigt, in der TAB die Pascalsche Gerade ist.

Modelle Nr. 19—23. Die Modelle 19—21 der drei Kugeln in den verschiedenen Grössen gestatten wie auf einer Wandtafel leicht die Anwendung von Kreide und Schwamm zum Zeichnen. Die zum einfachen Einzeichnen der grössten Kreise dienenden Ringgestelle besitzen überdies eine Einteilung von 15 zu 15° zum Abtragen gegebener Winkel. Das Lineal, dessen Kante die Abwickelung eines grössten Kreisquadranten darstellt, trägt diese gleiche Einteilung und dient ebenfalls zum bequemen Abtragen gegebener Winkel.

Diese Kugelmodelle bieten in gleicher Weise beim Unterricht in sphärischer Trigonometrie, darstellender und analytischer Geometrie, Functionentheorie, mathematischer Physik, mathematischer Geographie und Astronomie eine überaus praktische Anwendbarkeit. Auch im Elementarunterricht der höheren Schulen sind sie sehr nützlich; kann man doch z. B. jedes sphärische Dreieck aus beliebig gegebenen drei Winkeln oder Seiten leicht auf den Modellen von dem einzelnen Schüler selbst einzeichnen lassen.

Die Modelle 22 und 23 der einschaligen Hyperboloide sind insbesondere aus dem Wunsche entstanden, diese Flächen in grösseren Formen wie bisher zu haben, was besonders beim Vortrag vor grösserem Kreise, wie z. B. in den Vorlesungen an den Technischen Hochschulen, von grösstem Nutzen ist. Die Modelle haben gegenüber anderen Ausführungen den grossen Vorteil, nur solche Constructionsteile zu besitzen, die eine geometrische Bedeutung für die Flächen selbst haben.

Veröffentlicht 1901 u. 1909.

Serie XXVII.

Drei räumliche Draht-Modelle electrischer Aequipotential- und Kraftlinien

nach Professor Dr. O. Lehmann in Karlsruhe

angefertigt auf Veranlassung von

Dr. **O. Wiener,**

Professor an der Universität Leipzig,

nach Zeichnungen von Dr. H. Scholl.

Nr. 1. Einem electrischen Massenpunkte entsprechend. Mark 40.—.
„ 2.* Zwei gleichnamigen electrischen Massenpunkten entsprechend. Mark 80.—.
„ 3. Zwei ungleichnamigen electrischen Massenpunkten entsprechend. Mk. 80.—.

Höhe der Modelle 85 cm.

Preis der ganzen Serie 200 Mark.

Die beiden Curvenscharen der Modelle sind aus rot und weiss lackierten starken Messingdrähten hergestellt und werden von einem Stativ getragen, so dass sie bequem aufgestellt werden können. Sie sind durch eine handliche Vorrichtung zum Umlegen eingerichtet, was zweckmässig erschien, um sie in zwei Lagen bequem projicieren zu können.

Die Modelle stellen den Verlauf der Aequipotential- und Kraftlinien in einer Ebene dar, für den Fall, dass gegeben ist:

1) ein electrischer Massenpunkt;
2) zwei gleichnamige, gleichwertige electrische Massenpunkte;
3) zwei ungleichnamige, gleichwertige electrische Massenpunkte.

O. Lehmann hat Flächenmodelle mit darauf gezeichneten Niveau- und Kraftlinien in seinem Werke „Electricität und Licht" (Braunschweig, 1895, S. 15), sowie in der von ihm völlig umgearbeiteten 14. Aufl. von J. Müllers Grundriss der Physik (Braunschweig, 1896, S. 484) beschrieben. Solche Modelle enthielt die Sammlung des physikalischen Instituts der Technischen Hochschule in Karlsruhe, und es entstand die Anregung,

ähnliche Modelle für das Leipziger physikalische Institut anfertigen zu lassen, jedoch mit dem Unterschied, dass nicht die Flächen selbst, sondern nur das Gerippe der Niveau- und Kraftlinien durch steife Drähte dargestellt werden sollte, aus dem weiter unten ersichtlichen Grunde. Die der Construction der Modelle zu Grunde liegenden Zeichnungen wurden durch Dr. H. Scholl ausgeführt.

Die electrischen Massenpunkte bedingen in einer sie enthaltenden Ebene Potentiale, deren Werte in den drei Fällen beziehungsweise durch die Ausdrücke $\frac{\varepsilon}{r}$, $\frac{\varepsilon}{r_1}+\frac{\varepsilon}{r_2}$, $\frac{\varepsilon}{r_1}-\frac{\varepsilon}{r_2}$ dargestellt werden, wenn ε die Grösse der electrischen Masse und die r diejeweiligen Abstände von den gegebenen Massenpunkten bezeichnen. Denkt man sich diese Potentiale in jedem Punkte der Ebene senkrecht zu ihr aufgetragen, so entsteht eine Fläche, welche im ersten Falle die Form eines allseits eingedrückten Kegels hat, der in der Nähe der Mitte sehr steil, gegen aussen hin langsamer abfällt, im zweiten Falle die Form zweier kegelähnlichen Erhebungen, die in der Mitte durch einen Sattel zusammenhängen, im dritten Falle die Form einer kegelähnlichen Erhebung und einer ebensolchen Vertiefung. Denkt man sich die Ausgangsebene horizontal gestellt und schneidet jetzt die Flächen durch gleichweit abstehende Horizontalebenen, so entstehen die Niveaulinien der Modelle, welche durch weisse Drähte dargestellt sind. Sie werden überall senkrecht geschnitten von den durch rote Drähte dargestellten Fallinien, das sind Linien, deren Tangenten überall die Richtung anzeigen, welche eine auf der Fläche losgelassene Kugel fallend einschlägt, oder auch Linien, längs welcher Wasser an der Fläche hinabfliessen würde, wenn es sich langsam, ohne merkliche Beeinflussung durch die Trägheit, bewegte.

Beleuchtet man nun diese Drahtmodelle mit einem Büschel paralleler Lichtstrahlen senkrecht zu den aufgestellten Niveauflächen — für die Demonstration benutzt man am besten eine in grosser Entfernung aufgestellte, der Linsen entblösste Bogenlampe — und fängt den Schatten des Modells auf einem zu den Niveauflächen parallelen Schirme auf, so bilden sich die Niveaulinien als electrische Aequipotentiallinien ab, die Fallinien als electrische Kraftlinien. Es tritt dadurch sehr deutlich die Analogie zwischen der Darstellung einer topographischen Fläche durch Niveau- und Fallinien mit der Darstellung eines electrischen Feldes durch die Aequipotentiale und Kraftlinien hervor. Da wo die topographische Fläche am steilsten, ein fallender Körper also die grösste Beschleunigung erfährt, liegen die Projectionen der Niveaulinien am dichtesten gedrängt, als electrische

Aequipotentiallinien aufgefasst, zeigen sie durch ihr enges Aneinanderliegen die Grösse der electrischen Kraft an.

Diese kann ausserdem noch durch die Dichtigkeit der Kraftlinien lerkannt werden, die in unmittelbarer Nähe der gedachten electrischen Massenpunkte unter gleichen Winkeln auslaufend angenommen wurden. Legt man die Modelle um, sodass die Lichtstrahlen parallel den Niveauflächen auffallen, so projicieren sich diese als gerade, gleichweit abstehende Linien; die Umrisslinien projicieren sich beim ersten Modell als Äste zweier gleichseitigen Hyperbeln.

Veröffentlicht 1901.

Serie XXVIII.

Sechs Modelle zur Theorie der cubischen Raumcurve

und ihrer Anwendung in der physiologischen Optik.

Auf Veranlasssung von Geheimrat Professor Dr. Klein und
unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Göttingen,
angefertigt von
Dr. **W. Ludwig** in Breslau.

Nr. 1. **Cubische Ellipse auf elliptischem Cylinder.** (Grösse 12×14×40 cm.) Mark 25.—.
„ 2.* **Cubische Hyperbel auf hyperbolischem Cylinder.** (Grösse 19×28×40 cm.) Mark 40.—.
„ 3. **Cubische parabolische Hyperbel auf parabolischem Cylinder.** (Grösse 16×16×40 cm.) Mark 25.—.
„ 4. **Cubische Parabel auf parabolischem Cylinder.** (Grösse 16×16×40 cm.) Mark 25.—.
„ 5.* **Tangentenfläche der cubischen Ellipse.** (Grösse 36×40×40 cm.) Mk. 30.—.
„ 6.* **Horopter.** (Grösse 20×23×47 cm.) Mark 25.—.

Preis der ganzen Serie einschliesslich der Abhandlung 165 Mark.

Die cubische Raumcurve verdient eine ganz besondere Berücksichtigung bei der Auswahl der Beispiele, die dem Anfänger die allgemeine Theorie der Raumcurven näher bringen sollen; denn sie zeigt die Eigenschaften der doppelt gekrümmten Curven in überaus einfacher Weise und besitzt dabei so leicht zu überblickende Formen, dass jeder, der sie einmal gesehen hat, sie ohne Mühe sich wieder deutlich vorstellen kann. Ausserdem hat sie aber auch ein weitergehendes Interesse wegen ihrer schönen projectiven Eigenschaften und wegen ihres Auftretens in der physiologischen Optik.

Es werden daher zweifellos diese neuen für den Unterricht besonders geeigneten Modelle der cubischen Raumcurven mit Freuden begrüsst werden. Diese Modelle verdanken ihre Entstehung der Anregung des Geheimrats *Klein* in seinem im W.-S. 1900/01 an der Universität Göttingen abgehaltenen Seminar.

Ganz neu ist vor allem die von Professor *Schilling* veranlasste Art der Ausführung der ersten vier Modelle. Während bisher Raumcurven nur aus Draht gebogen oder auf den Oberflächen von Körpern aus Holz, Gips oder anderer undurchsichtiger Masse aufgezeichnet wurden, sind hier die Cylinder, welche die Curven tragen, aus durchsichtigem Celluloid angefertigt und gestatten es daher, in jeder Stellung der Modelle den ganzen Verlauf der Curve auf dem Cylinder mit einem Blick zu erkennen. Die Modelle lassen sich infolgedessen gut projicieren und können dann auch zur Erläuterung mancher Eigenschaften der ebenen Curven dienen, wie z. B. zur Veranschaulichung des Überganges vom eigentlichen Doppelpunkt zum Rückkehrpunkt und zum isolierten Doppelpunkt. Überhaupt verspricht diese neue Darstellungsart auch für andere Curven und Flächen sich als recht brauchbar zu erweisen.

Nr. 1—4 veranschaulichen die 4 Typen, die man bei der cubischen Raumcurve je nach ihrem Verhalten zur unendlich fernen Ebene unterscheidet, nämlich:

1) Die cubische Ellipse mit einem reellen unendlich fernen Punkt und einer reellen Asymptote; mit dieser zusammen liegt sie auf einem elliptischen Cylinder, wie Modell 1 zeigt.

2) Die cubische Hyperbel mit drei getrennten reellen unendlich fernen Punkten und drei reellen Asymptoten; sie liegt mit jeder der letzteren zusammen auf einem hyperbolischen Cylinder, in dessen Asymptotenebenen sich jedesmal ihre beiden anderen Asymptoten befinden. Die Curve ist in Modell 2 auf dem einen dieser drei Cylinder dargestellt.

3) Die cubische parabolische Hyperbel, welche die unendlich ferne Ebene in einem reellen Punkt berührt und in einem zweiten schneidet, der die einzige Asymptote bedingt. Die Curve liegt daher einmal mit letzterer zusammen auf einem parabolischen Cylinder und ist solcherweise im Modell 3 veranschaulicht, sodann auf einem hyperbolischen Cylinder, den man auch leicht am Modell erkennt.

4) Die cubische Parabel, welche mit der unendlich fernen Ebene drei einander unendlich nahe Punkte gemeinsam, sie also zur

Schmiegungsebene hat. Durch die Curve geht nur ein parabolischer Cylinder, den das Modell 4 mitsamt der Curve gibt.

Nr. 5 zeigt die abwickelbare Fläche der Tangenten der im ersten Modell dargestellten cubischen Ellipse, begrenzt durch ihre Schnittcurven mit vier passend gewählten Ebenen. Die Rückkehrcurve dieser Fläche ist eben unsere cubische Ellipse, und der weiss-rote Faden des Modells deutet ihre Asymptote an.

Nr. 6 endlich dient zur Veranschaulichung der Bedeutung der cubischen Raumcurve in der physiologischen Optik. Blickt man mit beiden Augen nach einem Punkte im Raume hin, so vereinigen sich die auf beiden Netzhäuten entworfenen Bilder dieses Punktes zu einer einzigen Empfindung; man sieht den Punkt einfach. Von den übrigen Punkten des Raumes werden bei dieser bestimmten Augenstellung nur gewisse Punkte einfach gesehen, die anderen aber doppelt, eine Tatsache, deren wir uns allerdings für gewöhnlich nicht bewusst werden. Den Ort der bei einer bestimmten Augenstellung einfach gesehenen Punkte des Raumes nun nennt man den zu dieser Augenstellung gehörigen Horopter; derselbe ist eine cubische Raumcurve und zwar eine symmetrische cubische Ellipse, die auf einem Kreiscylinder liegt.

Diese geschilderten Verhältnisse werden durch unser Modell vollständig veranschaulicht, das die verkleinerte Darstellung eines wirklichen Falles mit allen Einzelheiten in leicht zu übersehender Ausführung wiedergiebt; wir erkennen die beiden Augen, den fixierten Raumpunkt, die Blicklinien, die Median- und Frontalebenen des Kopfes u. s. w., vor allem natürlich die Horoptercurve selbst mit ihrer Asymptote und Symmetrieaxe.

Die beigegebene Abhandlung von 36 Seiten entwickelt im ersten Teil die Hauptsätze der Theorie der cubischen Raumcurve, um auf Grund derselben im zweiten Teil ausführlich auf die mathematische Theorie der Horoptercurve einzugehen.

Veröffentlicht 1902.

Serie XXIX.

Drei Modelle zur Kreiseltheorie.

Unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Göttingen
herausgegeben von
Dr. **Hermann Grassmann,**
Privatdocenten an der Universität Halle.

Nr. 1. **Die epicycloidische Drehung eines kraftfreien starren Körpers.** (Grösse 20×20×21 cm.) Mark 100.—.

„ 2.* **Die pericycloidische Drehung eines kraftfreien starren Körpers.** (Grösse 20×31×34 cm.) Mark 100.—.

„ 3. **Die Uebergangsform zwischen epicycloidischer und pericycloidischer Drehung eines kraftfreien starren Körpers.** (Grösse 20×31×34 cm.) Mark 75.—.

Preis der ganzen Serie 265 Mark.

Eine jede Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt lässt sich, wie *Poinsot* gezeigt hat, auffassen als ein Fortrollen einer mit dem Körper fest verbundenen Kegelfläche auf einer zweiten Kegelfläche, die im Raume festliegt. Die erste Kegelfläche heisst der Polhodiekegel, die zweite der Herpolhodiekegel. Beide Flächen haben ihren Scheitel im Drehpunkte des Körpers, und ihre Berührungslinie bildet für jeden Augenblick die instantane Drehaxe des Körpers. Ist es gelungen, bei einem gegebenen Rotationsproblem die beiden Kegel zu construieren, und kennt man noch für irgend einen Augenblick die Lage des ersten Kegels gegen den zweiten, so kann man die Bewegung des Körpers ihrem räumlichen Gange nach vollkommen getreu nachahmen, indem man, von jener Lage der beiden Kegel ausgehend, den Polhodiekegel auf dem Herpolhodiekegel abrollen lässt.

Um sich indess auch ein Bild von dem zeitlichen Verlaufe der Bewegung machen zu können, trägt man noch vom Drehpunkte aus auf

jeder Erzeugenden der beiden Kegel eine Strecke ab, welche durch ihre Länge die Winkelgeschwindigkeit veranschaulicht, die der Körper bei der Drehung um diese Erzeugende besitzt, und zugleich durch ihren Sinn den Drehungssinn der Bewegung ausdrückt. Auf diese Weise erhält man auf jeder Erzeugenden der beiden Kegel einen Punkt, den sogenannten Drehpol dieser Erzeugenden, und als geometrischen Ort aller Drehpole auf dem Polhodiekegel die „Polhodiecurve" oder „Polhodie", als geometrischen Ort der Drehpole auf dem Herpolhodiekegel die „Herpolhodiecurve" oder „Herpolhodie". Beide Curven — man nennt sie auch die beiden Polwege — wickeln sich dann ebenfalls bei der Bewegung des starren Körpers auf einander ab. Regelt man dabei zugleich diese Abwickelung in der Weise, dass ihre Winkelgeschwindigkeit in jedem Augenblick der Länge des Leitstrahls der beiden Polwege an der Berührungsstelle entspricht, so wird die Rotationsbewegung des Körpers auch ihrem zeitlichen Verlaufe nach dargestellt.

Bei dem kraftfreien starren Körper bevorzugt man indes gewöhnlich ein anderes, ebenfalls von *Poinsot* herrührendes Verfahren. In diesem Falle kann nämlich die Bewegung auch dadurch erhalten werden, dass man ein mit dem Körper fest verbundenes Ellipsoid — das Ellipsoid der lebendigen Kraft des Körpers — unter Festhaltung seines Mittelpunktes auf einer im Raume festen Ebene rollen lässt. Dabei ist dann zugleich die Curve der Berührungspunkte auf dem Ellipsoid die Polhodiecurve und die Curve der Berührungspunkte auf der festen Ebene die Herpolhodiecurve; diese Ebene kann also auch als die Herpolhodieebene bezeichnet werden.

Es ist aber von Interesse, auch bei dem kraftfreien starren Körper auf das Abrollen des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel zurückzugreifen, einmal, weil bei dieser Darstellung gewisse Unterschiede in den vorkommenden Bewegungsformen schärfer hervortreten, und zweitens, weil so die Vergleichung zwischen der kraftfreien Bewegung und der Bewegung eines von Kräften ergriffenen Körpers erleichtert wird. Dazu kommt noch, dass der Polhodiekegel bei der Bewegung eines kraftfreien starren Körpers eine besonders einfache Gestalt hat, nämlich von der zweiten Ordnung ist und also leicht modelliert werden kann. Der Herpolhodiekegel freilich ist viel verwickelter, aber auf seine Modellierung kann man verzichten, wenn man den Polhodiekegel längs der Polhodiecurve abschneidet und dann den Kegel mit seiner Randcurve unter Ausschluss des Gleitens auf der Herpolhodieebene abrollen lässt. Dieses Verfahren ist bei den drei Modellen zu Grunde gelegt.

Dabei ergeben sich drei verschiedene Bewegungsformen.

Modell 1. Wenn nämlich der Polhodiekegel die Axe des kleinsten Trägheitsmomentes umschliesst, erfolgt sein Abrollen auf dem Herpolhodiekegel epicycloidisch, das heisst, die beiden Kegel kehren sich längs ihrer Berührungslinie dauernd ihre convexe Seite zu.

Modell 2. Wenn der Polhodiekegel die Axe des grössten Trägheitsmomentes umschliesst, so ist sein Abrollen pericycloidisch, das heisst, er umschliesst auch den Herpolhodiekegel längs seiner Berührungslinie mit ihm.

Modell 3. Der dritte Fall ist der Übergangsfall, in welchem der Polhodiekegel in ein (reelles) Ebenenpaar ausgeartet ist.

Das beschriebene Verfahren bietet noch den Vorteil, dass sich mittelst der Modelle die Herpolhodiecurve leicht auf einem Papierblatt verzeichnen lässt, so dass die Modelle also nicht nur gestatten, die Bewegung des kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt nachzuahmen, sondern zugleich als Herpolhodiezirkel dienen können. Befestigt man nämlich ein Papierblatt mit einem Stück aufgelegten Blaupapiers auf der Fussplatte der Modelle und lässt den Polhodiekegel ohne Anwendung von Druck unter gelegentlicher sanfter Nachhilfe durch die Hand auf seiner Unterlage abrollen, so ruft der Kegel durch sein blosses Gewicht die Herpolhodiecurve mit hinreichender Deutlichkeit auf dem Papierblatt hervor.

Näheres bietet eine ausführliche Abhandlung, die den Modellen beiliegt.

Veröffentlicht 1902.

Serie XXX.

Gips-Modelle verschiedener Art.

Nr. 1* u. 2.* **Modelle für die Abbildung der projectiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche.** Auf Anregung von Professor *Hilbert* und unter Mitwirkung von Professor *Fr. Schilling* in Göttingen ausgeführt von Dr. phil. *Werner Boy*.

Nr. 1. Fläche mit nur drei Extremen. (Grösse 21×36×8 cm.) Mk. 27.—.

„ 2. Fläche in symmetrischer Gestalt. (Grösse 21×25×17 cm.) Mark 27.—.

„ 3. **Modell einer Fläche dritter Ordnung, zur Erläuterung des Verhaltens einer krummen Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes.** Auf Veranlassung von Prof. Dr. *P. Stäckel* in Kiel ausgeführt von stud. math. *O. Losehand* und stud. math. *W. Quidde*. (Grösse 15×15×15 cm.) Mark 7.50.

„ 4. **Modell der Grenzfläche des parabolischen Strahlennetzes** von Professor Dr. *Konrad Zindler* in Innsbruck. (Grösse 60×38×7 cm.) Mark 22 —.

„ 5.* **Modell des Ortes der Sehnenmittelpunkte einer Raumcurve.** Auf Veranlassung der Professoren *Finsterwalder* und *Voss* in München ausgeführt von Dr. *K. Böhmländer* in Memmingen. (Grösse 15×22,5×17,5 cm) Mark 23.—.

„ 6 u. 7.* **Modelle zweier auf das Rotationsparaboloid abwickelbaren Flächen 12. Ordnung und 10. Klasse.** Auf Veranlassung von Professor *G. Darboux* angefertigt im Institut für höhere Geometrie an der Sorbonne in Paris von Dr. *E. Estanave* in Marseille.

Nr. 6. (Grösse 29×18×9,5 cm.) Mark 20.—.

„ 7. (Grösse 20×10,5×29,5 cm.) Mark 30.—.

„ 8. **Modell der Fläche** $z = x\,y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, **für deren singulären Nullpunkt** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \mp \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ **ist.** Auf Veranlassung von Professor *J. Sommer* und unter Mitwirkung von Professor *Fr. Schilling* herausgegeben von cand. mach. *Walther Fischer* in Danzig. (Grösse 18×18×17½ cm.) Mk. 18.—.

Modelle Nr. 1 u. 2. Über die unendlich fernen Elemente der Ebene trifft man bekanntlich in der Geometrie und in der Functionentheorie verschiedene Festsetzungen derart, dass die für das Endliche geltenden Sätze innerhalb der betreffenden Disciplin ohne weiteres auch für die unendlich

fernen Elemente Gültigkeit behalten. Man unterscheidet dementsprechend die functionentheoretische und die projective Auffassung von der Ebene. Bei beiden denkt man sich die Ebene als unendlich grosse, geschlossene singularitätenfreie Fläche und sucht sie für die Vorstellung durch die entsprechende endliche Fläche zu ersetzen. Der functionentheoretischen Ebene schreibt man, wie hinlänglich bekannt, nur einen unendlich fernen Punkt zu und findet daher leicht als ihr ganz im Endlichen gelegenes singularitätenfreies Abbild die Kugel. Als unendlich fernes Element der Ebene in der projectiven Geometrie dagegen sieht man die „unendlich ferne Gerade" an. Durch hier nicht zu erörternde Tatsachen sieht man sich gezwungen, die Ebene als einseitige Fläche aufzufassen, d. h. als eine Fläche, auf der ein ruhig seinen Weg verfolgender Spaziergänger so an seinen Ausgangsort zurückkommen kann, dass er auf der anderen Seite der Fläche steht, dass er also seinem am Ausgangsorte zurückgebliebenen Freunde die Füsse zukehrt. Im besonderen muss man noch annehmen, dass der Spaziergänger, wenn er erst einmal seinen Weg in der genannten Weise zu seinem Ausgangsort zurückgefunden hat, keinen neuen derartigen Weg finden kann, auf dem er nicht den ersten eine ungerade Anzahl mal, also mindestens einmal, schnitte.

Die beiden Modelle unserer Serie stellen nun im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Flächen dar, die diesen Annahmen entsprechen, und also ebenso ein Abbild der projectiven Ebene bilden, wie die Kugel für die functionentheoretische Ebene. Die Complicitheit der Flächen ist durch den eigentümlichen Charakter der Doppelkurve bestimmt, die so beschaffen sein muss, dass der ihr folgende Spaziergänger erst nach viermaliger Durchlaufung der Curve in seiner ursprünglichen Stellung an seinen Ausgangspunkt zurückkehrt.

Die beiden Flächen sind in ihrem Verhältnis zur projectiven Ebene nach der Anschauung der Analysis situs gleichberechtigt. Sie unterscheiden sich nur in der Anordnung ihrer Teile.

Die Fläche des Modells 1 hat die merkwürdige Eigenschaft, bei senkrechter Lage ihres längsten Durchmessers nur ein Maximum, ein Minimum und ein Maximinimum zu haben. Sie zeigt sich so als die einfachste geschlossene Fläche, bei der die drei möglichen Arten der Extreme sämtlich und zwar nur einmal vorkommen. Rücksichtilch der Extreme ist sie also die einfachste Fläche nächst der Kugel.

Die im Modell 2 dargestellte Fläche überrascht durch ihre Symmetrie. Sie besitzt eine dreizählige Symmetrieaxse; bei einer Drehung um 120^0 um diese Axse kommt die Fläche mit sich selbst zur Deckung.

Um die Flächen, besonders ihren Charakter als Doppelflächen, bequem übersehen zu können, sind die Modelle einmal mit drei verschiedenen Farben zweckmässig angelegt, die den Zusammenhang der einzelnen Flächenteile leicht erkennen lassen. Sodann ist auch auf jedem Modelle eine solche Curve eingezeichnet, der entlang gehend der Spaziergänger auf die andere Seite der Fläche kommt. Längs der einzelnen Curven sind normal zu ihnen noch Pfeile hinzugefügt, deren Richtung sich dann nach Durchlaufung der Curven umkehrt.

Den Modellen wird eine Abhandlung beigegeben, aus der alles Nähere ersichtlich ist. Auch sind sie ausführlich behandelt in den Mathem. Annalen, Bd. LVII, pg. 173 ff.

Modell Nr. 3. Um das Verhalten einer krummen Fläche in der Nähe eines regulären Punktes zu ermitteln, bedient man sich bekanntlich der Darstellung:

$$z = \tfrac{1}{2}(r_0 x^2 + t_0 y^2) + \tfrac{1}{6}(\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3) + \ldots$$

Bei elliptischen und hyperbolischen Punkten ergiebt sich daraus eine wirkliche Näherung, wenn man sich auf die Glieder zweiter Ordnung beschränkt, also die Fläche durch das osculierende Paraboloid ersetzt. Anders steht es bei parabolischen Punkten, wo also etwa $r_0 = 0$ ist. Hier sind auch die Glieder höherer als der zweiten Ordnung von massgebendem Einfluss, und es ist daher unmöglich, allgemeine Regeln über das Verhalten der Fläche in der Nähe eines solchen Punktes aufzustellen. Ein Fall von grosser Allgemeinheit ergiebt sich, wenn man α als von Null verschieden annimmt. Alsdann lässt sich zeigen, dass die Fläche dritter Ordnung:

$$z = \tfrac{1}{2} t_0 y^2 + \tfrac{1}{6} \alpha x^3$$

eine wirkliche Annäherung liefert. Diese Fläche ist unter der Annahme: $t_0 = 0{,}5$, $\alpha = -0{,}3$, bei der ihre charakteristischen Eigenschaften deutlich hervortreten, in dem vorliegenden Modell dargestellt worden.

Eine kurze Abhandlung von Professor P. Stäckel wird beigefügt.

Modell Nr. 4. Eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 Geraden heisst eine Strahlencongruenz. Ein bestimmter Strahl derselben heisse s; die Grenzlagen der Fusspunkte der kürzesten Abstände zwischen s und seinen Nachbarstrahlen füllen auf s im Allgemeinen eine endliche Strecke, deren Endpunkte Grenzpunkte heissen. Der geometrische Ort der Grenzpunkte aller Strahlen heisst Grenzfläche der Congruenz. Diese ist erst für sehr wenige Congruenzen explicite bekannt namentlich noch nicht für die einfachsten

Strahlencongruenzen, nämlich die Congruenzen erster Ordnung und Klasse (die „Strahlennetze"), die aus den Treffgeraden zweier windschiefen Strahlen, der „Brennlinien", bestehen. Unter diesen ist das parabolische Strahlennetz (bei dem die Brennlinien zusammenrücken) das einfachste.

Das Modell stellt nun die Grenzfläche des parabolischen Strahlennetzes dar, eine Fläche sechster Ordnung mit einer vierfachen Geraden (durch die jedoch nur zwei reelle Mäntel gehen) und mit zwei zusammenfallenden biplanaren Knotenpunkten. Sie lässt sich durch einen veränderlichen Kreis erzeugen, der in 15 Lagen auf dem Modell sichtbar ist und durch ein Strahlbüschel seiner Durchmesser auch eine Vorstellung vom Strahlennetz selbst vermittelt.

Eine kurze Abhandlung von Professor Zindler wird dem Modell beigefügt, worin die Gleichung der Fläche auf möglichst elementarem Wege gefunden wird; nach allgemeinerer Methode wird sie im zweiten Bande der Liniengeometrie desselben Verfassers abgeleitet werden.

Modell Nr. 5. Die Raumcurve wurde erhalten als Schnitt eines elliptischen Cylinders mit einem Ellipsoid.

$$\text{Elliptischer Cylinder: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$$\text{Ellipsoid: } \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2}+\frac{z^2}{t^2}=1.$$

Vereinfacht man die Gleichung der Sehnenmittelpunktsfläche durch Einführung der Weite d bis k als Functionen von a, b, r, s und t, so erhält man:

$$d^{10}x^2y^2\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right]-e^{10}x^2z^2\left[\frac{x^2}{g^2}+\frac{z^2}{i^2}-1\right]$$
$$-f^{10}y^2z^2\left[\frac{-y^2}{h^2}+\frac{z^2}{k^2}-1\right]=0.$$

Die Fläche enthält drei Gerade (die Koordinatenachsen), ferner die Projectionen der Raumcurve auf die drei Koordinatenebenen (zwei Ellipsen und eine Hyperbel).

Eine ausführliche Abhandlung wird dem Modell beigefügt.

Modell Nr. 6. Die Koordinaten dieser Fläche werden als Functionen der beiden Parameter t und β durch die Gleichungen dargestellt:

$$x=(t^2-\beta^2)^{3/2},$$
$$y=[\beta^2-(t-1)^2]^{1/2}(t^2+t+1-\beta^2),$$
$$z=4\beta^2.$$

Die Fläche ist reell abwickelbar auf das Rotationsparaboloid $x^2+y^2=\frac{495}{256}z$. Jede Hälfte entspricht einem Paraboloid.

Modell Nr. 7. Die Koordinaten dieser Fläche werden durch die Gleichungen dargestellt:

$$x=[(t-1)^2-\beta^2]^{1/2}(t^2+t+1-\beta^2),$$
$$y=(\beta^2-t^2)^{3/2},$$
$$z=4\beta^2.$$

Sie unterscheidet sich in algebraischer Hinsicht nicht wesentlich von der vorigen Fläche; denn man erhält sie aus dieser durch die Transformation $x_2=iy_1, y_2=-ix_1, z_2=z_1$, wobei x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines Punktes der ersten und x_2, y_2, z_2 die eines Punktes der zweiten Fläche bezeichnen.

(Siehe wegen der Einzelheiten die Originalabhandlungen: Darboux, G., Bulletin des Sciences mathématiques, 2. série, tome XXIX, Avril 1905 und Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tome CXL, 13. Mars 1905, p. 697.)

Eine Erläuterung in französischer Sprache mit den ausgeführten Rechnungen wird beigefügt.

Modell Nr. 8. Die gekrümmte Oberfläche des Modells ist die geometrische Darstellung der Function*)

$$z=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

in einem räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystem. Das Modell ist seitlich abgegrenzt durch die vier Ebenen $x=\pm 9$ cm und $y=\pm 9$ cm. Die dargestellte Fläche enthält insgesamt vier gerade Linien, nämlich die mit grüner Farbe eingetragenen x- und y-Axen, sowie die mit roter Farbe eingetragenen Halbierungslinien ihrer Winkel. (Als positive Richtung der z-Axe ist die Richtung nach oben, außerhalb des Modells, gewählt, und von hier aus gesehen soll die positive Richtung der x-Axe bei einer Drehung um 90^0 im Sinne des Uhrzeigers in die positive Richtung der y-Axe übergehen.)

Man erkennt am Modell leicht die verschiedenen Symmetrieeigenschaften, welche die Fläche besitzt. Anscheinend weist dieselbe keine Singularitäten auf, sie hat in jedem im Endlichen gelegenen Punkt eine bestimmte Tangentialebene, oder m. a. W. die Function z besitzt für jede endliche Stelle (x, y) bestimmte partielle Differentialquotienten nach x

*) Vgl. Peano, H., Calcolo differenciale etc., Torino, 1884, S. 174 u. Stolz, O., Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, I. Teil, Leipzig 1893, S. 150.

resp. y, und diese sind auch überall stetig. Jede Normalebene der Fläche, speciell auch jede Ebene durch die z-Axe, schneidet die Fläche in einer im Endlichen singularitätenfreien Curve. Für jede vom Nullpunkt (o,o) verschiedene im Endlichen liegende Stelle (x, y) besitzt die Function z ferner auch die sämtlichen partiellen Differentialquotienten jeder beliebigen Ordnung, und es ist der Wert eines gemischten Differentialquotienten stets unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen nach x resp. y. Insbesondere gilt also immer die Gleichung $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}$ für eine Stelle (x, y), welche vom Nullpunkt verschieden ist. Diese Gleichung verliert dagegen ihre Gültigkeit für den Nullpunkt $x = 0$, $y = 0$.

Um diese Tatsache zu illustrieren, sind auf der Fläche die Schnittcurven mit einer Anzahl Parallelebenen einmal zur x, z-Ebene, sowie zur y, z-Ebene eingetragen. Denkt man sich an die Schnittcurve einer der Parallelebenen zur x, z-Ebene in dem Punkte, wo die Curve die y-Axe trifft, die Tangente gezogen, nimmt als positive Richtung der letzteren diejenige, in welcher x wächst, und bezeichnet mit ν den Winkel, welchen die positive x-Axe mit der positiven Richtung der Tangente (bei einer Drehung der $+x$-Axe gegen die $+z$-Axe) einschliesst, so ist für die Ebenen $y = -\infty$, 0, $+\infty$ der Winkel ν resp. $= \frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{2}$. Während der Abstand der Parallelebene zur x, z-Ebene von $-\infty$ über 0 nach $+\infty$ zunimmt, nimmt ν gleichzeitig von $+\frac{\pi}{2}$ über 0 nach $-\frac{\pi}{2}$ ab. Die sorgfältige Betrachtung des Modells zeigt schon, dass ν mit wachsendem y zugleich beständig und gleichmässig abnimmt. Analytisch ist für die Curve in der Ebene $y =$ konst. $\operatorname{tg} \nu = \left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_{x=o}$, und man erkennt daher am Modell, dass $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)_{x=o}$ stets negativ, auch von Null verschieden ist. Die Berechnung liefert $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{\substack{x=o \\ y}} = -y$, und hieraus folgt $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)_{\substack{x=o \\ y}} = -1$. Die Betrachtung der Parallelcurven $x =$ konst. zeigt ebenso, dass $\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_{y=o}$ mit von $-\infty$ über 0 nach $+\infty$ wachsendem x gleichzeitig beständig und gleichmässig wächst, so dass $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}\right)_{\substack{y=o \\ x}} > 0$ ist. Die Rechnung liefert analog wie vorhin:

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_{\substack{y=o \\ x}} = x, \text{ also } \left(\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}\right)_{\substack{y=o \\ x}} = +1.$$

Für die Stelle (0, 0) hat man danach:

$$\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)_{\substack{x=o \\ y=o}} = -1, \quad \left(\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}\right)_{\substack{y=o \\ x=o}} = +1,$$

und somit ist für den Nullpunkt:

$$\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)_{\substack{x=o \\ y=o}} \neq \left(\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}\right)_{\substack{y=o \\ x=o}}.$$

Der Nullpunkt ist ein singulärer (Ausnahme-) Punkt der Fläche. In der Tat ist auch die Indikatrix für diesen Flächenpunkt nicht mehr eine Curve zweiten Grades, wie für einen gewöhnlichen Flächenpunkt, sondern eine Curve vierter Ordnung, welche aus zwei hyperbelartigen Zügen sich zusammensetzt.

Veröffentlicht 1903, 1905, 1909 u. 1910.

Serie XXXI.

Zweite Sammlung kinematischer Modelle,
insbesondere zur Verzahnungstheorie,

herausgegeben von

Dr. **Fr. Schilling,**
Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in Danzig.

I. Gruppe.

Nr. 1.	Erzeugung der **Pascalschen Curven** als Epitrochoiden mit **bedecktem** Centrum	Mark 65.—.
„ 2.	Erzeugung der **Pascalschen Curven** als Epitrochoiden mit **freiem** Centrum	„ 53.—.

II. Gruppe.

„ 3.	**Methode der Hilfspolbahnen I.**	„ 74.—.
„ 4.	**Methode der Hilfspolbahnen II.**	„ 74.—.
„ 5.*	**Cykloidenverzahnung** als Anwendung der Methode der Hilfspolbahnen	„ 57.—.
„ 6.	Beispiel einer **Profilcurve und der vollständigen Enveloppe** ihrer Lagen im anderen System	„ 61.—.
„ 7.	**Methode der Äquidistanten**	„ 68.—.
„ 8.	**Triebstockverzahnung** als Anwendung der Methode der Äquidistanten	„ 74.—.
„ 9.	**Methode der sekundären Polbahnen**	„ 57.—.
„ 10.	**Envolventenverzahnung** als Anwendung der Methode der sekundären Polbahnen	„ 57.—.
„ 11.*	**Erzeugung der Kreisevolventen des Modelles 9 nach der Methode der Hilfspolbahnen**	„ 82.—.

Grösse der Modelle 22×27 cm.

Preis der ganzen Serie 722 Mark.

Eine ausführliche Abhandlung wird beigefügt.

Diese zweite Sammlung kinematischer Modelle bildet die Fortsetzung der bereits 1898 veröffentlichten Modelle, die hauptsächlich die Theorie der Polbahnen, der genauen Geradführungen und der Erzeugung der allgemeinen und speciellen cyklischen Curven zur Anschauung bringen.

Besonders an letztere Gruppe anschliessend sollen die neuen Modelle, deren Originale der Versammlung in Hamburg (1901) vorgelegen haben, die wichtigsten Methoden der Zahnräderconstructionen behandeln, indem sie hierbei wieder vor allem die zugrunde liegenden mathematischen Gedanken hervortreten lassen, dem Wunsche entsprechend, der bezüglich einer solchen Sammlung kinematischer Modelle von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung auf ihrer Versammlung in Frankfurt a. M. (1896) zum Ausdruck gebracht war.

Die Modelle 1 und 2 der ersten Gruppe, die sich als Ergänzung der Modelle 1—7 der ersten Sammlung (Serie XXIV) wünschenswert zeigten, veranschaulichen die verschiedenen Erzeugungsarten der verschlungenen, gespitzten und gestreckten Pascalschen Curven, beispielsweise die durch folgenden Satz gegebene: Bewegt sich ein System so, dass die Schenkel eines Winkels in ihm stets durch feste Punkte hindurchgehen, so beschreibt ein beliebiger Punkt des Systems eine Pascalsche Curve.

Die Modelle der zweiten Gruppe sollen die Verzahnungstheorie veranschaulichen, die theoretischen Grundlagen nicht minder wie die praktischen Constructionsmethoden.

Die zusammengehörenden Modelle 3—5 behandeln die Methode der Hilfspolbahnen und die sich anschliessende Cycloidenverzahnung. Zwei Punkte des Hilfspolkreises beim Modell 3 z. B. beschreiben bei gleichzeitiger Abrollung der Polkreise und des Hilfspolkreises aufeinander zwei zusammengehörende Profilcurvenpaare, bestimmte Epi- oder Hypotrochoiden.

Das Modell 6 zeigt in dem einen System eine dreispitzige Hypocycloide, im andern die vollständige Enveloppe aller ihrer Lagen, die aus zwei vierspitzigen und zwei zweispitzigen Epicycloiden besteht.

Die Modelle 7 und 8 erläutern die Methode der Äquidistanten und die darauf sich aufbauende Triebstockverzahnung. Im Modell 7 z. B. ist die „Äquidistante" eines Peripheriepunktes des einen Polkreises und die Äquidistante der Bahncurve dieses Peripheriepunktes im andern System nebst allen zur vollständigen Einsicht in diese Verhältnisse notwendigen weiteren Einzelheiten zur Darstellung gebracht.

Die Modelle 9—11 sind der Methode der secundären Polbahnen und deren Anwendung, der Evolventenverzahnung gewidmet. Das Modell 11 insbesondere zeigt eine logarithmische Spirale, welche gleichzeitig auf den beiden Polkreisen ohne Gleitung abrollt und mit ihrem Asymptotenpunkte die Evolventen in den beiden Systemen erzeugt. Bei diesen

interessanten Beziehungen verdient bei dem Modell besondere Beachtung, einmal wie der endlichen Bogenlänge der logarithmischen Spirale bis zum Asymptotenpunkte entsprechend von letzterem der Schnittpunkt der einzelnen Evolvente mit ihrem Polkreise erreicht wird, sodann wie die Spitze der einen Evolvente von dem Asymptotenpunkte beschrieben wird.

Eine ausführliche Abhandlung, welche neben der Beschreibung und vorzüglichen Abbildungen der Modelle in Lichtdruck, vor allem auch eine Einführung in das Gebiet der Verzahnungstheorie mit neuen Resultaten bringt, ist in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, 51. Band, Jahrgang 1904, Heft 1 erschienen. Ein Sonderabdruck wird den Modellen beigegeben.

Man wird leicht erkennen, dass die diesen Modellen zugrunde liegenden Betrachtungen sich immerfort mit Begriffen beschäftigen, wie Tangente, Normale, Bogenlänge, Krümmungskreis, Evolute und Evolvente, Äquidistante, Enveloppe, Spitze, Wendepunkt, Doppelpunkt u. s. w. Daher dürften die Modelle zweifellos nicht nur in einer Vorlesung über angewandte Kinematik selbst, sondern auch in solchen über analytische Geometrie oder Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der ebenen Curven eine ausgezeichnete Verwendung finden. Soll es doch geradezu eine wesentliche Aufgabe dieser Modelle sein, den kinematischen Betrachtungen besonders auch im Universitätsunterricht neue Freunde zu gewinnen.

Auf die innige Beziehung der durch die Modelle veranschaulichten Verhältnisse zur Theorie der Lie'schen Berührungstransformationen, über die der Herausgeber bei der Versammlung in Hamburg bereits nähere Mitteilung gemacht hat, soll hier doch auch hingewiesen werden. Wir haben hier eben ein vorzügliches Beispiel vor uns, wie moderne, rein mathematische Disciplinen oft aufs engste in Fühlung stehen mit wirklich praktischen Anwendungen. (Vgl. die inzwischen erschienene Abhandlung von Fr. Schilling: Die Bewegung in der Ebene als Berührungstransformation, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 54, 1906.)

Veröffentlicht 1905.

Serie XXXII.

Verschiedene Modelle.

Nr. 1.* **Ellipsenzirkel** von Geheimrat Professor Dr. *Karl Rohn* in Leipzig. (Grösse 17×17 cm.) Mark 120.—.

„ 2.* **Bewegliches Holzmodell zur Erläuterung des Dandelin'schen Satzes** von Professor Dr. *Ernst Kötter* in Aachen. (Grösse 18×27 cm.) Mark 80.—.

„ 3.* **Modell zur Demonstration der räumlichen Entstehungsweise der Kegelschnitte unter Zugrundelegung des Dandelin'schen Satzes** von Professor Dr. *C. Hildebrandt* in Braunschweig (Grösse der Grundplatte 45×60 cm., Durchmesser der Kugel 18 cm.) Mark 50.—.

„ 4 und 5. **Dreidimensionale Netze zu vierdimensionalen Körpern** von Dr. *R. Gaetschenberger* in Freiburg i. B.

Nr. 4. Netz des Fünfzells, bestehend aus fünf Tetraedern, wovon eines unsichtbar (Tetraeterkante 6 cm.). Mark 2.50.

„ 5. Netz des Achtzells, bestehend aus acht Würfeln, wovon einer unsichtbar (Würfelkante 4 cm.). Mark 6.—.

„ 6.* **Planigraph** von Professor *G. Königs* in Paris. (Höhe 40 cm.) Mk. 90.—.

Modell Nr. 1. Der Ellipsenzirkel beruht auf dem bekannten Satz, dass jeder Punkt P einer Strecke AB eine Ellipse beschreibt, wenn diese Strecke so bewegt wird, dass ihre Endpunkte A und B auf zwei rechtwinkligen Geraden x und y hingleiten. Die üblichen Constructionen, die hierauf beruhen, haben den Nachteil, dass erstens die betreffenden Instrumente nur halbe Ellipsen liefern, dass zweitens sehr kleine Ellipsen oder auch grössere, aber sehr schmale Ellipsen garnicht oder nur sehr ungenau gezeichnet werden können, und dass drittens infolge mangelhafter Führung einzelner Teile des Instrumentes auch bei beliebigen Axen der Ellipsen eine scharfe und genaue Linie nicht erzielt wird. Diese Übelstände sind bei dem vorliegenden Ellipsenzirkel vermieden. Ein quadratischer Rahmen $a\,b\,c\,d$ ist mit Nuten versehen, die zur Führung zweier Kreisscheiben k und l dienen. Die Kreisscheibe k greift in die Nuten von a und c ein und wird dadurch so geführt, dass ihr Mittel-

punkt sich genau auf einer Parallelen zu a und c bewegt; ebenso greift die Kreisscheibe l in die Nuten von b und d ein, so dass sich ihr Mittelpunkt nur auf einer Parallelen zu b und d bewegen kann. Die Kreisscheiben k und l können gegeneinander verschoben und in jeder gegenseitigen Lage durch Klemmschrauben fest verbunden werden. Damit das System der verbundenen Kreisscheiben sich unbehindert bewegen kann, liegen die Seiten b und d des Rahmens über den Seiten a und c. Bei der Bewegung des Systems beschreiben die Mittelpunkte der beiden Kreisscheiben zu einander senkrechte Geraden, jeder Punkt ihrer Verbindungslinie also eine Ellipse. Ein federnder Stift ist in dem Schlitz der beiden Kreisscheiben verschiebbar und kann mittels einer Millimetereinteilung eingestellt werden. Die Einstellung lässt sich für jede Ellipse in zweierlei Weise bewirken. Besitzt die Ellipse z. B. die Halbaxen 20 mm und 45 mm, so stelle man den Mittelpunkt der zweiten Kreisscheibe auf den Teilstrich 20 und den Stift auf den Teilstrich $45 - 20 = 25$ der andern Seite. Oder man stelle den Mittelpunkt der zweiten Kreisscheibe auf den Teilstrich $45 + 20 = 65$ und den Stift auf den Teilstrich 20 derselben Seite. Je nach der Länge der Axen wird die eine oder andere Art der Einstellung vorzuziehen sein. Der Apparat gestattet, jede Ellipse zu zeichnen, deren Dimensionen etwas kleiner sind als die des Rahmens; er zeichnet sehr schmale oder ganz kleine Ellipsen ebenso genau wie solche mit grösseren Axen. Eine scharfe Kontrolle der Genauigkeit des Instrumentes besteht darin, dass der Stift, wenn er auf den Teilstrich 0 eingestellt wird, bei der Bewegung eine gerade Linie im Hin- und Hergang beschreiben muss.

Modell Nr. 2. Bekanntlich wird die Ebene eines beliebigen, einem Rotationskegel angehörigen Kegelschnittes in dessen Brennpunkten F und F_1 von zwei Kugeln berührt, die den Kegel längs je eines Kreises berühren. Wenn die einen Punkt P des Kegelschnittes projicierende Mantellinie des Kegels die Kugeln in den Punkten A und A_1 berührt, so hat man offenbar die beiden Gleichungen

$$PF = AP, \quad PF_1 = PA_1,$$

woraus man für den im Modell dargestellten Fall der Ellipse die Folgerung zieht

$$PF + PF_1 = AP + PA_1 = AA_1.$$

Um diesen eleganten Beweisgang Dandelins für unzählig viele Punkte der Ellipse evident zu machen, ist das Modell im Wesentlichen aus zwei Rotationskörpern zusammengesetzt, die in den Ebenen der beiden Kreise aneinandergrenzen und unabhängig von einander um die Axe des Kegels drehbar sind. Die beiden äusseren Teile des Modells sind zu diesem

Zwecke an einen Rundstab befestigt, die zwischen den Berührungskreisen liegenden Kugelkalotten an einer jenen Rundstab eng umschliessenden Hülse. Ein an dem ersten Rotationskörper eingespannter Draht stellt eine Mantellinie AA_1 des Kegels dar. Ein Stück Zinkblech, dessen Rand der Ellipse folgt, bildet eine gemeinsame Tangentialebene der beiden Kugeln und ist in den Berührungspunkten F und F_1 durch Schrauben befestigt. Mittels eines passenden Schiebers können zwei Fäden, von denen der eine, blaue, die Punkte F_1 und A, der andere, rote, die Punkte F und A_1 verbindet, so geführt werden, dass sie bei Drehung des zweiten Rotationskörpers stets durch den Punkt P gehen, in welchen der Draht den Rand des Blechstückes trifft. Beide Fäden bleiben, da sie die Länge AA_1 erhalten haben, stets straff gespannt. Für jede Lage der beiden Rotationskörper ist AA_1 in einen roten und in einen blauen Summanden zerlegt; der rote ist dem blauen Brennstrahl, der blaue dem roten Brennstrahl des jeweiligen Stützpunktes gleich.

Modell Nr. 3. Auf einer Grundplatte ist eine massive Kugel befestigt, durch deren Mittelpunkt eine horizontale Axe gelegt ist. Um die letztere lässt sich ein Zapfen drehen, die Axe eines Tangentialkegels darstellend, dessen oberes Ende einen verschiebbaren und um den Zapfen drehbaren Metallbügel trägt. An dem einen Ende des Bügels befindet sich eine Hülse, durch welche vermöge seines Eigengewichtes ein Metallstab gleiten kann. Führt man diesen Stab um die Kugel herum, so beschreibt er, stets eine Kugeltangente bildend, den Mantel eines der Kugel umschriebenen Kegels. Hierbei zeichnet ein unten am Stabe befestigtes Stück Kreide auf der schwarzen Grundplatte einen Kegelschnitt auf, dessen einer Brennpunkt nach dem Dandelin'schen Satze mit dem Punkte zusammenfällt, in dem die Kugel die Platte berührt. Zapfen und Bügel sind durch Schrauben feststellbar; der erstere durch eine seitlich in die Kugel eingelassene Flügelschraube.

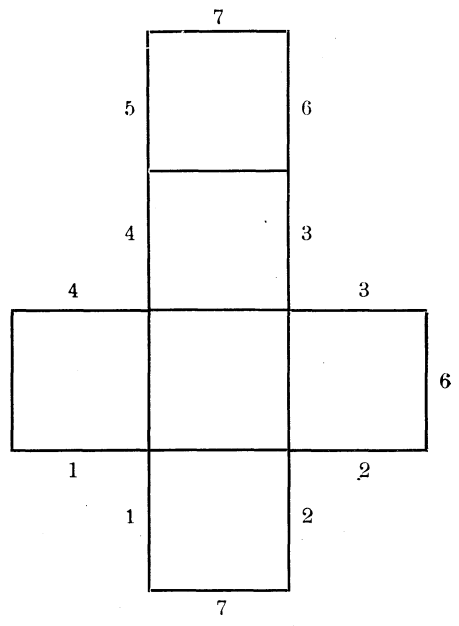
Je nach der Stellung der Axe und des Bügels erhält man sonach verschiedenartige Formen von Kegelschnitten, und zwar nicht nur von Ellipsen, sondern auch von Parabeln und Hyperbeln. Für den Fall einer Parabel muss der Stab nach halber Umdrehung parallel zur Grundplatte, also horizontal liegen. Stellt man Stab und Axe einander parallel, so geht der Kegel in einen Cylinder über.

Die Kegelschnitte werden in zwei Hälften gezeichnet. Man lockert die Schraube, welche den Stab für gewöhnlich an der Hülse feststellt, setzt das untere Ende des Stabes mit der Kreide auf den der Kugel zunächst liegenden Scheitel der zu zeichnenden Curve und dreht den Bügel, ohne

den Stab selbst zu berühren, zuerst nach der einen Seite um die Kugel herum. Sodann zieht man den Stab genügend aus der Hülse heraus, führt ihn auf den Ausgangspunkt zurück und zeichnet auf dieselbe Weise die andere Hälfte der Curve. Nur dann, wenn die Kegelaxe zur Grundfläche sehr geneigt ist, besonders beim Zeichnen von Parabeln und Hyperbeln, empfiehlt es sich, den Stab unten leicht mit der Hand zu führen.

Das Modell veranschaulicht hiernach nicht nur die gegenseitigen Beziehungen zwischen Kugel, Tangentialkegel (bezw. -Cylinder) und Kegelschnitt, sondern es führt auch die betreffenden Curven anschaulich vor Augen. Es dürfte das erste Modell sein, welches beide Forderungen in befriedigender Weise erfüllt, und ein wertvolles Hilfsmittel bilden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie, insbesondere auch in der Central- und Parallelprojection der Kugel, sowie in der Schattenconstruction derselben bei Central- und Parallelebeleuchtung.

Modelle Nr. 4 u. 5. Ein vierdimensionales Gebilde kann weder plastisch ausgeführt noch anschaulich vorgestellt werden. Es kann jedoch der Anschauung nahe gebracht werden durch dreidimensionale Gebilde, die in analogen Beziehungen zu ihm stehen wie gewisse zweidimensionale Gebilde zu einem dreidimensionalen, z. B. wie der ebene Schatten eines Würfels zu diesem selbst. Am einfachsten dienen dazu die dreidimensionalen Projectionen (Serie XV, Nr. 1—7). Man denkt sich hierbei das vierdimensionale Gebilde ausgeführt und auf den dreidimensionalen Raum wirkend. Dahin gehört auch der originelle „Octocub im dreidimensional gepressten Zustande“ von Ernst Schröder (Algebra der Logik. I. S. 677).



Den umgekehrten Weg zur Veranschaulichung gehen die vorliegenden beiden Modelle. Ihnen liegt die Annahme zugrunde, dass das vierdimensionale Gebilde aus drei-

dimensionalem Material erst erzeugt werden soll, sie bilden das Modelliernetz in einfachster Anordnung und bieten eine durch Analogien leicht verständliche Anweisung zur Erzeugung.

Um aus den umstehenden Netze einen Würfel zu erzeugen, könnte folgende Anweisung dienen:

Man biege die Bestandteile (Quadrate) des zweidimensionalen Netzes, ohne sie zu verzerren, so in die Richtung der dritten Dimension, dass die gleichbezeichneten Kanten sich decken.

Dem analog müsste zu den vorliegenden Modellen folgende Anweisung gegeben werden:

Man biege die Bestandteile (Tetraeder, Würfel) des dreidimensionalen Gebildes, ohne sie zu verzerren, so in die Richtung der vierten Dimension, dass die gleichbezeichneten (gleichfarbigen) Flächen sich decken.

Diese Anweisung kann zwar in unserem dreidimensionalen Raume nicht befolgt werden, aber gerade in dem Versuche, sie zu befolgen, liegt die Belehrung. Besonders hübsch ist an dem zweiten Modell die Art und Weise ersichtlich, wie der achte Würfel den Schlusstein des Ganzen bildet, entsprechend dem obersten Quadrat in der nebenstehenden Figur.

Würde man die dreidimensionalen Netze im dreidimensionalen Raume mit gleichmässiger Verzerrung der Bestandteile so biegen, dass die gleichfarbigen Flächen sich deckten, so erhielte man eine dreidimensionale Projection.

Die Modelle sind aus Carton hergestellt und mit farbigen Papieren überzogen.

Modell Nr. 6. Wenn drei Punkte A, B, C einer Geraden von drei zugehörigen Punkten einer anderen Geraden dieselben Abstände behalten, so hat jeder andere Punkt M der Geraden AB auch eine bestimmte gleichbleibende Entfernung von dem zugehörigen Punkte M_1 der Geraden A_1B_1. Die Doppelverhältnisse (M, A, B, C) und (M_1, A_1, B_1, C_1) sind gleich, und die Punkte M und M_1 entsprechen sich also homographisch. Es gibt nun einen Punkt P auf der Geraden AB, dessen zugehöriger Punkt P_1 auf der Geraden A_1B_1 unendlich weit entfernt ist. Wenn man nun die Gerade A_1B_1 festlegt, so beschreiben alle Punkte M der Geraden AB Kugeln oder Kugelzonen, deren Mittelpunkt M_1 auf der Geraden A_1B_1 liegen. Im besonderen beschreibt der Punkt P eine Ebene, die senkrecht zu A_1B_1 liegt. Auf diesem Lehrsatz des Professors Darboux in Paris beruht der vorliegende Planigraph. Professor

Koenigs hat daraus den anderen Satz abgeleitet, dass man vermittelst eines geeigneten Gelenksystems jede algebraische Raumcurve oder Fläche beschreiben, ja alle algebraischen Beziehungen zwischen mehreren Punkten oder mehreren festen Körpern darstellen kann.

Um zwei Punkte A und A_1 in derselben Entfernung voneinander festzuhalten, sind an den Enden eines Stabes AA_1 drehbare Ringe mit Gabeln angebracht, die wieder an drehbaren Ringen der Stäbe AB und A_1B_1 befestigt sind. Durch diese doppelte Cardanische Aufhängung erreicht man eine feste Entfernung der Punkte A und A_1, B und B_1 und C und C_1. Der Stab A_1B_1 ist senkrecht auf einem Dreifuss befestigt. Die Spitze des Stabes AB stellt den Punkt P dar, der bei der Bewegung des Systems auf einer Ebene bleibt, z. B. einer Tischplatte, auf die das Modell gestellt wird.

Siehe Koenigs, Leçons de Cinematique, pag. 295, Paris 1897.

Veröffentlicht 1906 u. 1908.

Serie XXXIII.

Drei Faden-Modelle der Discriminantenfläche der Gleichungen vierten und fünften Grades.

Nr. 1. **Modell der Discriminantenfläche der Gleichung fünften Grades in der Normalform** $u^5 + 10xu^3 + 5yu + z = 0$. Auf Anregung von Professor *O. Bolza* ausgeführt im mathematischen Seminar der Universität Chicago von Fräulein Dr. *Mary Emily Sinclair* in Oberlin. (Grösse 26×26×21 cm.) Mark 48.—.

„ 2 und 3.* **Modelle der Discrimantenfläche der Gleichungen vierten Grades.** Auf Anregung von Geheimrat Professor Dr. *F. Klein* in Göttingen ausgeführt von *Roderich Hartenstein* in Göttingen, herausgegeben unter Mitwirkung von Professor Dr. *Fr. Schilling* in Danzig.

Nr. 2. (Grösse 31,5×31,5×27 cm.) Mark 66.—.

„ 3.* (Grösse 32,5×31×28 cm.) Mark 75.—.

Modell Nr. 1. Durch eine reelle Tschirnhausen'sche Transformation kann man im allgemeinen jede Gleichung fünften Grades in die Normalform

$$u^5 + 10xu^3 + 5yu + z = 0$$

bringen. Diese Gleichung stellt ein System von Ebenen dar, für die u die Parameter des Systems und x, y und z die Koordinaten der Punkte einer Ebene sind. Wenn wir u aus der oberen Gleichung und ihrer in bezug auf u abgeleiteten eliminieren, erhalten wir die Gleichung einer abwickelbaren Fläche, welche die Discriminantenfläche der Gleichung darstellt. Diese Fläche teilt den Raum in fünf Bereiche. Die Punkte des ersten Bereichs entsprechen den Gleichungen mit nur einer reellen Wurzel; die des 2., 3. und 4. Bereichs den Gleichungen mit drei reellen Wurzeln; die des 5. Bereiches den mit fünf reellen Wurzeln. Die Punkte der Fläche selbst stellen die Gleichungen mit Doppelwurzeln dar, wobei die Punkte der Schnittcurve der Fläche mit sich selbst den Gleichungen mit zwei Paar gleichen und die der Rückkehrkante den Gleichungen mit drei gleichen Wurzeln entsprechen.

Eine ausführliche Abhandlung in englischer Sprache wird beigefügt.

Modelle Nr. 2 u. 3. Die allgemeine Gleichung vierten Grades lässt sich durch eine einfache Transformation in die Form überführen:

$$f(t) = t^4 + 6a_2\ t^2 + 4a_3\ t + a_4 = 0.$$

Deutet man a_2, a_3, a_4 als rechtwinkliche Raumkoordinaten x, y, z, so stellt diese Gleichung eine Schar von Ebenen mit dem Parameter t dar. Die Enveloppe dieser Ebenenschar ist eine abwickelbare Fläche fünfter Ordnung, die „Discriminantenfläche der Gleichung". Die Fläche hat in ihrer Symmetrieebene als Doppelcurve eine Parabel und ihre Rückkehrkante, deren Punkte als Schnitt je dreier unendlich benachbarten Ebenen bestimmt sind, wird durch die Gleichungen gegeben:

$$x = -t^2,\ y = 2t^3,\ z = -3t^4.$$

Die Fläche zerlegt den ganzen Raum in drei Gebiete, von deren Punkten aus vier, zwei oder keine Schmiegungsebene an die Rückkehrcurve gelegt werden können, entsprechend den Zahlen reeller Wurzeln, die bei einer Gleichung vierten Grades auftreten können. Die allgemeinen Punkte der Discriminantenfläche entsprechen Gleichungen mit einer reellen Doppelwurzel, und die Punkte der Rückkehrcurve Gleichungen mit einer dreifachen Wurzel, die Spitze der Rückkehrcurve endlich der Gleichung $t^4 = 0$ mit der vierfachen Wurzel null.

Diese Verhältnisse werden durch das erste Modell veranschaulicht.

Das zweite Modell enthält ausser der Discriminantenfläche noch zwei ihrer Schmiegungsebenen, die den Werten $\pm t_0$ entsprechen. Hierdurch wird der ganze Raum in neun wesentlich verschiedene Gebiete geteilt, die einen Überblick über die Gleichungen vierten Grades im Hinblick auf die Anzahl der reellen Wurzeln zwischen $\pm t_0$ gestatten.

Eine ausführliche Abhandlung wird beigefügt.

Veröffentlicht 1908 u. 1909.

Serie XXXIV.

Die Singularitäten von Raumcurven.

Neun Modelle aus Carton.

Unter Leitung von Professor **H. G. Zeuthen**

ausgeführt von

Fräulein **Helga Lund,** cand. math., Kopenhagen.

Grösse ca. 16×21 cm.

Preis für alle neun Modelle zusammen in Mappe 40 Mark.

Die Modelle stellen in einer neuen Art die acht verschiedenen Singularitäten der Raumcurven (die eine in zwei verschiedenen Fällen) mit ihren Tangenten und abwickelbaren Flächen dar und bilden zugleich eine wertvolle Ergänzung der Serie XI. Während bisher derartige Curven durch gebogene Drähte, vermittelst Seidenfäden oder auf Körpern veranschaulicht wurden, bilden hier die Schnitte von Cartonblättern die Raumcurven, und Gerade, die auf den Blättern eingeritzt sind, die Tangenten. Die ersten Modelle sind in ähnlicher Weise schon vor einer längeren Reihe von Jahren durch Dr. Crone und Ingenieur Malthe Bruun in Kopenhagen angefertigt. Die Herausgeberin hat die Modelle in ihrer Gestalt wesentlich verbessert und auf alle Fälle der Singularitäten von Raumcurven ausgedehnt.

In der Erläuterung, die den Modellen beigefügt wird, ist auch eine Übersicht enthalten, die über die verschiedenen bemerkenswerten Verhältnisse der einzelnen Fälle, auch über die Form von Nachbarschnitten und über die Lage der Raumwinkel, in die die Curven sich fortsetzen, Aufschluss gibt.

Veröffentlicht 1908.

Serie XXXV.

Reducierte Kreisbogenvierecke, 27 Carton-Modelle

unter Mitwirkung von Professor Fr. Schilling in Danzig
ausgeführt von
Dr. **W. Ihlenburg** in Ehrenbreitstein.

In Buchform auf 15 Tafeln mit 4 Seiten Text 12 Mark.

Diese selbständige Serie von 27 Carton-Modellen soll zugleich als Ergänzung der Dissertation des Herausgebers „Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke, Göttingen 1909“ dienen.

Unter einem Kreisbogenviereck verstehen wir eine in einer Ebene ausgebreitete, einfach zusammenhängende, von vier Kreisbogen begrenzte Fläche. Zunächst werden durch vier Modelle die Erweiterungsprozesse veranschaulicht, welche von den „reducierten“ Kreisbogenvierecken zu den „erweiterten“ führen, nämlich die polare Einhängung einer Kreisscheibe, die diagonale Einhängung einer Vollebene, die transversale Einhängung eines Kreisringes und die laterale Anhängung einer Kreisscheibe. Die reducierten Vierecke lassen sich nun durch Ungleichheitsbedingungen für die Winkel in vier Gruppen einteilen. Diese vier Gruppen werden dann in ihren verschiedenen Unterfällen durch die übrigen 23 Modelle veranschaulicht.

Die Tafeln lassen sich durch Lösen einer Schnur leicht voneinander trennen, so dass sie auch einzeln beim Unterricht vorgelegt werden können.

Veröffentlicht 1909.

Serie XXXVI.

Vier Modelle zur Darstellung affiner Transformationen von Punktsystemen in der Ebene und im Raume.

Unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Danzig
herausgegeben von
Geheimrat Professor Dr. **F. Klein** in Göttingen.

Nr. 1. Sieben Nürnberger Scheren und zwar je zwei 8- und 6-gliedrige und je eine 4-, 3- und 2-gliedrige, nebst 12 federnden Stiften zum Zusammenstecken der Scheren zum ebenen affinen System und 12 Unterlagsplättchen. Mark 36.—.

„ 2. Ebene Vereinigung Nürnberger Scheren in Gestalt eines Dreiecks mit Parallelen zur einen Seite. Mark 30.—.

„ 3. Räumliche Vereinigung 2-gliedriger Nürnberger Scheren in den Kanten eines Tetraeders. Mark 27.—.

„ 4.* Räumliche Vereinigung Nürnberger Scheren in Gestalt eines Tetraeders mit Parallelebenen zur einen Fläche. Mark 65.—.

Preis der ganzen Serie 158 Mark.

Affin veränderliche Systeme sind bekanntlich nicht nur für die reine Geometrie, sondern auch für die verschiedensten Teile der Mechanik, insbesondere für die Mechanik der Continua von grundlegender Wichtigkeit. Geometrisch kann man am einfachsten das affin veränderliche, ebene oder räumliche System dargestellt denken durch drei zu einem Dreieck bzw. sechs zu einem Tetraeder vereinigte ähnlich-veränderliche Punktreihen. Man braucht dann für den weiteren Aufbau nur noch beliebig weitere solche Punktreihen gleichsam einzuspannen, von denen eben die einzelne zwei der bereits vorhandenen Punkte verbindet. Ein einfacher Mechanismus, der die Ähnlichkeitstransformation discreter Punkte S_i einer (gedachten) Geraden g verwirklicht, wird nun durch die „Nürnberger Schere“ geliefert. Im gewöhnlichen Falle der Nürnberger Schere wird diese Gerade g durch die gemeinsame Diagonale

der einzelnen Parallelogramme gegeben. Wir können also die affine Transformation discreter Punkte einer Ebene dadurch erzeugen, dass wir zunächst zwei Nürnberger Scheren mit einem der Gelenkpunkte S_i gelenkig verbinden und dann suczessive zwischen je zweien der bereits erhaltenen Punkte S_i eine neue Schere einspannen.

So bekommt man in einfachster Weise einen organischen Aufbau der affinen Geometrie, indem man eben die Verbindung zweier Punkte durch eine Gerade sich nicht durch eine am Lineal gezogene Linie oder durch einen gespannten Faden, sondern allemal durch eine Nürnberger Schere ausgeführt denkt.

Des Näheren vgl. den Aufsatz mit gleicher Überschrift in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 58, S. 311 ff., 1910.

Veröffentlicht 1910.

Serie XXXVII.

Die vier regelmässigen Sternvielflache

als Papp-Modelle herausgegeben von

Professor Dr. **Fr. Schilling**

und

Assistenten Dr. **Otto Wiesing,** an der Kgl. Techn. Hochschule in Danzig.

Nr. 1—4. Grösse I. Höhe ca. 20 cm. **Preis der ganzen Serie 105 Mark.**
„ 1—4. Grösse II. „ „ 25 „ „ „ „ „ **140** „

Modell Nr. 1.* Das sterneckige Zwölfflach (great dodecahedron [Cayley]) besitzt 12 Fünfecke erster Art und 12 fünfkantige Ecken zweiter Art (Sternecken) (12_5, 12_5*). Es entsteht aus dem Ikosaeder erster Art als äusserem Kern: seine 12 Flächen werden nämlich durch die Diagonalfünfecke erster Art, seine 12 Ecken und 30 Kanten durch die Ecken und Kanten des Ikosaeders gebildet. Der innere Kern ist das Dodekaeder erster Art.

Modell Nr. 2. Das zwölfeckige Sternzwölfflach (small stellated dodecahedron [Cayley]) besitzt 12 Fünfecke zweiter Art (Sternfünfecke) und 12 fünfkantige Ecken erster Art (12_5*, 12_5). Es entsteht aus dem Ikosaeder erster Art als äusserem Kern: seine 12 Flächen werden nämlich durch die Diagonalfünfecke zweiter Art, seine 12 Ecken und 30 Kanten durch die Ecken und Nebendiagonalen des Ikosaeders gebildet. Der innere Kern ist wieder das Dodekaeder erster Art.

Modell Nr. 3. Das sterneckige Zwanzigflach (great icosahedron [Cayley]) besitzt 20 Dreiecke und 12 fünfkantige Ecken zweiter Art (20_3, 12_5*). Es entsteht aus dem Ikosaeder erster Art als äusserem Kern: seine 20 Flächen werden nämlich durch die gleichseitigen Diagonaldreiecke, seine 12 Ecken und 30 Kanten durch die Ecken und Nebendiagonalen des Ikosaeders gebildet. Der innere Kern ist das Ikosaeder erster Art, zum äusseren Kern ähnlich und ähnlich gelegen.

Modell Nr. 4. Das zwanzigeckige Sternzwölfflach (great stellated dodecahedron [Cayley]) besitzt 12 Fünfecke zweiter Art und 20 dreikantige Ecken (12_5^*, 20_3). Es entsteht aus dem Dodekaeder erster Art als äusserem Kern: seine 12 Flächen werden nämlich durch die Diagonalfünfecke zweiter Art, seine 20 Ecken und 30 Kanten durch die Ecken und diejenigen Nebendiagonalen des Dodekaeders gebildet, welche jedesmal von einer Ecke desselben nach den drei der Gegenecke benachbarten Ecken hingehen. Der innere Kern ist das Dodekaeder erster Art, zum äusseren Kern ähnlich und ähnlich gelegen.

Sämtliche vier Modelle sind aus gelber lackierter Pappe gefertigt; die 30 Hauptkanten jedes Vielflachs sind mit schwarzer, die beim ersten und dritten Vielflach ausserdem auftretenden Nebenkanten mit roter Farbe bezeichnet.

Vgl. die folgenden Arbeiten, in denen die weitere Literatur sich angegeben findet:

Chr. Wiener, Über Vielecke und Vielflache, Leipzig 1864; sowie Lehrbuch der darstellenden Geometrie I, Leipzig 1884, S. 135 ff.

Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1876, S. 1—92.

M. Brückner, Vielecke und Vielflache, Leipzig 1900 (insbesondere S. 176 ff.).

Veröffentlicht 1910.

Serie XXXVIII.

Nr. 1.*

Modell zur Theorie des Nullsystems,

herausgegeben von

Dr. **Fr. Schilling,** Professor a. d. Kgl. Technischen Hochschule in Danzig.

Höhe ca. 35 cm. Mark 40.—.

Ein anschauliches Modell zur Theorie des Nullsystems dürfte besonders willkommen sein. Ist doch das Nullsystem abgesehen von seiner rein geometrischen Bedeutung in zahlreichen Anwendungen der Mathematik von grundlegender Wichtigkeit. Wir begnügen uns, in dieser Hinsicht auf die Liniengeometrie, speciell den linearen Complex, auf sich gegenseitig ein- und umbeschriebene Polyeder, auf die Kinematik des Raumes einerseits, die räumlichen Kräftesysteme andererseits, kurz auf die Schraubentheorie, ferner auf die reciproken Figuren der Fachwerkstheorie hinzuweisen, sämtlich Gebiete, die in engster Beziehung zum Nullsystem stehen und deren Entwicklung mit den Namen Poinsot, Möbius, Chasles, Plücker, Klein, Cremona und vielen anderen verknüpft ist. Auf Einzelheiten können wir hier natürlich nicht eingehen. Es sei jedoch die Gleichung genannt:

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0,$$

die jedem Punkte (x', y', z') seine Nullebene in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme zuordnet.

In dem Modell ist insbesondere die Constante k gleich 4 cm gewählt. Das Modell zeigt im einzelnen die Centralaxe; eine Senkrechte an einer die Centralaxe umfassenden Hülse kann in jede Lage zur Axe (innerhalb der Begrenzung des Modells) gebracht werden und auf dieser Senkrechten lässt sich der Nullpunkt mit seiner zugehörigen Nullebene der obigen Gleichung gemäss verschieben. In der Nullebene sind die Nullinien durch das Strahlbüschel des Nullpunktes angegeben. Der Nullpunkt selbst kann also an jede Stelle des Raumes in der Umgebung der

Centralaxe gebracht werden. Hinzugefügt ist auch noch die Normale zur Nullebene im Nullpunkte, d. h. die jedesmalige Tangentenrichtung der zum Nullsystem gehörenden Schraubung.

Wählt man jene Senkrechte zur Centralaxe selbst als x'-Axe, so geht die obige Gleichung für $y' = z' = 0$ über in

$$\frac{z}{y} = \frac{x'}{k} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x'}{k},$$

wo φ den Neigungswinkel der (durch die x'-Axe gehenden) Nullebene gegen die (x', y')-Ebene bedeutet. Auf der Senkrechten sind dieser Gleichung gemäss die Abstände

1,45 2,31 3,36 4,76 6,93 10,99 22,68 cm

noch besonders angegeben, für die der Winkel φ bzw. die Werte 20^0 30^0 40^0 50^0 60^0 70^0 80^0 annimmt.

Schliesslich sei, besonders der genauen Literaturangaben wegen, auf die Darstellung des Nullsystems in den Lehrbüchern: K. Zindler, Liniengeometrie mit Awendungen, Sammlung Schubert, Bd. 34, Leipzig 1902 und H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, und von demselben, Theorie der Kräftepläne, Leipzig 1910, hingewiesen.

Veröffentlicht 1910.

Serie XXXIX.

Nr. 1.*

Erzeugung des Rotationshyperboloids durch Rotation einer Geraden oder einer auf der Fläche gelegenen Raumcurve.

Unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Danzig,
herausgegeben von
Dr. **Karl Doehlemann,**
Professor an der Universität in München.

Grösse 41×30 cm. **Mark 60.—.**

Zwei windschiefe Gerade a, b mögen den kürzesten Abstand $A\,B$ haben, wobei A auf a, B auf b liegt. Lassen wir die Gerade b um a als feste Axe rotieren, so beschreibt b ein Rotationshyperboloid, bekanntlich die einzige Umdrehungsfläche, welche Gerade enthält. Ihr Schnitt mit einer durch die Axe a gehenden Ebene ist eine Hyperbel, deren imaginäre Axe auf a liegt, während die Orthogonalprojection der beiden zur Schnittebene parallelen Lagen von b auf diese Ebene die Asymptoten dieser Hyperbel liefert. Der Endpunkt B des kürzesten Abstandes AB beschreibt bei der Rotation den Kehlkreis des Hyperboloids. AB gibt natürlich auch die Länge der reellen Halbaxe der Schnitt-Hyperbel.

Im Modell ist nun diese Hyperbel in eine Celluloid-Platte eingeschnitten, während die Geraden a und b mit ihrem kürzesten Abstande AB durch Messingstäbe dargestellt werden. Dreht man an der am oberen Ende der Axe a befindlichen Kurbel des Modelles, so zieht

sich die Gerade b diesem Schlitz entlang durch die Platte hindurch. Gleichzeitig bildet sich bei einer einigermassen schnellen Drehung auch ein Bild der Fläche aus.

An Stelle der mit einer Hülse auf AB aufgesetzten Geraden b kann in gleicher Weise auch eine ganz beliebige, irgendwie auf dem Rotationshyperboloid verzeichnete Raumcurve mit a in feste Verbindung gebracht werden. Auch diese Raumcurve zieht sich bei der Drehung dann durch den Schlitz hindurch, und veranschaulicht somit ebenfalls das Hyperboloid als Umdrehungsfläche.

Veröffentlicht 1911.

Serie XL.

Gips-Modelle von Flächen constanter Breite.

Unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Danzig,
herausgegeben von
Professor Dr. **Ernst Meissner** in Zürich.

Nr. 1—3. Grösse jedes Modelles 12×12×12 cm.

Preis der drei Modelle mit dem Messapparat und sechs Cylindern aus Pausleinen Mark 40.—.

Modell Nr. 1 stellt eine algebraische Rotationsfläche constanter Breite $b = 12$ cm dar. Der Meridian hat die Parametergleichungen

$$x = p(u) \cdot \cos u - p'(u) \cdot \sin u,$$
$$y = p(u) \cdot \sin u + p'(u) \cdot \cos u,$$

wobei $p(u) = \frac{b}{2}\left(1 + \frac{1}{8}\cos(3u)\right)$,

$$p'(u) = \frac{dp(u)}{du} \text{ ist.}$$

Modell Nr. 2* ist die Rotationsfläche des Reuleaux'schen Kreisbogendreiecks. Bei diesem gleichseitigen Kreisbogendreieck hat jeder Bogen sein Centrum in der gegenüberliegenden Ecke. Eine Symmetrieaxe ist die Rotationsaxe. Die Fläche setzt sich aus einer Kugel- und einer Ringfläche zusammen, und besitzt eine Spitze und eine kreisförmige Kante, beide von maximaler Schärfe.

Modell Nr. 3 gibt ein Beispiel einer Fläche constanter Breite, die nicht Rotationsfläche ist. Man lege durch je drei Ecken eines regulären Tetraeders $A\,B\,C\,D$ die Kugel mit der vierten Ecke als Centrum. Durch Abrunden dreier Kanten des tetraederartigen, gemeinsamen Raumes der vier Kugeln ergibt sich die Modellfläche. Abrundende Fläche einer

Kante AB ist dabei die Ringfläche mit AB als Axe, deren Meridiankreis durch AB geht und seinen Mittelpunkt auf der gegenüberliegenden Kante CD des krummflächigen Tetraeders besitzt.

Flächen constanter Breite b sind solche convexe, geschlossene Flächen, bei denen je zwei parallele Stützebenen denselben Abstand b besitzen. Sie lassen sich daher zwischen zwei solchen Ebenen noch so mit fünf Freiheitsgraden bewegen, dass sie beide Ebenen dabei beständig berühren.

Jede Normale einer Fläche constanter Breite ist Binormale, d. h. tritt eine Gerade auf der einen Seite normal in die Fläche ein, so tritt sie auf der andern Seite auch normal aus der Fläche heraus. Nach Minkowski sind die Flächen constanter Breite identisch mit den Flächen constanter Profillänge. Dabei heisst Profil der Fläche in irgend einer Richtung die Umrisscurve der Orthogonalprojection der Fläche aus dieser Richtung. Man kann somit aus biegsamem, undehnbarem Material einen Cylinder herstellen, der sich in allen Richtungen so über die Fläche stülpen lässt, dass er stets knapp an sie anschliesst. Den Modellen sind zur Demonstration dieser Eigenschaft sechs Cylinder aus Pausleinen beigegeben. Auch ist ein Messapparat zur Controlle der Breite beigefügt, der aus einem mit Stoff überzogenen Holzuntersatz mit zwei verticalen Stützen in der Entfernung von 12 cm besteht.

Näheres über Flächen constanter Breite mit genauer Angabe weiterer Literatur wird unter demselben Titel in der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlicht; ein Separatabzug wird den Modellen beigegeben.

Veröffentlicht 1911.

Zweiter Teil.

Anordnung der Modelle

nach

ihrer sachlichen Zusammengehörigkeit.

Zweiter Teil.

Erklärung der nachfolgend gebrauchten Abkürzungen.

1. Die der laufenden Nummer in Klammern beigefügten Zahlen geben die Serie und Nummer aus dem ersten Teil des Katalogs an. Die Klammer am Schluß enthält die Größe des Modells in cm.
2. Das Zeichen ° an der laufenden Nummer bedeutet, daß das Modell nicht einzeln abgegeben wird, sondern nur mit den anderen Modellen derselben Serie oder Gruppe zusammen.
3. Die Buchstaben (B), (D), (K), (S), (W), (Sg) bedeuten: hergestellt unter Leitung oder auf Anregung von Prof. Brill, jetzt in Tübingen, Prof. Dyck in München, Prof. Klein, jetzt in Göttingen, Prof. Schwarz, jetzt in Berlin, † Geh. Hofrat Wiener in Karlsruhe, Prof. Fr. Schilling, jetzt in Danzig.
4. Die Modelle sind, wo nichts anderes angegeben ist, aus Gips angefertigt.

I. Flächen zweiter Ordnung.

a) Ellipsoide.

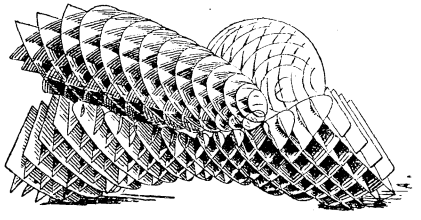
1. (XXIII, 1a.) **Dreiaxiges Ellipsoid** mit den drei Ellipsen der drei Hauptschnitte und einer Anzahl ebener Schnitte, deren Ebenen auf der größten Axe senkrecht stehen. (10×8×6 cm.) . . . Mk. 1.80.

2. (III, 1.) **Dasselbe** mit Angabe der Hauptschnitte; Axenverhältn. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:\sqrt{1}$, grosse Halbaxe 5 cm. (B). (10×6 cm.) Mk. 1.60.

3. (III, 3.) **Dasselbe;** grosse Halbaxe 9 cm. (B). (18×11 cm.) . . Mk. 2.25.

4. (X, 13.) **Dasselbe;** Axenverhältniss 3:2:1, grosse Halbaxe 17 cm. (B). (17×6 cm.) Mk. 1.40.

5. (X, 3.) **Dasselbe,** längs eines Kreisschnittes in 2 Teile zerlegbar, (B). (13×7 cm.) . . . . . Mk. 4.75.



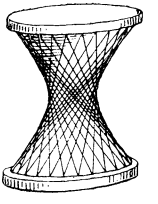
6°. (Cart.-S., 1.) **Dreiaxiges Ellipsoid** aus 22 kreisförmigen Cartonscheiben zusammengefügt. Dieses mittelst Druck veränderliche Modell stellt bei jeder Lage der Scheiben ein Ellipsoid dar. Construiert nach Angabe von Prof. Dr. *A. Brill.*

(Diese Bemerkungen gelten für alle Cartonmodelle; Erläuterung hierzu von dem Urheber wird denselben beigegeben.)

7°. (Cart.-S., 2.) **Dasselbe,** anderer Construction, gebildet aus 30 Kreisen.

Modelle von Ellipsoiden mit Krümmungslinien und geodätischen Linien sind in den Abschnitten VII, b u. d unter Nr. 178—180 u. 213—219 aufgeführt.

b) Hyperboloide.

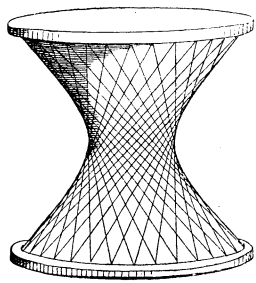


8. (XXIII, 2.) **Einschaliges Hyperboloid** mit Geraden der beiden Scharen von Erzeugenden. Die Innenwandung des Modells enthält den Asymptotenkegel mit den beiden Hauptschnitten. (Höhe 12 cm.) Mk. 2.60.

9. (XXIII, 6.) **Fadenmodell eines veränderlichen einschaligen Umdreh-Hyperboloids**

mit zwei Scharen von Erzeugenden. Dadurch, dass die Schnittpunkte beider Scharen von Erzeugenden mit dem einen Begrenzungskreis festgehalten werden, während in dem anderen die Schnittpunkte der einen Schar gegen die der zweiten Schar gedreht werden, ändert das Hyperboloid seine Gestalt zwischen Cylinder uud Kegel als Grenzlagen. Mk. 3.20.

10. (III, 5.) **Einschaliges Hyperboloid** mit Angabe der Hauptschnitte. Die Höhlung des Gipsmodells hat die Gestalt des zugehörigen Asymptotenkegels (Nr. 41). Grosse Halbaxe der Kehlellipse 4 cm. (B). (23×14 cm.) Mk. 9.50.



11. (III, 6.) **Dasselbe** mit den beiden Scharen der Erzeugenden (B). (23×14 cm.) Mk. 16.—.

12. (XVI, 4.) **Dasselbe**, confocal zu dem durch Nr. 180 dargestellten Ellipsoid; geht durch eine der auf dem Modelle dieses Ellipsoids zur Anschauung gebrachten Krümmungslinien hindurch. Von jeder der beiden Scharen der geradlinigen Erzeugenden sind 32 Individuen zur Anschauung gebracht. Von stud. math. *Haussner* in Göttingen (S). (Höhe 21 cm.) Mk. 15.—.

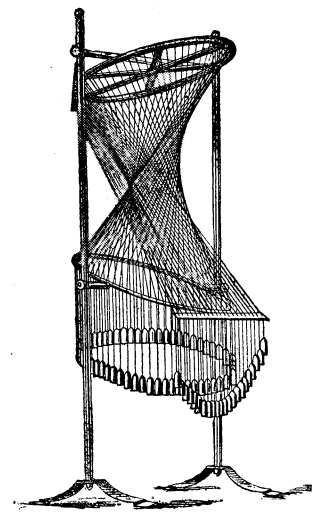
13⁰. (Cart.-S., 3.) **Einschaliges Hyperboloid** aus kreisförmigen Cartonscheiben zusammengefügt. Dieses bei Zug und Druck veränderliche Modell stellt für jede Lage der Scheiben ein Hyperboloid dar. Vergl. Nr. 6 (B).

14. (XXVI, 22.) **Einschaliges Rotationshyperboloid** mit Asymptotenkegel von Prof. *Fr. Schilling* in Danzig.

Dieses wie das folgende Fadenmodell ist besonders durch seine Grösse ausgezeichnet, die es zur Verwendung in grösseren Hörsälen brauchbar macht, sowie dadurch, dass bei seinem Aufbau nur solche Teile benutzt sind, die geometrische Bedeutung besitzen, also etwa nebensächliche Stützen des Modelles nicht vorhanden sind. (32×32×40,5 cm.) . . . . . Mk. 48.—.

15. (XXVI, 23.) **Einschaliges allgemeines Hyperboloid** mit Asymptotenkegel. (36×29×40,5 cm.) . . . . . Mk. 48.—.

16. (IV, 1.) **Einschaliges Hyperboloid,** unveränderliches Fadenmodell. Es zeigt beide Systeme von Erzeugenden nebst dem Asymptotenkegel; jedes System wird durch 64 Fäden repräsentiert. Axenverhältnis der Kehlellipse 21 : 13 (B). (14×24 cm.) Mk. 30.—.

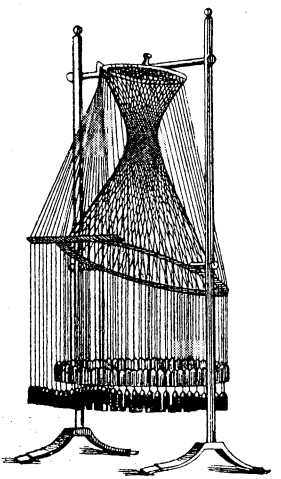


17. (IV, 2.) Veränderliches **Fadenmodell zur Darstellung des einschaligen Hyperboloids** aus seinen Erzeugenden.

Stellt man die Leitkreise parallel und dreht den einen, so durchläuft das Modell eine Reihe von Hyperboloid-Formen vom Cylinder bis zum Kegel als Grenzfall. Bei horizontaler Lage der Leitkreise sind es Umdrehungshyperboloide, bei geneigter dreiaxige.

Wenn man die Ebenen der Leitkreise gegeneinander neigt, so entsteht eine windschiefe Fläche 4. Ordnung.

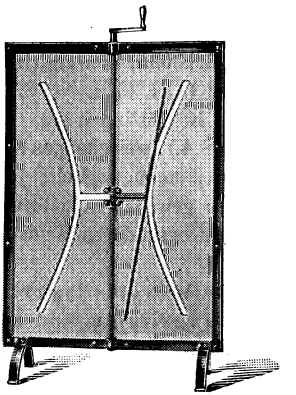
Diejenige Linienfläche, welche die an dem Modell angegebenen Kreistangenten zu Leitlinien hat, ist ein Paraboloid, das mit der durch die Leitkreise dargestellten Fläche zwei consecutive Erzeugende gemeinsam hat (vergl. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, 2. Teil, Art. 206). Beschreibung im 1. Teil, IV. Serie Nr. 2. (B). (22×55 cm.) Mk. 85.—. Dasselbe mit zwei Scharen von Erzeugenden Mk. 90.—.



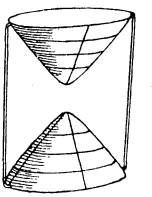
18. (IV, 3.) **Wie vorstehend,** nur sind die Leitkreise ungleich, die beiden Scharen der Erzeugenden durch Fäden dargestellt, die beiden Grenzlagen Kegel. Beschreibg. Teil I. Serie IV. Nr. 3 (B). (22,5×50 cm.) Mk. 90.—.

19. (XXXIX, 1.) **Erzeugung des Rotationshyperboloids durch Rotation einer Geraden oder einer auf der Fläche gelegenen Raumcurve.** Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Fr. Schilling in Danzig, herausgegeben von Prof. Dr. *Karl Doehlemann* an der Universität in München.

Im Modell ist die Meridianhyperbel in eine Celluloid-Platte eingeschnitten, während die Rotationsaxe *a* und die rotierende Gerade *b* mit ihrem kürzesten Abstande *AB* durch Messingstäbe dargestellt werden. Dreht man an der am oberen Ende der



Axe *a* befindlichen Kurbel des Modelles, so zieht sich die Gerade *b* diesem Schlitz entlang durch die Platte hindurch.
Grösse 41×30 cm. . . . . Mk. 60.—.



20. (XXIII, 3.) **Zweischaliges Hyperboloid** mit den Hauptschnitten und mit einer Schar paralleler ebener Schnitte, deren Ebenen auf der reellen Axe senkrecht stehen. Die beiden Schalen der Fläche sind durch Stäbchen in der richtigen Entfernung mit einander verbunden. Höhe 12 cm. Mk. 2.60.

21. (III, 8.) **Zweischaliges Hyperboloid** mit den Hauptschnitten. Den zugehörigen Asymptotenkegel zeigt Nr. 41. Reelle Hauptaxe 0,93 cm. (B). (13×23 cm.) . Mk. 16.—.

22. (XVI, 5.) **Zweischaliges Hyperboloid** mit den Hauptschnitten. Confocal zu dem durch Nr. 180 (XVI, 1.) dargestellten Ellipsoid und zu dem durch Nr. 12 (XVI, 4.) dargestellten einschaligen Hyperboloid; es geht durch eine der auf dem Ellipsoidmodelle zur Anschauung gebrachten Krümmungs-

linien hindurch Von stud. math. *Haussner* in Göttingen (S). . . . . Mk. 18.—.

23. (XVI, 8.) **Vereinigung eines einschaligen Hyperboloids mit einem confocalen zweischaligen Hyperboloid;** Durchdringung der Modelle Nr. 12 (XVI, 4) u. Nr. 22 (XVI, 5.). Von *Haussner* in Göttingen (S). Mk. 21.—.

24°. (Cart.-S. 4.) **Zweischaliges Hyperboloid** aus Cartonscheiben, beweglich; jede Hälfte aus 24 Kreisen gebildet. (Lieferung beider Schalen nur auf besonderen Wunsch.) Vergl. Nr. 6 (B).

NB. Modelle von Hyperboloiden mit Krümmungslinien sind in der Abteilung VII, b. unter Nr. 186 u. 188 aufgeführt.

c) Paraboloide.

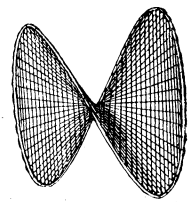
25. (XXIII, 4.) **Elliptisches Paraboloid** mit den Hauptschnitten und einer Schar von ebenen Schnitten, deren Ebenen zur Paraboloidaxe senkrecht stehen. Mk. 2.20.

26. (III, 10.) **Elliptisches Paraboloid** mit den Hauptschnitten; Halbaxen der Grundellipse 9,5 und 6 cm. (B). (6×20 cm.) Mk. 3.30.

27. (III, 11.) **Dasselbe** mit Schnitten parallel zur Berührungsebene im Scheitel (B). (6×20 cm.) . . . . . Mk. 4.50.

28°. (Cart.-S. 5.) **Elliptisches Paraboloid** aus Cartonscheiben, beweglich, 28 Kreise. s. Nr. 6 (B).

29. (XXIII, 5.) **Hyperbolisches Paraboloid** mit den Hauptschnitten und einer Schar von ebenen Schnitten, deren Ebenen zur Paraboloidaxe senkrecht stehen. . . Mk. 2.20.



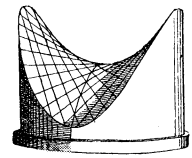
Nr. 8a.

30. 31. (XXIII, 8a u. b.) **Rechtwinkliges hyperbolisches Paraboloid.** Fadenmodell. Das Modell der Fläche ist durch die Raumcurve vierter Ordnung begrenzt, in der sie von einem Umdrehcylinder mit gleicher Axe getroffen wird, und zeigt die beiden Scharen von Erzeugenden. Zwei Ausführungen:

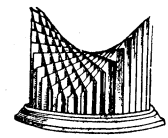
a. 12×11 cm. b. $7^1/_2$×15 cm. je Mk. 2.50.

32. (III, 13.) **Hyperbolisches Paraboloid** (gleichseitig) mit den Hauptschnitten. Durchmesser des Begrenzungscylinders 14 cm. (B). (15×13 cm) . . . . . Mk. 4.50.

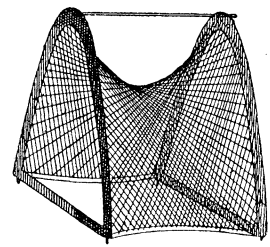
33. (III, 14.) **Dasselbe mit Horizontalschnitten** (gleichseitigen Hyperbeln) (B). (15×13 cm.) . . . . . Mk. 8.—.



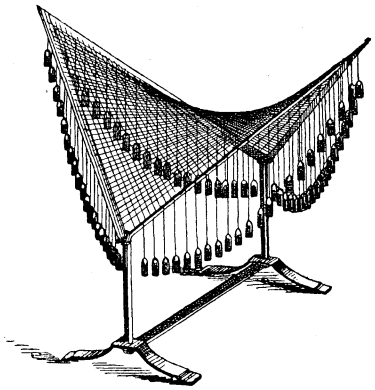
34. (III, 15.) **Dasselbe** mit den beiden Scharen von geradlinigen Erzeugenden (B). (15×13 cm.) . . . . . Mk. 6.60.



35°. (Cart.-S., 6.) **Hyperbolisches Paraboloid,** bewegliches Cartonmodell, gebildet aus 26 geradlinig begrenzten Schnitten. s. Nr. 6 (B).



36. (IV, 4.) **Hyperbolisches Paraboloid,** unveränderliches Fadenmodell. Die Seidenfäden stellen die geradlinigen Erzeugenden der beiden Scharen dar. Beschreibung Teil I, Serie IV, Nr. 4. (B). (18×30 cm.) Mk. 50.—.



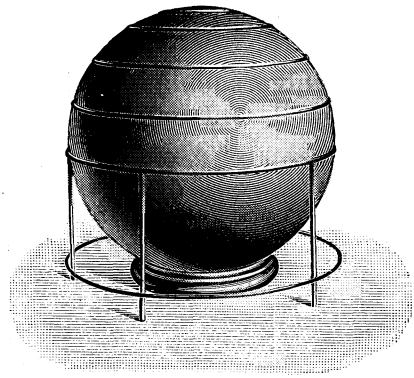
37. (IV, 5.) **Dasselbe,** durch Seidenfäden in einem windschiefen Viereck dargestellt, dessen Seiten paarweise beweglich sind. Das Modell durchläuft alle Paraboloidformen von einer Ebene bis zur Doppelebene mit einer Grenzparabel. Beschreibung Teil I, Serie IV, Nr. 5 (B). . . . . Mk. 90.—.

NB. Modelle von Paraboloiden mit Krümmungslinien sind in der Abteilung VII, b unter Nr. 189 u. 190 aufgeführt.

d) Kugel, Kegel und Zylinder.

38—40. (XXVI, 19, 20, 21.) **Kugeln** mit schwarzem Tafelanstrich und Holzuntersatz.

Die **drei Kugeln** in den verschiedenen Größen gestatten wie auf einer Wandtafel leicht die Anwendung von Kreide und Schwamm zum Zeichnen. Die zum einfachen Einzeichnen der größten Kreise dienenden Ringgestelle besitzen überdies eine Einteilung von 15 zu 15° zum Abtragen gegebener Winkel. Das Lineal, dessen Kante die Abwicklung eines größten Kreisquadranten darstellt, trägt diese gleiche Einteilung und dient ebenfalls zum bequemen Abtragen gegebener Winkel.



38. (XXVI, 19.) **Kugel vom Durchmesser 35 cm.,** mit Ringgestell, vier Ringen zum Einzeichnen kleinerer Kreise und Lineal, zusammen . . . . . Mk. 43.20.

39. (XXVI, 20.) **Kugel vom Durchmesser 14 cm.,** mit Ringgestell und einem Ringe zum Einzeichnen eines kleineren Kreises, zusammen . . . . . Mk. 12.20.

40. (XXVI, 21.) **Kugel vom Durchmesser 10 cm.,** mit Ringgestell und einem Ringe zum Einzeichnen eines kleineren Kreises, zusammen Mk. 9.50.

41. (III, 17.) **Elliptischer Kegel;** Halbaxen der Grundellipse 10,4 und 5,4 cm., Höhe 11,5 cm. Dieser Kegel ist Asymptotenkegel sowohl zum einschaligen Hyperboloid Nr. 10, wie zum zweischaligen Nr. 21 (B). (23×13 cm.) . . . . . Mk. 4.50.

42. (VI, 5.) **Kreiskegel** mit ebenen Schnitten in einer Ellipse, Hyperbel und Parabel. Nach diesen Schnitten zerlegbar. (B). (32×19 cm.) . . . . . Mk. 25.—.

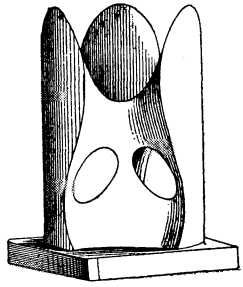
43°. (Cart.-S., 7.) **Kegel,** bewegliches Cartonmodell, gebildet aus 26 Kreisen. Vergl. Nr. 6 (B).

NB. Hierher gehört auch der gerade Kreiscylinder mit elliptischem Schnitt, Nr. 271 (XXVI, 14).

II. Algebraische Flächen dritter Ordnung.

a) Nichtgeradlinige Flächen 3. Ordnung.

Diese Serie nach Prof. Dr. C. Rodenberg umfasst alle wesentlichen Typen in dem Sinn, dass aus den modellierten durch leicht zu übersehende Gestaltsänderungen alle Formen von Flächen 3. Ord. ableitbar sind. Insbesondere bietet sie für jede Art von singulären Punkten, die auf diesen Flächen vorkommen können, ein charakteristisches Beispiel. Vergl. Rodenberg's Aufsatz: „Zur Classification der Flächen 3. Ord.", Math. Annalen Bd. XIV, pag. 46 ff. Der Serie ist eine von dem Urheber verfasste Abhandlung beigegeben.



44. (VII, 1.) Die **Diagonalfläche** mit 27 reellen Geraden (Bezeichnung von Clebsch, s. Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. R. II. Art. 289) kann als Repräsentant der allgemeinen F_3 mit 27 reellen Geraden angesehen werden. Zwar sind von den geradlinigen Dreiecken, welche die allgemeine Fläche enthält, auf dieser Fläche 10 in Punkte zusammengeschrumpft. Hiermit zugleich sind die diesen Dreiecken einbeschriebenen 10 Ovale der „parabolischen" Curve (derjenigen Curve auf der Fläche, welche die Partien positiver Krümmung von denen negativer trennt) auf Punkte (Ovalpunkte) reduciert. — Aber mit Hilfe eines Deformationsprocesses, dem eine Constanten-Aenderung der Flächengleichung parallel läuft, lässt sich aus der Diagonalfläche die (nicht so übersichtlich darstellbare) allgemeine Fläche leicht ableiten.

Solche Deformationsprocesse sind es überhaupt, die nicht nur von den hier vorliegenden Haupttypen zu allen möglichen Formen von Flächen dritter Ordnung hinführen, sondern auch den Zusammenhang zwischen den einzelnen Typen der Serie herstellen.

Die 15 roten Geraden besitzen je zwei reelle Asymptotenpunkte, d. h. unter den Kegelschnitten, nach welchen alle durch eine solche hindurchgehenden Ebenen die Fläche schneiden, befinden sich 2 reelle, diese Gerade in den vorhin genannten Punkten berührende. Die 12 weissen Geraden bilden eine Doppelsechs, auf ihnen sind die Asymptotenpunkte imaginär. Mit Ausnahme der Ovalpunkte und der erwähnten Asymptotenpunkte ist die ganze Fläche negativ gekrümmt. (15×24 cm.) . . Mk. 25.—.

45. (VII, 2.) **Fläche mit 4 reellen conischen Knotenpunkten** C_2*). Man erhält dieselbe aus der Diagonalfläche durch Zusammenziehen der 4 Hälse. Von den 27 Geraden sind 4 . 6 in die 6 Kanten des aus den Knoten gebildeten Tetraeders zusammengerückt.

Beseitigt man einen Teil der Knoten durch Abschnüren, während man die anderen wieder in Hälse verwandelt, so erhält man einen der Flächentypen mit weniger als 27 Geraden. Beim Abschnüren z. B. eines Knotens werden $4 . 3 = 12$ Gerade imaginär, man hat also den Typus einer Fläche mit nur 15 reellen Geraden u. s. f.

In die 6 roten Verbindungsstrahlen je zweier Knoten (Knotenstrahlen) sind je

*) Die Buchstaben C, B, U bedeuten conische, biplanare, uniplanare Knoten; der angehängte Zeiger gibt die Anzahl der Einheiten an, um welche die Klasse durch die betreffende Singularität erniedrigt wird.

4 Gerade hinein gefallen; die 3 weissen Geraden dagegen sind einfach (unär). Der durch die 4 Eckpunkte bestimmte tetraederförmige Flächenteil liegt ganz im Endlichen und ist positiv gekrümmt. (13×15 cm.) Mk. 12.—.

46. 47. 48. 49. (VII, 3, 4, 5, 6.) **Sämtlich collinear verwandt der Fläche Nr. 45.** Je nachdem man zur Gegenebene (Ebene, die bei der Collineation zur unendlich fernen Ebene gemacht wird) eine Ebene wählt, welche den tetraederförmigen Teil nicht trifft und die Fläche nach einer Kurve dritter Ordnung mit Oval schneidet, oder von diesem Teil eine Kuppe abtrennt, oder einen Knoten des tetraederförmigen Teils von den 3 übrigen, oder endlich 2 Knoten desselben von den 2 übrigen abschneidet, erhält man der Reihe nach aus Nr. 45 die Flächen Nr. 46, 47, 48, 49.

In den drei ersten Fällen wurde ausserdem die Gegenebene horizontal gewählt, im letzten durch eine der unären Geraden (s. Nr. 45) gelegt, so dass beim Modell Nr. 49 eine dieser 3 Geraden im Unendlichen liegt. Der tetraederförmige Teil erstreckt sich bei allen, mit Ausnahme von Nr. 46, ins Unendliche und ist immer positiv gekrümmt. (13×15 cm.) Nr. 46, 48 je Mk. 12.—, Nr. 47, 49 je Mk. 11.—.

50. (VII, 7.) **Fläche mit 3 conischen Knotenpunkten** C_2. Sie ist aus Nr. 45 direct nicht ableitbar, aber entsteht aus der Diagonalfläche durch Zusammenziehen der 3 unteren ellipsenförmigen Oeffnungen zu Knoten.

Die 3 weissen Geraden sind daher unär und besitzen reelle Asymptotenpunkte, in die blauen sind 2, in die roten (Knotenstrahlen) 4 Gerade hineingefallen. Die parabolische Curve besteht, abgesehen von den 3 als Teile derselben doppelt zählenden Knotenstrahlen, aus einer Curve sechster Ordnung mit 3 Doppelpunkten in den Knoten, deren Tangenten daselbst die blau gezeichneten Geraden sind. (11×15 cm.) Mk. 11.—.

51. (VII, 8.) **Dieselbe Fläche,** aber von der anderen Flächenseite betrachtet (der andere Raumteil ausgefüllt).

Sie veranschaulicht die Bildung des U_6 von Nr. 59 aus 3 C_2. (11×15 cm.) Mk. 11.—.

52. (VII, 9.) **Fläche mit 3 reellen biplanaren Knoten** B_3, von denen jeder die Klasse um 3 erniedrigt, und für welche sämtlich die Tangentialebenenpaare reell sind.

Die 3 verschiedenen Hauptebenen gehen durch je 2 der 3 Knotenstrahlen, in welche je 4 Gerade hineingefallen sind, und osculieren die Fläche längs derselben. Die Fläche ist durchaus positiv gekrümmt mit Ausnahme der Knotenstrahlen, welche, jeder als Teil der parabolischen Curve vierfach zählend, die parabolische Curve repräsentieren. (11×15 cm.) Mk. 10.—.

53. (VII, 10.) **Fläche mit einem biplanaren Knoten** B_3, dessen 2 Tangentialebenen (auch Hauptebenen genannt) reell sind und der die Klasse um 3 erniedrigt.

Ausser den 6 durch den B_3 gehenden, dreifach zählenden Geraden (rot), existieren noch 9 unäre (s. oben) Gerade (weiss), wovon 5 reelle, 4 imaginäre Asymptotenpunkte besitzen. Die parabolische Curve besteht aus einem paaren Zug mit 4 Schleifen und 2 Ovalen. B_3 ist ein achtfacher Punkt derselben, es gehen aber nur 4 reelle Aeste durch ihn hindurch, welche zu je zweien die beiden Hauptebenen, nicht aber die Knotenstrahlen berühren, die in denselben liegen. Die Fläche veranschaulicht die Entstehung des U_6 aus dem B_3 durch Vereinigung seiner Ebenen. (10×15 cm.) . . . Mk. 10.—.

54. (VII, 11.) **Fläche mit einem biplanaren Knoten** B_3, dessen Hauptebenen conjugiert imaginär sind.

Die parabolische Curve, welche im Allgemeinen bei Flächen mit einem solchen Knoten eine aus 3 reellen Ovalen bestehende Curve zwölfter Ordnung mit einem isolierten achtfachen Punkt im Knoten ist, degeneriert hier in eine ebene Curve dritter Ordnung und eine Raumcurve neunter Ordnung. Die Fläche enthält nur noch 3 reelle unäre Gerade mit reellen Asymptotenpunkten. (12×15 cm.) . . . . . Mk. 10.—.

55. (VII, 12.) **Fläche mit einem biplanaren,** die Klasse um 4 erniedrigenden **Knoten** B_4, mit **reellem** Hauptebenenpaar und ausserdem noch 2 reellen conischen Knoten C_2.

Diejenigen beiden grünen Geraden, welche B_4 mit je einem der C_2 verbinden, zählen achtfach; die dritte grüne Gerade, in der sich die Hauptebenen von B_4 schneiden, sechsfach; der rote Knotenstrahl vierfach; die weisse Gerade ist unär und enthält 2 reelle Asymptotenpunkte. Der zwischen den 3 Knoten gelegene Flächenteil ist (mit Ausnahme von Punkten parabolischer Krümmung) positiv gekrümmt. (13×15 cm.) Mk. 11.—.

56. (VII, 13.) **Fläche mit einem biplanaren,** die Klasse um 4 erniedrigenden **Knoten** B_4 mit **imaginärem** Hauptebenenpaar und ausserdem noch 2 imaginären conischen Knoten C_2.

Ausser der durch B_4 gehenden vierfach zu rechnenden Geraden (grün), nach welcher sich die beiden imaginären Hauptebenen daselbst schneiden, liegt noch eine die 2 imaginären Knoten verbindende vierfach zählende Gerade (rot) und, unendlich fern, die beiden eben genannten schneidend, eine unäre Gerade auf ihr. Die Fläche ist negativ gekrümmt. (13×16 cm.) . . Mk. 10.—.

57. (VII, 14.) **Fläche mit** einem conischen Knoten C_2 und **einem biplanaren** B_5, welcher ein reelles Hauptebenenpaar besitzt und die Klasse um 5 erniedrigt.

Die 2 Hauptebenen gehen durch die zehnfach zählende grüne Gerade, die eine berührt die Fläche längs derselben und schneidet sie nach der fünffach zählenden, durch B_5 gehenden weissen, die andere berührt längs der zehnfach zu rechnenden roten Geraden. Ausserdem liegt auf der Fläche noch die zweifache, durch C_2 gehende weisse Gerade. Abgesehen von, als Teile der parabolischen Curve, mehrfach zählenden Geraden (rote fünffach, grüne vierfach), ist die parabolische Curve eine Curve dritter Ordnung, welche die erstgenannte Hauptebene in B_5 zur Schmiegungsebene besitzt und in C_2 die durch denselben gehende weisse Gerade berührt. (13×15 cm.) . . . Mk. 11.—.

58. (VII, 15). **Fläche mit** einem reellen conischen Knoten C_2 und **einem biplanaren** B_6 mit reellem Hauptebenenpaar, der die Klassenzahl um 6 reduciert.

Beide Hauptebenen gehen durch die fünfzehnfach zählende grüne Gerade; die eine osculiert die Fläche längs derselben, die andere berührt längs der zwölffach zu rechnenden roten. Der zwischen den beiden Knotenpunkten liegende geschlossene Flächenteil ist positiv gekrümmt, der andere negativ. (12×15 cm.) . . . Mk. 11.—.

59. (VII, 16.) **Fläche mit einem uniplanaren,** die Klassenzahl um 6 reducierenden **Knoten** U_6, dessen Hauptebene die Fläche **in 3** achtfach zählenden roten Geraden schneidet.

Sie entsteht aus Nr. 51 durch Zusammenziehen der 3 Knotenpunkte in den U_6; die 3 unären Geraden von Nr. 51 bleiben dabei erhalten nnd besitzen ebenfalls reelle Asymptotenpunkte. Im Allgemeinen besitzt eine solche Fläche eine parabolische Curve sechster Ordnung, welche die Form eines die 3 unären Geraden berührenden Ovals besitzt. Weil aber auf dem vorliegenden Modell diese 3 Geraden sich schneiden, verschwindet dieses Oval und die Fläche ist negativ gekrümmt. (12×15 cm.) . . Mk. 11.—.

60. (VII, 17.) **Desgleichen,** jedoch schneidet die Tangentialebene im uniplanaren U_6 die Fläche nur nach einer reellen roten Geraden. Ausser dieser enthält die Fläche nur noch eine reelle unäre Gerade (weiss), welche reelle Asymptotenpunkte besitzt. Die parabolische Curve, im allgemeinen Fall eine aus 2 Ovalen bestehende, jeden Knotenstrahl in U_6 berührende Curve sechster Ordnung, ist hier in 2 ebene Curven dritter Ordnung ausgeartet, von denen jede in U_6 einen Rückkehrpunkt besitzt. (12×15 cm) Mk. 10.—.

61. (VII, 18.) **Fläche mit einem uniplanaren,** die Klasse um 7 reducierenden **Knoten** U_7, dessen Tangentialebene die Fläche längs der sechzehnfach zählenden grünen Geraden berührt und nach der zehnfachen roten schneidet.

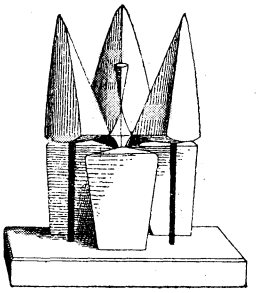
Die Tangentialebene längs der letzteren Geraden enthält die einzige unäre Gerade der Fläche mit 2 reellen Asymptotenpunkten. Die parabolische Curve ist, von den dazu gehörigen Geraden abgesehen (grüne sechsfach, rote doppelt), eine Curve vierter Ordnung, welche aus einem einzigen Oval besteht und in U_7 eine Spitze mit den grünen Geraden als Tangente daselbst besitzt. Durch diese Fläche findet der Übergang von Nr. 59 zu 60 statt. (12×15 cm.) Mk. 10.—.

62. (VII, 19.) **Fläche mit einem uniplanaren Knoten** U_8, durch welche die Klassenzahl um 8 vermindert wird.

Die Tangentialebene in U_8 osculiert die Fläche längs der einzigen siebenundzwanzigfach zählenden Geraden. Sieht man von dieser als Teil der parabolischen Curve zehnfach zu rechnenden Geraden ab, so ist die parabolische Curve ein Kegelschnitt, der in U_8 die Gerade der Fläche berührt. (12×15 cm.) . . . . . Mk. 7.50

63. (VII, 26.) Drahtmodell, darstellend die **Abbildung der Flächen mit 1, 2, 3, 4 conischen Knoten** C_2, welche einem reellen Pentaeder angehören, **auf den Punktraum.**

Im Allgemeinen läßt sich die Gleichung einer jeden Fläche dritter Ordnung als die Summe von 5 Cuben von linearen Ausdrücken in den Coordinaten darstellen, und zwar nur auf eine Weise. Diese 5 Ebenen bilden das zu dieser Fläche gehörige Pentaeder, sie bestimmen 10 Schnittgerade (Pentaederkanten), und 10 Schnittpunkte (Pentaederecken); ausserdem gibt es noch 10 Ebenen, welche je durch eine Pentaederecke und die gegenüberliegende Kante gehen (Diagonalebenen). Das vorliegende Drahtmodell stellt nun schematisch das allen Flächen mit nur conischen Knoten (Nr. 44 bis 51) gemeinsame Pentaeder dar. (Für die Diagonalfläche Nr. 44 lässt sich dasselbe sofort angeben. Die 10 Ovalpunkte dieser Fläche sind die 10 Eckpunkte des Pentaeders; die 5 Ebenen desselben sind diejenigen Ebenen, welche je 3 nicht durch einen Punkt gehende rote Gerade enthalten; die 10 Diagonalebenen sind die Tangentialebenen in den Ovalpunkten.) Die gelben Drähte sind die Kanten des Pentaeders, dazu gehört noch die in der Horizontalebene gelegene, unendlich ferne Gerade, ihre Schnittpunkte (wovon 3 im Unendlichen) die Ecken desselben; die roten Geraden Schnitte von Pentaeder- und Diagonalebenen; die grünen von Diagonalebenen mit einander. Die Diagonal- und Pentaederebenen teilen den Raum im ganzen in 15 Kammern, wovon 5 von 4 (Tetraederkammern), 10 von 5 Ebenen (Pentaederkammern) begrenzt werden. In jedem Pentaeder gibt es im Allgemeinen nur eine einzige Fläche, welche in einem gegebenen Punkt einen Doppelpunkt besitzt. Je nachdem nun dieser Punkt in verschiedenen Kammern gewählt wird, gibt es verschiedene Arten von Flächen dritter Ordnung, die durch die römischen Zahlen im Modell gekennzeichnet sind. Ausser der beiliegenden Erklärung, von Rodenberg verfasst, vergleiche dessen Abhandlung in den Mathem. Annalen Bd. 14, pag. 46ff.; bezüglich des Pentaeders ferner die Abhandlung von Clebsch im Crelle'schen Journal Bd. 59, pag. 194ff.; ferner Salmon-Fiedler, Geom. d. Raumes, II. Teil, Art. 269, 282. 2. Aufl. (14×22 cm.) . . Mk. 10.—.



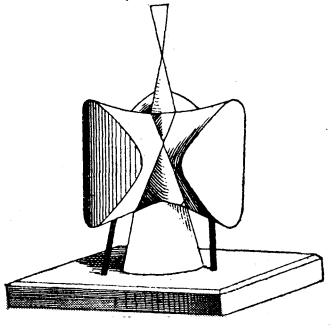
64. (VII, 24a.) **Hesse'sche Fläche zu Nr. 45 und 48.**

Sie ist eine Fläche vierter Ordnung mit 14 reellen Doppelpunkten, von denen im vorliegenden Fall 3 im Unendlichen liegen.

In den 4 Knotenpunkten der Fläche dritter Ordnung (Nr. 45), welche zugleich der Hesse'schen Fläche angehören, kommen noch diejenigen 10 Knoten hinzu, welche in den 10 Eckpunkten des ihr zugehörigen Pentaeders liegen; 6 davon sind die Schnittpunkte je einer roten und weissen Geraden (3 davon liegen im Unendlichen). Auf der Hesse'schen Fläche liegen ferner 16 Gerade, längs welchen je dieselbe Tangentialebene berührt, 10 davon sind die Kanten des der zugehörigen Fläche dritter Ordnung angehörenden Pentaeders, die 6 andern sind zugleich die 6 Knotenstrahlen der Fläche dritter Ordnung. (Wird die obige Fläche als Hesse'sche Fläche von Nr. 45 angesehen, so sind die roten Geraden auf ihr die Knotenstrahlen, die grünen Pentaederkanten, für Nr. 48 verhält es sich umgekehrt). (21×25 cm.) Mk. 45.—.

65. (VII, 24b.) Der durch die Knotenpunkte begrenzte endliche **Teil der vorhergehenden Fläche** vergrössert und regelmässig angenommen.

Derselbe würde ein Teil der Hesse'schen Fläche, einer solchen Fläche dritter Ordnung sein, für welche das Tetraeder der Knotenpunkte ein reguläres ist und bei der die Ebene der 3 unären (weissen) Geraden im Unendlichen liegt. (13×16 cm.) Mk. 11.—.



66. (VII, 25.) **Hesse'sche Fläche zu Nr. 50,** aus Zweckmässigkeitsgründen in etwas anderen Dimensionen modelliert.

Sie besitzt 13 reelle Knoten, davon 3 im Unendlichen; ferner 13 Gerade, 10 davon sind die Kanten des Pentaeders (eine ist unendlich fern), 3 die Knotenstrahlen der ihr zugehörenden Fläche 3. Ordnung. (21×25 cm.) . . . . . Mk. 40.—.

NB. Weitere, dieser Rubrik zuzurechnende Modelle finden sich unter Nr. 212 (II, 2), und Nr. 310 (XIV, 4).

b) Regelflächen 3. Ordnung, insbesondere Kegel.

67—70. (VII, 20—23.) **Gipsmodelle der Regelflächen 3. Ordnung nach Prof. Dr. C. Rodenberg.**

67. (VII, 20.) **Regelfläche,** deren Doppelgerade völlig von reellen Flächenteilen umgeben ist.

Sie wird (wie Nr. 68 und 69) durch die Verbindungsgeraden entsprechender Elemente der grünen Geraden und des auf sie projectivisch bezogenen, auf der Fläche liegenden, weissen Kegelschnittes (Kreis) gebildet und ist, wie alle Regelflächen, von derselben Klasse wie Ordnung, d. h. hier der dritten. Die grüne Gerade durchsetzt die Ebene des Kreises hier in seinem Innern. (13×15 cm.) . . . . . Mk. 15.—.

68. (VII, 21.) **Regelfläche,** wie vorher, nur verläuft die Doppelgerade zum Teil isoliert.

Sie verlässt die reellen Flächenteile in 2 Zwickpunkten*), welche auf der Fläche durch den Durchschnitt der 2 roten Erzeugenden mit der Doppelgeraden markiert werden. Diejenigen durch die grüne Gerade (hier ausserhalb des Kreises verlaufend) gehenden 2 Ebenen, welche den Kreis berühren, liefern die 2 roten Erzeugenden. (13×15 cm.) . . . . . Mk. 12.—.

*) „Zwickpunkte" (pinchpoints) nennt man diejenigen Punkte einer Doppelcurve, in welchen die beiden Tangentialebenen zusammenfallen; sie trennen im Allgemeinen die isoliert verlaufenden Teile der Doppelcurve von denen mit reellen Tangentialebenen und sind als uniplanare Punkte zu betrachten.

69. (VII, 22.) **Cayley'sche Regelfläche** dritter Ordnung.

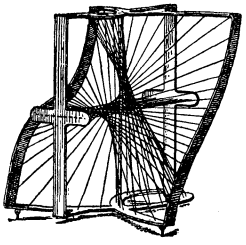
Die beiden Zwickpunkte der vorigen Fläche haben sich im unendlich fernen Punkt der Doppelgeraden vereinigt. Sie entsteht dann, wenn die grüne (vergl. Nr. 67) Gerade den Kreis trifft; diese Gerade wird dann zugleich die Doppelgerade. (13×15 cm.) Mk. 13.—.

70. (VII, 23.) **Desgleichen, collinear** zu der vorigen Fläche; der Kegelschnitt liegt im Unendlichen. (13×15 cm.) Mk. 16.50. Ganze Serie VII . . . . . Mk. 340.—. Gruppe I Mk. 160.—, Gruppe II Mk. 180.—.

71—74. (XVIII, 1—4.) **Fadenmodelle der Regelflächen 3. Ordg.** Von stud. *C. Tesch* in Karlsruhe (W).

Als Leitlinien der Fläche sind gewählt ein Kreis, eine die Kreisebene in einem Peripheriepunkte rechtwinklig schneidende Gerade und eine die Kreisebene schneidende zweite Gerade. Die Erzeugenden der Fläche sind durch schwächere, die Leitgeraden durch stärkere Fäden dargestellt, die Schnittpunkte durch Perlen hervorgehoben. Der Leitkreis ist durch Fäden in seiner Ebene und durch Perlen veranschaulicht.

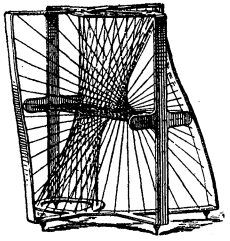
Die Serie stellt 4 verschiedene Fälle dar.



71. (XVIII, 1.) I. Fall. Die zweite Leitgerade schneidet die Ebene des Kreises in einem innerhalb desselben gelegenen Punkte. Die erste Leitgerade ist **ihrem ganzen Verlaufe nach reelle Doppellinie** der Fläche. Die Kanten und Cuspidalpunkte sind imaginär. (20×20 cm.) . Mk. 30.—.

72. (XVIII, 2.) II. Fall. Die zweite Leitgerade schneidet die Ebene des Kreises in einem ausserhalb desselben gelegenen Punkte. Die erste Leitgerade ist **längs einer endlichen Strecke reelle Doppellinie,** in den beiden sich in das Unendliche erstreckenden Zweigen isolierte Linie der Fläche. Es sind zwei reelle Kanten vorhanden, welche durch die beiden Grenzpunkte des reellen Teiles der Doppellinie gehen. Diese Grenzpunkte sind Cuspidalpunkte der Fläche. (20×20 cm.) Mk. 30.—.

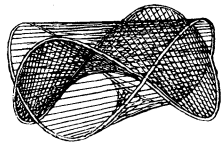
73. (XVIII, 3.) III. Fall. **Der Leitkegelschnitt,** hier eine Ellipse, **ist in das Unendliche gerückt** und durch einen Richtkegel gegeben, der durch seine Erzeugenden dargestellt ist. Die zweite Leitgerade schneidet die Ebene des unendlich fernen Kegelschnittes in einem ausserhalb desselben gelegenen Punkt. Ein endlicher Teil der ersten Leitgeraden ist isolierte Linie, die beiden sich ins Unendliche erstreckenden Zweige reelle Doppellinie der Fläche. Die Kanten und Cuspidalpunkte sind wie im zweiten Fall reell. (20×20 cm.) . . . Mk. 30.—.



74. (XVIII, 4.) IV. Fall. **Die Cayley'sche Fläche.** Die zweite Leitgerade fällt mit der ersten zusammen. Dieselbe ist in ihrem ganzen Verlaufe reelle Doppellinie und zugleich Kante der Fläche. Die beiden Cuspidalpunkte fallen in einen Punkt zusammen, durch welchen Punkt noch die zweite Kante der Fläche geht. (20×20 cm.) Mk. 30.—.

Ganze Serie Mk. 110.—.

75. 76. (XXIII, 9a u. b.) **Cylindroid (Plücker'sches Conoid).** Fadenmodell von Prof. Dr. *H. Wiener.* Vgl. das folgende Modell. (12×11 u. 7½×15 cm.) . . je Mk. 2.50.



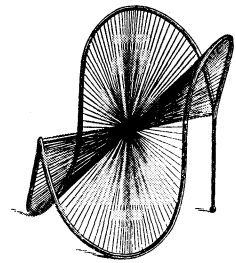
77. (XXIII, 10.) **Cylindroid, vereint mit dem rechtwinkligen Paraboloid** (Nr. 31, XXIII, 8b.) Fadenmodell von Prof. Dr. *H. Wiener.* Das rechtwinklige Paraboloid ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Geraden gleichweit abstehen. Es hat zu unendlich vielen Geradenpaaren diese Lage, und diese sind die Erzeugenden eines Cylindroids. Das Modell gibt diese beiden Flächen in dieser Lage vereint wieder. (7½×15 cm.) . . . . . Mk. 5.80.

78—84. (XXV, 1—7.) **Fadenmodelle der Kegel dritter Ordnung** nach Professor Dr. *H. Wiener.*

Diese Modelle sollen hauptsächlich auch dem Studium der ebenen Curven dritter Ordnung dienen (vergl. hierzu des Näheren die Beschreibung dieser Serie pag. 58), insofern es diejenigen Gestalten betrifft, die durch ihr Verhalten gegen die unendlich ferne Gerade bedingt sind. Eine Einteilung der ebenen Curven dritter Ordnung, wie sie der Unterscheidung der Curven zweiter Ordnung in Ellipse, Hyperbel und Parabel entspricht, hat zuerst *Newton* unternommen und gezeigt, dass sich alle Curvenarten aus 5 besonderen Curven, den divergierenden Parabeln durch Projection ableiten lassen. Nach ihm griff *Möbius* die Aufgabe wieder auf; um keine einzelne Gattung der Curven vor den anderen gleichberechtigten auszuzeichnen, setzt er an die Stelle der Curven die projicierenden Kegel und unterscheidet von diesen 7 Gattungen, die sich auf solche vom Geschlecht Null oder Eins verteilen.

Vgl. Newton Enumeratio linearum tertii ordinis, 1706; Plücker, System der analytischen Geometrie, 3. Abschnitt, 1835; Cayley, On the classification of cubic curves, Cambr. Philos. Transactions XI, pag. 81; Möbius, Geo. Werke, Bd. II, pag. 90; Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven, (2. Aufl.) 1882, pag. 164ff.

Kegel vom Geschlechte Null gibt es nur drei projectiv verschiedene Gestalten, nämlich:



78. (XXV, 1.) Der Kegel besitzt eine Rückkehrkante und ist von der dritten Klasse . . . . . Mk. 18.—.

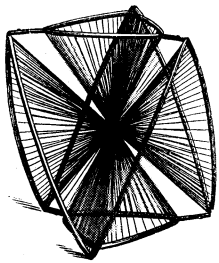
79. (XXV, 2.) Der Kegel besitzt eine Doppelkante als Selbstschnitt und ist von der vierten Klasse . . . . . Mk. 18.—.

80. (XXV, 3.) Der Kegel besitzt eine isolierte Doppelkante und ist ebenfalls von der vierten Klasse . . . . . Mk. 20.—.

Die Kegel vom Geschlechte Eins sind sämtlich von der sechsten Klasse. Ein solcher Kegel kann entweder allein aus einem unpaaren Mantel oder aus einem solchen und einem hinzutretenden paaren Mantel bestehen, und man wird bei Berücksichtigung dieses Unterschiedes zwei Gattungen von Kegeln vom Geschlechte Eins zu unterscheiden haben, die zusammen mit den drei Gattungen vom Geschlechte Null den „5 Newton'schen Parabeln" entsprechen. Aber unter den einmanteligen Kegeln vom Geschlechte Eins gibt es noch einen ausgezeichneten, bei dem nämlich die drei Berührebenen der Wendekanten durch eine Gerade hindurchgehen, und dieser ist ein Zwischenglied zwischen solchen, bei denen der

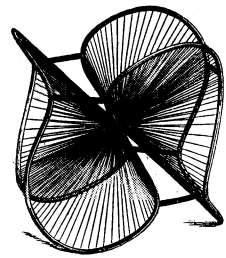
Kegelmantel sich entweder durch drei Dreikante oder durch drei Vierkante hindurchwindet, die durch jene drei Berührebenen und die Ebene der drei Wendekanten begrenzt werden.

Dem entsprechen die folgenden Modelle:



81. (XXV, 4.) Der Kegel besteht aus einem paaren und einem unpaaren Mantel. Mk. 20.—.

82. (XXV, 5.) Der Kegel besteht aus einem einzigen unpaaren Mantel und durchzieht die Dreikante . . . . Mk. 16.—.



83. (XXV, 6.) Der Kegel besteht aus einem einzigen unpaaren Mantel und durchzieht die Vierkante . . . . Mk. 20.—.

84. (XXV, 7.) Der Kegel besteht aus einem einzigen unpaaren Mantel und besitzt drei durch eine Gerade gehende Wendeberührebenen . . . . . Mk. 16.—.

(Höhe der Modelle 17 cm.)

Ganze Serie Mk. 128.—.

Vgl. die Modelle Nr. 170, 171 (XVII, 2); hier sind die Schnittcurven der Kegel dritter Ordnung mit Kugeln dargestellt, die um ihre Spitzen beschrieben werden.

III. Algebraische Flächen vierter Ordnung.

a) Cycliden.

Unter Cycliden im allgemeinen Sinn (nach Darboux) versteht man alle diejenigen Flächen vierter Ordnung, welche den unendlich fernen imaginären Kugelkreis zur Doppelcurve haben. Sie sind die Enveloppen aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Fläche zweiten Grades liegen und eine gegebene Kugel stets orthogonal schneiden. Sie besitzen Scharen von Kreisen, die teilweise zugleich Krümmungslinien sein können; die Krümmungslinien sind im Allgemeinen jedoch höhere algebraische Curven. Diese Flächen können bis 4 Knotenpunkte enthalten.

Die Flächen mit 1, 2, 3, 4 Doppelpunkten erhält man auch durch Transformation mittelst reciproker Radien beziehungsweise aus folgenden Flächen zweiter Ordnung: a) allgemeine Fläche zweiter Ordnung, b) beliebiger Kegel, c) Rotationsfläche, d) Kreiskegel. Da die Krümmungslinien dabei erhalten bleiben, und Gerade und Kreise im Allgemeinen in Kreise, Ebenen und Kugeln in Kugeln übergeführt werden, so besteht im Falle b) und c) das eine System von Krümmungslinien aus Kreisen, die sich in 2 Doppelpunkten der Fläche schneiden, das andere wird durch Kugeln ausgeschnitten (ist sphärisch). Im Falle d) sind die beiden Kreisscharen, welche aus den Erzeugenden, resp. Parallelkreisen des Rotationskegels sich ergeben, von denen die ersteren sich in den 2 reellen, die anderen sich in den 2 imaginären Knotenpunkten schneiden, zugleich Krümmungslinien. Man nennt diese letzteren Dupin'sche Cycliden. Dieselben ergeben sich auch als Enveloppen aller Kugeln, welche 3 gegebene berühren.

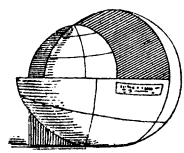
Vergl. die Abhandlung von Maxwell in Quart. Journ. of Math. Bd. 9, pag. 111, sowie Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, II. Teil, Art. 313—323 (2. Aufl.).

85—91. Dupin'sche Cycliden. Sie wurden mit Ausnahme von Nr. 86, 87 u. 91 von Assistenten Dr. *P. Vogel* in München modelliert. (B).

85. (V, 5a.) **Ringcyclide** mit 4 imaginären Knotenpunkten (davon ist die gewöhnliche Wulstfläche ein specieller Fall). Die aufgezeichneten 2 Kreisscharen sind die Krümmungslinien. (7×14 cm.) Mk. 10.50.

86. 87. (IX, 7 u. 8.) **Dieselbe** in anderen Verhältnissen. Auf beiden sind ausser den Krümmungslinien noch Schnittcurven mehrerer doppelt berührender Ebenen aufgezeichnet. Diese beiden Modelle sind Abgüsse der im Besitze des mathematischen Seminars in Berlin befindlichen, von Herrn *Kummer* angefertigten Originale. (12×5 u. 9×6 cm.) . Preis zusammen Mk. 14.—.

88. (V, 5b.) **Horncyclide.** Sie besitzt neben 2 imaginären 2 reelle Knotenpunkte, welche 2 auseinander liegende Flächenmäntel vereinigen; die aufgezeichneten Kreise sind Krümmungslinien. (19×6 cm.) Mk. 13.50.



89. (V, 5c.) **Spindelcyclide.** Sie besitzt neben 2 imaginären 2 reelle Knotenpunkte, welche 2 ineinander liegende Flächenmäntel vereinigen; die aufgezeichneten Kreise sind Krümmungslinien. (10×11 cm.) Mk. 7.50.

90. (V, 5d.) **Parabolische Horncyclide.** Sie besitzt 2 reelle Knotenpunkte, welche durch eine auf der Fläche liegende Gerade verbunden sind; die 2 imaginären Knotenpunkte liegen ebenfalls auf einer zur ersten senkrechten Geraden; die Fläche ist bloss dritter Ordnung (die reelle unendlich ferne Ebene sondert sich ab). (15×12 cm.) Mk. 13.50.

91. (X, 5.) **Parabolische Ringcyclide.** Bei ihr sind alle vier Knotenpunkte imaginär, die Verbindungsgeraden beider Paare, welche ganz auf der Fläche liegen, dagegen reell. Ausser diesen befinden sich noch 2 sich schneidende Geraden und eine unendlich ferne auf der Fläche, die von der dritten Ordnung ist. Die aufgezeichneten Curven (Kreise) sind Krümmungslinien. Die Fläche enthält, wie Nr. 90, den unendlich fernen imaginären Kugelkreis nur noch einfach, es sondert sich die unendlich ferne Ebene als ein Bestandteil ab. Von stud. math. *Finsterwalder*. Erklärung beigegeben. (20×12 cm.) Mk. 12.—.

92—94. (X, 8.) Diese 3 Flächen sind **Cycliden im weiteren Sinne** mit 3, bezw. 2 Knotenpunkten. Sie wurden von stud. math. *Finsterwalder* in München angefertigt. Erläuterung beigegeben.

Preis zusammen Mk. 14.—.

92. (X, 8a.) **Cycliden-Fläche mit 2 conjugiert imaginären Doppelpunkten.** (10×7 cm.)

93. (X, 8b.) **Cycliden-Fläche mit 2 conjugiert imaginären Doppelpunkten und einem reellen.** (10×5 cm.)

94. (X, 8c.) **Cycliden-Fläche mit einem uniplanaren Knoten,** der durch Zusammenziehen der 3 Knoten in Nr. 93 entsteht.

Die beiden letzteren Flächen sind Orthogonalflächen desjenigen Strahlensystems, welches durch Reflexion eines Strahlenbüschels an einem unendlich dünnen Kreisringe entsteht. Im Falle Nr. 93 liegt der leuchtende Punkt ausserhalb des Kreises in der Ebene desselben, im Falle Nr. 94 auf dem Kreise selbst.

Als Cycliden entsprechen die Flächen Nr. 92—94 dem pag. 123 unter b) erwähnten Fall; sie sind also durch Inversion aus einem Kegel erzeugt, und zwar im Falle der ringförmigen (Nr. 92) und der hornförmigen (Nr. 93) Fläche mittelst eines imaginären Inversionscentrums; die herzförmige (Nr. 94)

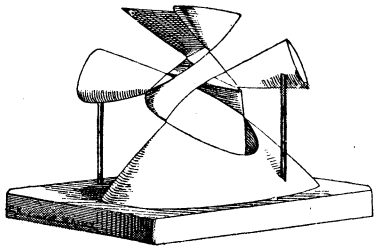
entsteht durch Inversion aus einem parabolischen Cylinder, wobei das Centrum auf der Scheitelgeraden gelegen ist.

Die 3 Flächen sind Repräsentanten von Flächen 4. Ordnung, für die **ein** Mantel der Centrafläche sich auf einen Kreis reduciert.

b) Kummer'sche Flächen.

Die Kummer'sche Fläche (Singularitätenfläche eines Complexes zweiten Grades) ist von der vierten Ordnung und von der vierten Klasse und besitzt 16 Knotenpunkte und ebensoviele Doppeltangentialebenen, welche je 6 Knotenpunkte enthalten. Vergl. Kummer, Abhandlungen der Berliner Akademie von 1886 pag. 62ff.; Plückers Werk: Neue Geometrie des Raumes etc., Leipzig 1868; Salmon, Geometrie des Raumes II. pag. 411—414, sowie Kapitel XII.

95. (II, 1a.) **Alle 16 Knotenpunkte und Doppeltangentialebenen sind reell.** (21×18cm.) Mk. 28.—.



96. (II, 1b.) **8 der Knotenpunkte und Doppeltangentialebenen sind reell.** (30×20cm.) Mk. 32.50.

97. (II, 1c.) **4 der 16 Knotenpunkte und Doppeltangentialebenen sind reell.** (20×15cm.) Mk. 21.—.

Alle 3 Modelle wurden von stud. math. *Rohn* in München (K) modelliert; Erläuterungen werden beigegeben.

Zu den Kummer'schen Flächen sind ferner noch die unter Nr. 361 (X, 7) und Nr. 363 (VI, 2) aufgeführten Wellenflächen zu rechnen.

c) Flächen 4. Ordnung mit 4 längs Kreisen berührenden Ebenen.

98—103. (IX, 1—6.) Diese Modelle sind Copien nach den im Besitze des mathematischen Seminars der k. Universität zu Berlin befindlichen Originalen, von Herrn *Kummer* besprochen in den Monatsberichten der k. Akademie zu Berlin von 1862, 1866, 1872. Abdrücke werden beigelegt.

Die Gleichung aller dieser Flächen lässt sich in die Form bringen: $\varphi^2 - \lambda pqrs = 0$, wo $\varphi = 0$ die Gleichung einer Fläche zweiter Ord.; $p, q, r, s = 0$ die von 4 Ebenen bedeuten; es sind dies diejenigen 4 Tangentialebenen, welche die Flächen längs einer Curve berühren. Die 4 Ebenen bilden in den Modellen ein reguläres Tetraeder:

$$\begin{aligned} p &= x + y + z - a \\ q &= -x + y - z - a \\ r &= -x - y + z - a \\ s &= x - y - z - a, \end{aligned}$$

und die 12 Schnittpunkte der 6 Kanten desselben mit der Fläche zweiter Ord., einer Kugel, deren Mittelpunkt mit dem des Tetraeders zusammenfällt und deren Gleichung daher ist:

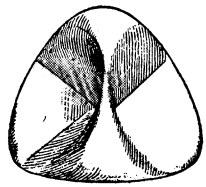
$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

sind Knotenpunkte der dargestellten Fläche vierter Ord. Je nach der Annahme des Radius der Kugel r und des Parameters λ (das Tetraeder als gegeben betrachtet) erhält man verschiedene Typen, von denen die charakteristischen modelliert sind.

98. (IX, 1.) **Die Fläche besteht aus 4 congruenten Teilen, die in 6 biplanaren Knotenpunkten zusammenhängen.** Die zwei Tangentialebenen in jedem solchen Punkt sind reell und berühren die Fläche in Kreisen. Sie entsteht, indem die Kugel die Kanten des Tetraeders berührt, d. h. indem $a = r$, $\lambda < 0$ ist Die aufgezeichneten Curven sind die Kegelschnittpaare, nach welchen die Fläche von jeder Tetraederfläche geschnitten wird. Die biplanaren Knoten besitzen hier die Eigentümlichkeit, dass in denselben jede durch den Schnitt der beiden Tangentialebenen

gehende Ebene die Fläche nach einer Curve mit Berührpunkt statt mit Spitze schneidet. (11×11 cm.) . . . . . Mk. 19.50.

99. (IX, 2.) **Wie oben.** In den biplanaren Knotenpunkten sind jedoch die Tangentialebenen imaginär; man erhält sie, wenn man $a = r$ setzt und $\lambda > 0$ wählt. (10×10 cm.) Mk. 21.50.

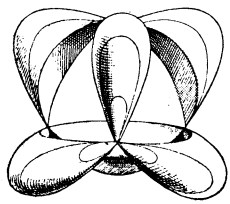


100. (IX, 3.) **Römische Fläche von Steiner.** Man erhält sie, indem man $a = r$, $\lambda = 1$ setzt. Sie besitzt 3 sich schneidende Doppelgeraden und ist von der dritten Klasse. Auf dem Modell sind auch die Asymptotencurven eingezeichnet. (10×10 cm.) . Mk. 11.50.

101. (IX, 4.) **Fläche aus 10** (6 und 4 je unter sich congruenten) **Teilen bestehend,** welche in 12 conischen Knotenpunkten zusammenhängen:

$$r \begin{cases} > a \\ < a\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \lambda > 0.$$

(11×11 cm.) . . . . . Mk. 26.50.



102. (IX, 5.) **Fläche, bestehend aus 6 congruenten Teilen,** welche in 4 uniplanaren Knoten zusammenhängen. Die Kugel geht durch die Ecken des Tetraeders, die 3 Knoten der dreizipfligen Teile der vorigen Fläche vereinigen sich zu einem uniplanaren. Man erhält sie für: $r = a\sqrt{2}$, $\lambda > 0$. (10×10 cm.) Mk. 24.50.

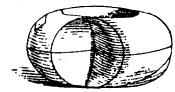
103. (IX, 6.) **Fläche, bestehend aus 4 congruenten Teilen,** die in 4 uniplanaren Knoten zusammenhängen. Man erhält sie $r = a\sqrt{2}$, $\lambda < 0$. (12×12 cm.) . Mk. 26.50.

Diesen Modellen ist als Erläuterung ein Abdruck der in den Berliner Akademieberichten vom Jahre 1863, 1866, 1872 erschienenen Abhandlungen von Prof. Kummer über diesen Gegenstand beigegeben.

d) Flächen vierter Ordnung mit Doppelgeraden.

104. (IX, 9.) **Fläche 4. Ord. mit einer Doppelgeraden.** Auf derselben liegen 2 Zwickpunkte und ein 3facher Punkt, Durchstosspunkt der Doppelgeraden mit der Fläche. Alle durch diese Gerade gelegten Ebenen schneiden die Fläche nach Kreisen. Die Fläche ist der geometrische Ort der Krümmungskreise aller Normalschnitte in einem gewöhnlichen Punkte (positiver Krümmung) einer beliebigen Fläche. (Vergl. Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, II. Teil, 2. Aufl., Cap. VI, § 308.) (9×3 cm.) . . . . . Mk. 7.—.

Abguss nach einem von Herrn *Kummer* angefertigten und in dem Besitze des mathematischen Seminars der Berliner Universität befindlichen Modell.



105. (X, 4.) **Fläche 4. Ord. mit 2 sich schneidenden Doppelgeraden** (böhmisches Gewölbe). Sie besitzt auf jeder der Doppelgeraden 2 Zwickpunkte, einen einfachen Selbstberührungspunkt, 4 nach Kreisen berührende Tangentialebenen und entsteht dadurch, dass man den Mittelpunkt eines Kreises auf einem andern von gleichem Radius fortrücken lässt, wobei die Ebene des beweglichen Kreises stets zu sich parallel und senkrecht zur Ebene des festen vom Mittelpunkt des beweglichen durchlaufenen bleibt. Von stud. math. *Finsterwalder* in München. (6×10 cm.) . . . . Mk. 4.—.

e) Regelflächen vierter Ordnung.

Durch Seidenfäden in Metallrahmen dargestellte Modelle
nach Prof. Dr. K. Rohn in Dresden.

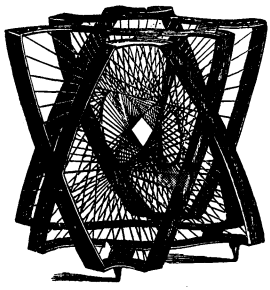
Vergl. Rohn's Aufsatz: Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ord., Math. Annal. Bd. XXVIII; der Serie ist diese Abhandlung beigegeben und ist daselbst auf die Modelle verwiesen.

Diese Regelflächen zerfallen nach der Art ihrer Doppelcurve in 4 verschiedene Klassen; nämlich:

1) solche mit 2 Doppelgeraden,
2) solche mit Doppelgerade und Doppelkegelschnitt,
3) solche mit Doppelcurve dritter Ord.,
4) solche mit dreifacher Geraden.

Jede dieser Klassen zerfällt weiter in Unterklassen, je nach der Anzahl ihrer reellen Zwickpunkte, welche sich auf der Doppelcurve vorfinden. Die verschiedene Art der Doppelcurve einerseits und die Realität der Zwickpunkte andererseits bedingen die Verschiedenheit der Flächengestalten und damit zugleich ihrer Projectionen, die sich als Curven vierter Klasse mit zwei, resp. drei Doppeltangenten oder einer dreifachen Tangente erweisen. Die einzelnen Flächen sind möglichst symmetrisch construiert, ohne ihre Gestalt zu specialisieren.

106. (XIII, 1.) **Regelfläche 4. Ord. mit 2 Doppelgeraden und 8 reellen Zwickpunkten;** sie besteht aus zwei congruenten Teilen, auf denen je ein Stück von jeder Doppelgeraden verläuft . . . . . Mk. 42.—.



107. (XIII, 2.) **Regelfläche 4. Ord. mit 2 Doppelgeraden ohne reelle Zwickpunkte;** sie besteht aus zwei congruenten Mänteln, die sich längs der beiden Doppelgeraden gegenseitig durchsetzen . . . . . Mk. 49.—.

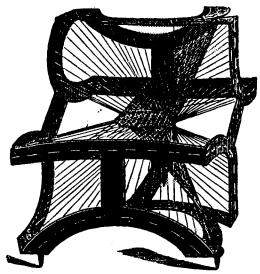
108. (XIII, 3.) **Regelfläche 4. Ord. mit 2 Doppelgeraden; auf der einen liegen 4 reelle, auf der andern 4 imaginäre Zwickpunkte.** Sie besitzt zwei congruente Mäntel, die sich längs der einen Doppelgeraden durchschneiden, während jeder Mantel ein Stück der anderen Doppelgeraden enthält. Mk. 45.—.

109. (XIII, 4.) **Regelfläche 4. Ord. mit 2 imaginären Doppelgeraden;** sie besitzt zwei congruente Mäntel, die Hyperboloiden ähnlich sehen. Die Projection eines solchen Mantels besteht aus zwei hyperbelartigen Aesten, deren einer zwei Spitzen mit Doppelpunkt aufweist . . . . . Mk. 42.—.

110. (XIII, 5.) **Regelfläche 4. Ord. mit Selbstberührungsgeraden und 4 reellen Zwickpunkten;** sie besteht aus zwei congruenten Teilen und erscheint als interessanter Specialfall der Fläche 106 . . . . Mk. 42.—.

111. (XIII, 6.) **Regelfläche 4. Ord. mit dreifacher Geraden und 4 reellen Zwickpunkten;** alle Erzeugende treffen eine Leitgerade. Diese Fläche besitzt nur einen Mantel, der an 4 Stellen eine Faltung zeigt. Mk. 45.—.

112. (XIII, 7.) **Regelfläche 4. Ord. mit dreifacher Geraden,** deren Punkte zwei constante und eine bewegliche Tangentialebene aufweisen. Während die Erzeugende die Regelfläche beschreibt, passiert sie zweimal die Lage der dreifachen Geraden, auf der zwei höhere singuläre Punkte entstehen. Mk. 45.—.



113. (XIII, 8.) **Regelfläche 4. Ord. mit Doppelkreis und Doppelgeraden,** die sich recht-

winklig schneiden; auf jeder Doppelcurve liegen zwei reelle Zwickpunkte. Die Fläche ist mehrfach symmetrisch; der Selbstberührungspunkt (Schnittpunkt von Kreis und Geraden) liegt reell auf der Fläche. Mk. 49.—.

114. (XIII, 9.) **Regelfläche 4. Ord. mit Doppelcurve 3. Ord. und vier reellen Zwickpunkten.** Die Fläche besteht aus einem Mantel, auf dem zwei Stücke der Doppelcurve liegen; die Erzeugenden sind teils reelle, teils ideelle Doppelsecanten der Raumcurve 3. Ord., darunter vier Tangenten . . Mk. 45.—.

115. (XIII, 10.) **Regelfläche 4. Ord. mit Doppelcurve 3. Ord. ohne reelle Zwickpunkte.** Auch diese Fläche besitzt nur einen Mantel, der sich jedoch längs der ganzen Doppelcurve selbst durchsetzt. Gleichwohl sind die Erzeugenden wieder zum Teil reelle, zum Teil ideelle Doppelsecanten der Raumcurve 3. Ord., unter denen sich wieder vier Tangenten befinden . . . . . Mk. 45.—.

(Grösse aller Modelle 18×18 cm.)

Ganze Serie Mk. 430.—.

IV. Algebraische Flächen von höherer als 4. Ordnung. Liniengeometrie.

116. (X, 9.) **Fläche 8. Ord.** Sie besitzt 2 zu einander senkrechte, sich schneidende Selbstberührungsgeraden, von denen jede in 2 uniplanaren Punkten höherer Ordnung (durch Zusammenziehen von 2 Zwickpunkten entstanden) aus ihr heraustritt, 2 congruente ebene Doppelcurven 4. Ord., die im Mittelpunkt (hohe Singularität) einen Selbstberührungspunkt besitzen und aus der Fläche in zusammen 8 Zwickpunkten heraustreten, endlich 2 Doppeltangentialebenen, welche die Fläche längs zweier Kreise berühren. Sie entsteht durch die Bewegung eines Kreises von unveränderlichem Radius dadurch, dass die Endpunkte eines Durchmessers desselben stets auf 2 zu einander senkrechten Geraden gleiten (die beiden Selbstberührungsgeraden), während die Ebene des beweglichen Kreises stets auf der Ebene der beiden Geraden senkrecht steht. Die genannte Fläche enthält den unendlich fernen imaginären Kugelkreis als Doppelcurve. Von stud. math. *Finsterwalder* in München (B). (7×5 cm.) Mk. 4.75.

117. (VIII, 3.) **Fläche 12. Ord.** Ihre Horizontalschnitte sind solche Brennlinien, wie sie durch Reflexion eines von einem Punkt ausgehenden Strahlenbüschels an einem Kreise entstehen. Dieselben sind so auf einander geschichtet, dass die reflektierenden Kreise einen Kreiscylinder bilden, während die leuchtenden Punkte eine um 45° gegen die Horizontalebene geneigte Gerade ausfüllen. Die Fläche kann angesehen werden als ein Teil der Brennfläche der von einer leuchtenden Linie ausgehenden Strahlen nach ihrer Reflexion an einem Cylinder, dessen Axe die Linie trifft. Die Fläche besitzt als Rückkehrkanten 2 sich in einem Punkte berührende gleichseitige Hyperbeln und eine weitere Raumcurve, die sich selbst und die Hyperbeln in dem genannten Punkte berührt. Von stud. math. *Finsterwalder* in München (B); hierzu eine Erläuterung. (13×20×12 cm.) . . . . . Mk. 17.50.

118—120. (I, 2.) **Fläche 12. Ordnung. Brennfläche, welche von einem zur Axe wenig geneigten Parallelstrahlen-System nach deren Durchgang durch ein centriertes Linsensystem eingehüllt wird.** (Vergl. Seidel, Schuhmachers Astron. Nachrichten, Nr. 1027 ff., Monatsberichte der Berliner Academie, Dec. 1872, Finsterwalder, Abh. der bayer. Acad. von 1891.) Das Modell ist affin zu der Centrafläche des Paraboloids:

$$\frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{10} - 2x = 0;$$

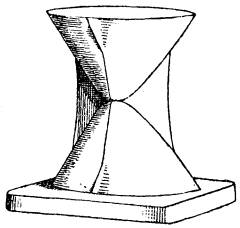
die vorzunehmende Transformation wäre $X = x$, $Y = y$, $Z = \sqrt{1{,}2} \cdot z$. Die Fläche besitzt 2 Rückkehrkanten, beide gewöhnliche Parabeln, welche in zu einander senkrechten Ebenen liegen; ferner eine Doppelcurve 12. Ord., längs deren sich die beiden Mäntel durchsetzen. Von stud. math. *Schleiermacher* (B). Erläuterung beigegeben.

118. 119. (I, 2a.) Die beiden Mäntel der Fläche getrennt. (10×10 u. 7×7 cm.) je Mk. 6.—.

120. (I, 2b.) Die beiden Mäntel vereinigt. (10×11 cm.) . . . . . Mk. 6.—.

121—123. (I, 3.) **Fläche 12. Ordnung. Centrafläche des einschaligen Hyperboloids.** Sie besitzt 3 ebene Rückkehrkanten, nämlich 2 Hyperbeln und eine Ellipse, welche in 3 zu einander senkrechten Ebenen liegen; ferner eine Doppelcurve 24. Ordnung. (Vgl. Cayley, On the Centro-Surface of an Ellipsoid. Cambridge, Philos. Transactions, vol. XII, pag. 319 ff.; Salmon - Fiedler, Analyt. Geometrie des Raumes Bd. 1, Art. 207 und Bd. 2, Art. 244, 2. Aufl.) Von stud. math. *W. Dyck* (B). Erläuterung beigegeben.

121. 122. (I, 3a.) Die beiden Mäntel getrennt. (17×16 cm.) zusammen Mk. 20.—.



123. (I, 3b.) Die beiden Mäntel vereinigt. (17×16 cm.) . . . . . Mk. 12.—.

Zu den algebraischen Flächen gehören auch einige der Rotationsflächen mit Asymptotencurven, und zwar Nr. 196—200, 202—205 (X, 10.), ferner die Typen conischer Knotenpunkte Nr. 208—211 (XVII, 7.), die Minimalfläche 9. Ord. Nr. 246 (VIII, 2.) und die Modelle zur Funktionentheorie Nr. 307—309 (XIV, 1. 2. 3.).

124. (XXX, 4.) **Grenzfläche 6. Ord. des parabolischen Strahlennetzes.** Von Prof. Dr. *Konrad Zindler* in Innsbruck.

Eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 Geraden heisst eine Strahlencongruenz. Ein bestimmter Strahl derselben heisse s; die Grenzlagen der Fusspunkte der kürzesten Abstände zwischen s und seinen Nachbarstrahlen füllen auf s im Allgemeinen eine endliche Strecke, deren Endpunkte Grenzpunkte heissen. Der geometrische Ort der Grenzpunkte aller Strahlen heisst Grenzfläche der Congruenz. Diese ist erst für sehr wenige Congruenzen explicite bekannt, namentlich noch nicht für die einfachsten Strahlencongruenzen, nämlich die Congruenzen erster Ordnung und Klasse (die „Strahlennetze"), die aus den Treffgeraden zweier windschiefen Strahlen, der „Brennlinien", bestehen. Unter diesen ist das parabolische Strahlennetz (bei dem die Brennlinien zusammenrücken) das einfachste.

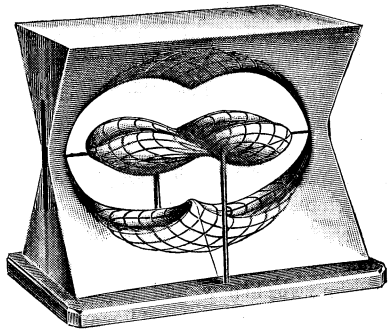
Das Modell stellt nun die Grenzfläche des parabolischen Strahlennetzes dar, eine Fläche sechster Ordnung mit einer vierfachen Geraden (durch die jedoch nur zwei reelle Mäntel gehen) und mit zwei zusammenfallenden biplanaren Knotenpunkten. Sie lässt sich durch einen veränderlichen Kreis erzeugen.

Eine kurze Abhandlung von Professor Zindler wird dem Modell beigefügt. (Vgl. auch die Liniengeometrie desselben Verfassers, Leipzig 1906, Bd. II.) (Grösse 60×38×7 cm.) . . . . . Mk. 22.—.

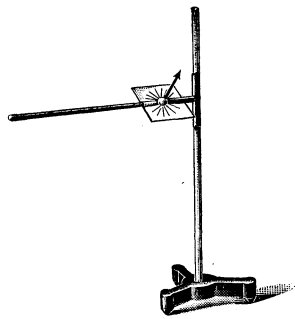
125. (XXX, 5.) **Fläche 6. Ord. als Ort der Sehnenmittelpunkte** einer Raumcurve nach Prof. Finsterwalder und Prof. Voss von Dr. *K. Böhmländer* in Memmingen.

Die Raumcurve wurde erhalten als Schnitt eines elliptischen Cylinders mit einem Ellipsoid.

Die Fläche enthält 3 Gerade (die Koordinatenaxen), ferner die Projektionen der



Raumcurve auf die 3 Koordinatenebenen (zwei Ellipsen und eine Hyperbel.)
(15×22,5×17,5 cm.) . . . Mk. 21.—.



126. (XXXVIII, 1.) **Modell zur Theorie des Nullsystems** von Prof. *Fr. Schilling* in Danzig. Das Nullsystem lässt sich aus der Gleichung entwickeln $(xy' - x'y) + k(z - z') = 0$, die jedem Punkte (x', y', z') seine Nullebene zuordnet.

In dem Modell ist insbesondere die Konstante k gleich 4 cm gewählt. Das Modell zeigt im einzelnen die Centralaxe; auf einer Senkrechten zu ihr läßt sich der Nullpunkt mit seiner zugehörigen Nullebene der obigen Gleichung gemäß verschieben. In der Nullebene sind die Nullinien durch das Strahlbüschel des Nullpunktes angegeben. Der Nullpunkt selbst kann also an jede Stelle des Raumes in der Umgebung der Centralaxe gebracht werden. Hinzugefügt ist auch noch die Normale zur Nullebene im Nullpunkte, d. h. die jedesmalige Tangentenrichtung der zum Nullsystem gehörenden Schraubung.

Der genauen Literaturangaben wegen sei auf die Darstellung des Nullsystems in den Lehrbüchern: K. Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen, Sammlung Schubert Bd. 34, Leipzig 1902 und H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, und von demselben, Theorie der Kräftepläne, Leipzig 1910, hingewiesen.
(Höhe ca. 35 cm.) . . . . Mk. 40.—.

V. Schraubenflächen.

127—132. (XX, 1—5.) **Fadenmodelle der Regelschraubenflächen.** Von Assistenten *C. Tesch* in Karlsruhe (W).

Eine Schraubenfläche wird von einer Curve beschrieben, die um eine Axe eine Schraubenbewegung ausführt. Wird eine Gerade als diese Curve gewählt, so unterscheidet man geschlossene und offene Schraubenflächen, je nachdem die gebrauchte Gerade die Schraubenaxe trifft oder nicht. Von den offenen Schraubenflächen sind ferner drei Hauptfälle zu unterscheiden, welche die Modelle 1—3, von den (in der Technik besonders benutzten) geschlossenen dagegen zwei Hauptfälle, welche die Modelle 4 und 5 darstellen. Bei den offenen Schraubenflächen bezeichnet man ferner als „Kehlschraubenlinie“ den Ort, den der Schnittpunkt der Geraden und ihres kürzesten Abstandes mit der Axe bei der Schraubung beschreibt.

Die Erzeugenden der Fläche sind durch gelbe, die Doppellinien durch rote Fäden bezeichnet. Es ist ein Gang der Schraubenfläche dargestellt, letztere durch einen coaxialen Cylinder begrenzt.

127. (XX, 1a.) **Abwickelbare Schrauben-**

fläche. Der Neigungswinkel der Erzeugenden gegen die Ebene senkrecht zur Axe, den „Normalschnitt", ist gleich dem der Tangente der Kehlschraubenlinie (ihrem Steigungswinkel). Der Schnitt normal zur Axe ergibt die gemeine Kreisevolvente. Die Schraubenlinie des Gestelles ist eine Doppellinie der Fläche. Die Abwickelung eines Flächenstückes ist beigefügt. (20×22 cm.) Mk. 40.—.

128. (XX, 1b.) **Dieselbe Fläche** aus Carton hergestellt. (20×22 cm.) . . . Mk. 5.—.

129. (XX, 2.) Der Neigungswinkel der Erzeugenden gegen den Normalschnitt ist kleiner als der Steigungswinkel der Kehlschraubenlinie. Die Fläche ist **nicht abwickelbar.** Der Normalschnitt ergibt eine verschlungene Kreisevolvente. (20×22 cm.) Mk. 40.—.

130. (XX, 3.) Der Neigungswinkel der Erzeugenden gegen den Normalschnitt ist grösser als der Steigungswinkel der Kehlschraubenlinie. Die Fläche ist **nicht abwickelbar.** Der Normalschnitt zeigt eine geschweifte Kreisevolvente. Die Schraubenlinie des Gestelles ist eine Doppellinie der Fläche. (20×22 cm.) . . . . Mk. 40.—.

131. (XX, 4.) **Gerade geschlossene Schraubenfläche** (Wendelfläche), bei der die Erzeugenden die Schraubenaxe senkrecht treffen. (20×22 cm.) . . . Mk. 35.—.

132. (XX, 5.) **Schiefe geschlossene Schraubenfläche,** bei der die Erzeugenden die Schraubenaxe schief treffen. (20×22 cm.) Mk. 35.—.

Der vorletzte Fall kommt (in Verbindung mit cylindrischen Begrenzungen) bei Schrauben mit flachem Gewinde zur Verwendung, der letzte bei Schrauben mit scharfem Gewinde.

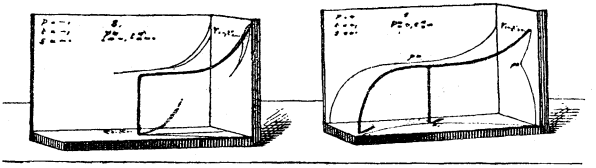
Ganze Serie Mk. 185.—.

NB. Hierher gehören auch die unter Nr. 273 u. 274 (XXVI, 16 u. 17.) aufgeführten Schraubenlinien.

133. (VIII, 5.) **Röhrenschraubenfläche.** Sie ist die einhüllende aller Kugeln von constantem Radius, deren Centra auf einer Schraubenlinie liegen. Das eine System der Krümmungslinien besteht aus den zur mittleren Schraubenlinie senkrechten Kreisen, das andere aus transcendenten Curven (weiss), die jedoch nicht Schraubenlinien wie die blau gezeichneten sind. Das Problem der Krümmungslinien führt auf Kreisfunctionen, die Asymptotencurven führen dagegen auf elliptische Functionen. Von Assistenten *Th. Kuen* (B), dazu eine Erläuterung. (20×30 cm.) . . . . . Mk. 15.50.

NB. Andere Schraubenflächen finden sich unter Nr. 225 (V, 3) Schraubenfläche von constantem positiven Krümmungsmass, Nr. 231 (V, 4) Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass, und Nr. 234 (VIII, 7a).

VI. Raumcurven und abwickelbare Flächen.



134—141. (XI.) **Modelle (aus Draht) der 8 Typen in Bezug auf das Verhalten eines Raumcurven-Elements** von Prof. *Chr. Wiener* in Karlsruhe. (11×17 cm.) Beschreibt ein Punkt *(P)* eine unebene Raumcurve, so bewegt sich im Allgemeinen zugleich seine

Tangente und die Schmiegungsebene. Dabei kann es sich ereignen, dass von den 3 Elementen eines oder zwei oder alle drei stationär werden. Den 8 verschiedenen Fällen, die hierbei eintreten können, entsprechen 8 Typen eines Elements einer Raumcurve mit im Allgemeinen singulärem Verhalten. Vergl. Ausführung zu Serie XI im I. Teil.

Zusammen Mk. 60.—.

142—150. (XXXIV, 1—9.) **Die Singularitäten von Raumcurven,** unter Leitung von Prof. H. G. Zeuthen von Frl. *Helga Lund* in Kopenhagen. Die Modelle stellen in einer neuen Art die acht verschiedenen Singularitäten der Raumcurven (die eine in zwei verschiedenen Fällen) mit ihren Tangenten und abwickelbaren Flächen dar. Während bisher derartige Curven durch gebogene Drähte, vermittelst Seidenfäden oder auf Körpern veranschaulicht wurden, bilden hier die Schnitte von Kartonblättern die Raumcurven, und Gerade, die auf Blättern eingeritzt sind, die Tangenten. Den Modellen wird eine Erläuterung beigegeben, die über die verschiedenen bemerkenswerten Verhältnisse der einzelnen Fälle, auch über die Form von Nachbarschnitten und über die Lage der Raumwinkel, in die die Kurven sich fortsetzen, Aufschluss gibt. (ca. 16×21 cm.) . . Zusammen Mk. 40.—.

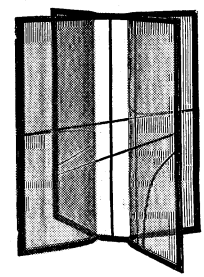
151. (VI, 6a, b, c, d.) **Die Raumcurven 3. Ord. auf Cylindern 2. Ord.** Je nachdem die unendlich ferne Ebene einer solchen Curve in einem reellen, oder in 3 reellen, oder in einem reellen und 2 zusammenfallenden (Berührung), oder endlich in 3 zusammenfallenden (Osculation) Punkten getroffen wird, unterscheidet man 4 verschiedene Typen, welche cubische Ellipse, Hyperbel, cubisch-hyperbolische Parabel und cubische Parabel genannt werden, und die auf elliptischen, hyperbolischen (Hyperbel und cubisch-hyperbolische Parabel) und parabolischen Cylindern liegen. Vergl. Salmon-Fiedler, Geom. des Raumes, II. Teil, pag. 88 ff. (2. Aufl.) Von stud. math. *Lange* modelliert und mit einer Erläuterung versehen (K). (10,5×6,5 cm.)

Zusammen Mk. 20.50.

152—157. (XXVIII, 1—6.) **Sechs Modelle zur Theorie der cubischen Raumcurve** und ihrer Anwendung in der physiologischen Optik. (K., Sg.) Mit einer Abhandlung. Von Dr. *W. Ludwig,* Breslau.

Die cubische Raumcurve kann definiert werden als der Ort der Schnittpunkte je dreier entsprechender Ebenen aus drei projectiven Ebenenbüscheln oder als der Ort der Punkte, in deren jedem sich zwei entsprechende Strahlen aus zwei kollinearen Bündeln begegnen, oder endlich als Grundcurve eines besonderen Bündels (Netzes) von Flächen 2. Grades. Aus jedem ihrer Punkte wird sie durch einen Kegel 2. Grades projiciert, aus ihren drei unendlich fernen Punkten also durch drei Cylinder 2. Grades; dabei treten vier gestaltlich ganz verschiedene Typen der Curve auf, die auf Celluloidcylindern in Metallrahmen dargestellt sind.

152. (XXVIII, 1.) **Die cubische Ellipse** mit nur einem reellen unendlich fernen Punkte und einer reellen Asymptote; mit dieser zusammen liegt sie auf einem elliptischen Cylinder. (12×14×40 cm.) Mk. 25.—.

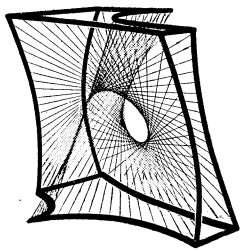


153. (XXVIII, 2.) **Die cubische Hyperbel** mit drei getrennten reellen unendlich fernen Punkten und drei reellen Asymptoten; sie liegt mit jeder der letzteren zusammen auf einem hyperbolischen Cylinder, in dessen Asymptotenebenen sich jedesmal ihre beiden anderen Asymptoten befinden; die Curve ist auf dem einen dieser drei Cylinder dargestellt. (19×28×40 cm.) . . Mk. 40.—

154. (XXVIII, 3.) **Die cubische parabolische Hyperbel,** welche die unendlich ferne Ebene in einem reellen Punkt schneidet und in einem zweiten berührt; nach dem ersten geht die einzige Asymptote der Curve, mit der zusammen sie auf einem parabolischen Cylinder liegt; der zweite bestimmt die Richtung der Kanten eines hyperbolischen Cylinders, der unsere Curve ebenfalls trägt. (16×16×40 cm.) . . . . . Mk. 25.—.

155. (XXVIII, 4.) **Die (räumliche) cubische Parabel,** welche die unendlich ferne Ebene zur Schmiegungsebene hat; durch sie geht nur ein parabolischer Cylinder, auf dem sie in diesem Modell dargestellt ist. (16×16×40 cm.) . . . . . Mk. 25.—.

Durch einen jeden Punkt des Raumes ferner, der nicht auf der cubischen Raumcurve liegt, geht stets eine und nur eine reelle Gerade, die zwei Punkte der Curve trägt; diese beiden Punkte sind entweder reell und getrennt, oder sie fallen in einen reellen Punkt zusammen, (so dass die Gerade Tangente der Curve ist,) oder endlich sie sind conjugiert imaginär. Die Projection der cubischen Raumcurve aus einem Punkte des Raumes auf irgend eine Ebene ist eine ebene Curve 3. Ordnung, die im ersten Fall einen gewöhnlichen Doppelpunkt, im zweiten einen Rückkehrpunkt und im dritten einen isolierten Doppelpunkt hat. Die Punkte in denen der zweite Fall eintritt, zeigt das folgende Modell.



156. (XXVIII, 5.) **Abwickelbare Fläche der Tangenten der Raumcurve** (Fadenmodell). Diese Fläche trennt die Punkte des ersten Falles von denen des dritten. Sie ist in diesem Modell für die im Modell 152 abgebildete cubische Ellipse dargestellt, begrenzt durch ihre Schnittcurven mit vier passend gewählten Ebenen; zur Gratcurve hat sie eben jene cubische Ellipse und enthält die Asymptote derselben, die durch einen weiss-roten Faden angedeutet ist. (36×40×40 cm.) . . . . . Mk. 30.—.

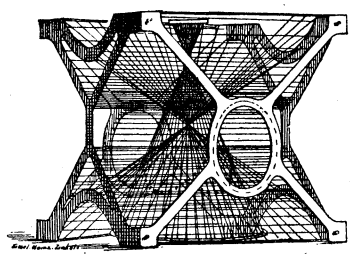
157. (XXVIII, 6.) **Horopter.** Eine interessante Anwendung findet die Theorie der cubischen Raumcurve in der physiologischen Optik. Blickt man nämlich mit beiden Augen nach einem Punkte im Raume hin, so vereinigen sich die auf den beiden Netzhäuten entworfenen Bilder dieses Punktes zu einer einzigen Empfindung; man sieht den Punkt einfach. Von den übrigen Punkten des Raumes werden bei dieser bestimmten Augenstellung nur gewisse Punkte einfach gesehen, die anderen aber doppelt, eine Thatsache, deren wir uns allerdings für gewöhnlich nicht bewusst werden. Den Ort der bei einer bestimmten Augenstellung einfach gesehenen Punkte des Raumes nennt man den zu dieser Augenstellung gehörigen Horopter; derselbe ist eine cubische Ellipse, die auf einem Kreiscylinder liegt und eine Symmetrieaxe hat. Das vorliegende Modell nun ist die verkleinerte Darstellung eines wirklichen Falles. Auf einer schwarz gehaltenen Säule sind zwei Kugeln angebracht, welche die Augen bedeuten; eine dritte Kugel stellt den fixierten Raumpunkt und die sie mit den beiden ersten Kugeln verbindenden Stäbe die Blicklinien dar; diese Teile sind aus Kupfer gearbeitet und rot-

gelb. Die Horoptercurve ist in Messing (hellgelb), ihre Asymptote und ihre Symmetrieaxe in Nickel (weiss) ausgeführt. Durch die beiden starken weissen Linien auf dem Fussbrett sind die Lagen der Medianebene und der Frontalebene angegeben und durch den kleinen schwarzen Ring an der Asymptote die Lage der durch die Kernpunkte gehenden Horizontalebene. Um die Neigung der Asymptote hervorzuheben, ist ihre orthogonale Projection als feine weisse Linie auf dem Fussbrett eingezeichnet. (20×23×47 cm.) . . . . . Mk. 25.—.
Ganze Serie Mk. 165.—.

158. (XXIII, 7.) **Raumcurve 4. Ordnung** mit unendlich fernem isolierten Doppelpunkt; von Prof. Dr. *H. Wiener.*

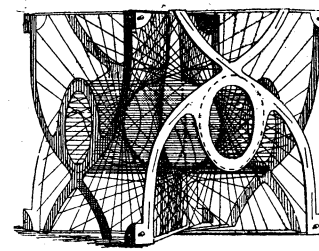
Sie erscheint als Schnitt dreier Cylinder, von denen der eine ein Umdrehcylinder, die beiden anderen parabolische Cylinder sind. Die Cylinder sind in einem Messingrahmen durch Fäden dargestellt. ($11^1/_2 \times 12^1/_2$ cm.) Mk. 6.20.

159—162. (XII, 1—4.) **Vier Fadenmodelle zu der Raumcurve 4. Ord. erster Art und ihrer abwickelbaren Fläche.** Von Prof. Dr. *H. Wiener* in Karlsruhe. Vergl. die Beschreibung bei Serie XII.



159. (XII, 1.) **Erster Fall. Die Curve liegt auf vier reellen Kegeln.** Darstellung der Curve als Schnitt dieser Kegel. (30×30×30 cm.) Mk. 128.—.

160. (XII, 2.) **Die abwickelbare Fläche der Tangenten dieser Curve.** (30×30×30 cm.) Mk. 128.—.



161. (XII, 3.) **Zweiter Fall. Die Curve liegt auf zwei reellen und zwei imaginären Kegeln.** Darstellung als Schnitt jener beiden. Das Modell zeigt zugleich die abwickelbare Fläche ihrer Tangenten. (30×30×30 cm.) Mk. 128.—.

162. (XII, 4.) **Dritter Fall. Die Curve liegt auf 4 imaginären Kegeln.** Darstellung als Schnitt zweier geradliniger Hyperboloide. Das Modell zeigt zugleich die abwickelbare Fläche der Tangenten. (30×27×32 cm.) . . . . . Mk. 75.—.
Ganze Serie Mk. 435.—.

163—169. (XXI, 1—7.) **Fadenmodelle der abwickelbaren Flächen der Raumcurven 4. Ord. zweiter Art.** Von Prof. Dr. *Karl Rohn* in Dresden.

Bei den Raumcurven 4. Ord zweiter Art, die sich als teilweiser Schnitt eines Hyperboloids mit einer Fläche 3. Ord. darstellen, existiert ein Fundamentaltetraeder; in Bezug auf dieses gruppieren sich die Curvenpunkte zu je vier derart, dass ihre 6 Verbindungslinien die Gegenkanten des Tetraeders paarweise treffen, und dass sie durch die Kanten harmonisch getrennt werden. Drei der Kanten des Tetraeders sind Doppelsecanten der Curve. Das Tetraeder ist zugleich Polartetraeder für das Hyperboloid, auf dem die Curve gelegen ist. In den Modellen 1, 2, 3 u. 4 wurde ein Rotationshyperboloid und seine Axen als Doppelsecanten gewählt. Dreht man die Curve um eine der drei Axen um 180°, so nimmt sie wieder die nämliche räumliche Lage ein. Von Bedeutung sind die 4 Punkte (W) mit Wendeberührebenen. Die Doppelcurve der

abwickelbaren Fläche geht durch sie hindurch und sie erscheinen deshalb als Zwickpunkte derselben. Ferner gibt es 4 Curventangenten (T), die die Curve noch in einem weiteren Punkte schneiden. Diese Punkte bilden Spitzen für die Doppelcurve, und längs jener Tangenten durchschneidet die abwickelbare Fläche das Hyperboloid. Dargestellt sind:

163. (XXI, 1.) **Raumcurve 4. Ordnung mit 4 reellen (T) und keinem reellen (W).** Die Trisecanten schneiden die Curve, die ganz im Endlichen liegt, teils in drei, teils in einem reellen Punkte. Die abwickelbare Fläche liegt teils ausserhalb, teils innerhalb des Hyperboloids, das sie längs jener Tangenten durchdringt; ihre Doppelcurve liegt ganz ausserhalb und ruht mit 4 Spitzen auf demselben auf. . . . . Mk. 64.—.

164. (XXI, 2.) **Raumcurve 4. Ord. mit reellen (W) und ohne reelle (T).** Die Curve liegt ganz im Endlichen; alle Trisecanten treffen sie nur in einem reellen Punkte. Die abwickelbare Fläche liegt ganz ausserhalb des Hyperboloids; ihre Doppelcurve durchdringt das Hyperboloid in jenen 4 Punkten, welche Zwickpunkte für sie sind. Mk. 54.—.

165. (XXI, 3.) **Raumcurve 4. Ord. ohne reelle (T) und (W).** Die Curve verläuft vier Mal durchs Unendliche. Die Raumcurve projiciert sich für das Auge als ebene Curve mit dreifachem Punkte oder mit drei reellen Doppelpunkten, von denen einer isoliert sein kann. . . . . Mk. 30.—.

166. (XXI, 4.) **Raumcurve 4. Ord. mit zwei reellen (T) und zwei reellen (W)** Sie läuft zwei Mal durchs Unendliche, kann aber ganz ins Endliche gebracht werden. Von dem Fundamentaltetraeder sind hier nur noch zwei Gegenkanten reell, von denen eine als Axe des Hyperboloids in der Ebene des Kehlkreises gewählt ist. . Mk. 52.—.

167. (XXI, 5.) **Raumcurve 4. Ord. mit zwei Streckungspunkten** (drei consecutive Curvenpunkte in gerader Linie). Diese Curve bildet den Uebergang von XXI, 1 nach 2. Die abwickelbare Fläche zeigt eine Doppelcurve von gleicher Beschaffenheit, wie die gegebene Raumcurve und ausserdem zwei Rückkehrgeraden, nämlich die Tangenten in den Streckungspunkten. Im Fall 1 vereinigen sich diese Rückkehrgeraden mit der Doppelcurve, wobei dann die Spitzen entstehen; im Fall 2 verschwinden sie. Mk. 48.—.

168. (XXI, 6.) **Specialfall des vorigen.** Die beiden Punkte mit Wendeebenen fallen mit den Schnittpunkten der beiden schneidenden Curventangenten zusammen. Natürlich ist auch diese Curve nur in Bezug auf eine Axe symmetrisch. Die abwickelbare Fläche besitzt eine dreifache Curve — im Modell ist sie ein Kreis —, die dadurch entsteht, dass im Fall 5 jede Spitze der Doppelcurve mit einem ihrer beiden Durchdringungspunkte (Zwickpunkte der Fläche) zusammenrückt. . . . . Mk. 49.—.

169. (XXI, 7.) **Raumcurve 4. Klasse,** die aus XXI, 6 durch reciproke Raumtransformation abgeleitet ist; sie liegt auf einem Kreiscylinder und besitzt zwei Spitzen. Mk. 49.—.

Vergl. auch die Erläuterung bei Serie XXI.

(Grösse aller Mod. 20×20×20 cm.)

Ganze Serie Mk. 320.—.

170. 171. (XVII, 2.) **Die sieben Haupttypen der ebenen Curven 3. Ord., nach Möbius auf einer Kugel dargestellt.** Vergl. die Modelle der Kegel 3. Ordnung, Nr. 78—84. (XXV, 1—7.)

Diese sphärischen Curven vereinigen die gestaltlichen Eigentümlichkeiten der collinear-verwandten Typen in einem Bilde, während jede ebene Darstellung den Verlauf der Curve im Unendlichen entstellt.

Von den 7 Typen sind drei durch Spaltung eines der 5 Newton'schen Haupttypen entstanden. Sie bestehen aus einem unpaaren Zug und unterscheiden sich nur durch die Lage der Verbindungslinie der Wendepunkte gegen das Dreieck der Wendetangenten. Sie sind hier auf einer Kugel (Nr. 170)

vereinigt. Die andere Kugel (Nr. 171) enthält die Typen mit Oval, mit Doppel-, Rückkehr- und isoliertem Punkt.

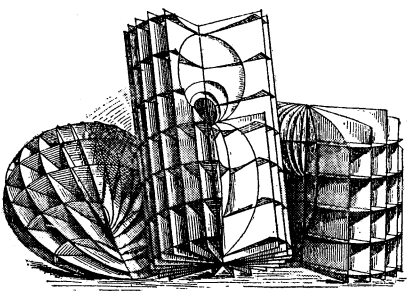
Construiert von stud. *Dollinger* in Tübingen (B). (10 cm.)

Beide Kugeln zusammen Mk. 12.—.

VII. Infinitesimalgeometrie der Flächen.

a) Krümmung der Flächen im einzelnen Punkte.

172—174. (XXII, 1—3.) **Cartonmodelle über die Krümmung der Flächen,** entworfen von Ingenieur *C. Tesch* in Karlsruhe (W).



Sind r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien einer Fläche in einem gewissen Punkte, so sind für das Gauss'sche Krümmungsmass die drei Fälle zu unterscheiden:

$$\frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{r_2}\gtreqless 0.$$

Ihnen entsprechend liegen die Krümmungskreise auf derselben Seite der Berührungsebene, oder der eine der Hauptkrümmungskreise ist in eine Gerade übergegangen, oder die Krümmungskreise liegen auf beiden Seiten der Berührungsebene.

Jedes der diese 3 Fälle darstellenden Modelle zeigt ausser 12 Krümmungskreisen noch die Schar der Schnittcurven der von den Krümmungskreisen gebildeten Fläche mit zur Flächennormale senkrechten Ebenen.

Zusammen Mk. 16.—.

175. (XXX, 3.) **Fläche mit parabolischem Punkte.** Auf Veranlassung von Prof. *Stäckel* in Kiel ausgeführt von cand. math. O. Losehand und cand. math. W. Quidde. Die Fläche enthält auf der vorderen Seite hyperbolische, auf der hinteren Seite elliptische Punkte. Beide Gebiete werden getrennt durch eine Curve parabolischer Punkte, und zwar ist diese Curve eine Parabel 2. Ordnung. Die Fläche enthält also alle 3 Arten des Krümmungsmasses. Zugleich stellt sie die erste Annäherung in der Nähe eines parabolischen Punktes dar. Der parabolische Punkt, für den die Fläche Osculationsfläche ist, wird auf der Fläche kenntlich gemacht durch den Schnitt einer conischen, einer cubischen und einer semicubischen Parabel. Eine Abhandlung von Prof. Dr. Stäckel ist beigelegt. (15×15×15 cm.)

Mk. 7,50.

176. (XXX, 8.) **Fläche 4. Ordnung, für deren singulären Nullpunkt**

$$\frac{d^2z}{dxdy}\mp\frac{d^2z}{dydx}$$

ist, nach Prof. Sommer und Prof. Schilling von cand. mach. *W. Fischer* in Danzig.

Das Modell stellt die Fläche

$$z=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

dar. Die dargestellte Fläche enthält insgesamt vier gerade Linien, nämlich die x- und y-Axen, sowie die Halbierungslinien ihrer Winkel. Man erkennt am Modell leicht die verschiedenen Symmetrieeigenschaften, welche die Fläche besitzt. Anscheinend weist dieselbe keine Singularitäten auf, sie hat in jedem im Endlichen gelegenen Punkt eine bestimmte Tangentialebene. Der Nullpunkt ist dagegen ein singulärer (Ausnahme-) Punkt der Fläche. In der Tat ist auch die Indikatrix für diesen Flächen-

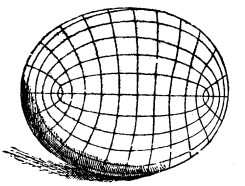
punkt nicht mehr eine Curve zweiten Grades, wie für einen gewöhnlichen Flächenpunkt, sondern eine Curve 4. Ordnung, welche aus zwei hyperbelartigen Zügen sich zusammensetzt. (18×18×17,5 cm.) . . Mk. 18.—.

b) Krümmungslinien, insbesondere auf den Flächen 2. Ordnung; confocale Flächen.

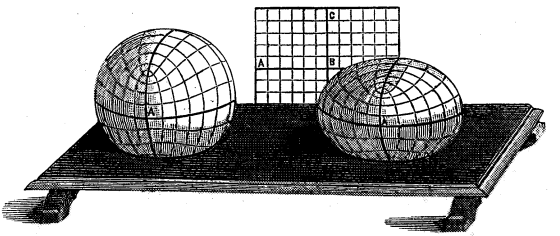
177. (XXIII, 1b.) **Kleines dreiaxiges Ellipsoid mit Krümmungslinien** . . . Mk. 2.40.

178. (III, 2.) **Ellipsoid mit Krümmungslinien.** Modelliert, wie auch die übrigen Flächen 2. Ordnung mit Krümmungslinien, von *R. Diesel* in München (B). Nebst zwei erläuternden Abhandlungen.

Die Hyperboloide erster und zweiter Art, welche mit dem Ellipsoid zu demselben confocalen Flächensystem gehören, schneiden aus ihm die Krümmungslinien aus (die Schnittcurven eines confocalen Flächensystems sind für alle 3 Scharen Krümmungslinien). Man kann diese Curven auch dadurch erhalten, dass man in 2 von den 4 Nabelpunkten (den Berührpunkten der zu den Kreisschnitten parallelen Tangentialebenen) die Endpunkte eines Fadens befestigt und ihn vermittelst eines Stiftes anspannt. Lässt man den Stift sich bewegen, so beschreibt er eine Krümmungslinie. Axenverhältnis des Ellipsoids $\sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}$, grosse Halbaxe 5 cm. (10×6 cm.) Mk. 3.20.



179. (III, 4.) **Dasselbe**, grosse Halbaxe 9 cm. (18×11 cm.) . . . . . Mk. 8.—.



180°. (XVI, 1.) **Ellipsoid, welches durch seine Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt wird.** Von Prof. *Neovius* in Helsingfors. Es sind die 3 Hauptschnitte und 18 Krümmungslinien aufgezeichnet.

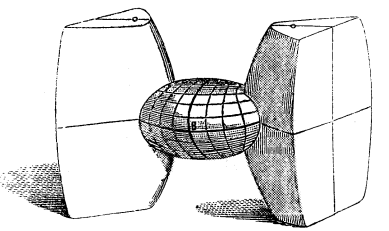
181°. (XVI, 2.) Rechteckige Platte hierzu, mit geraden Linien versehen, welche den Krümmungslinien auf dem Ellipsoid entsprechen.

182°. (XVI, 3.) **Kugel** mit 3 grössten Kreisen und 18 confocalen **sphärischen Kegelschnitten,** welche wiederum den Krümmungslinien des Ellipsoids entsprechen.

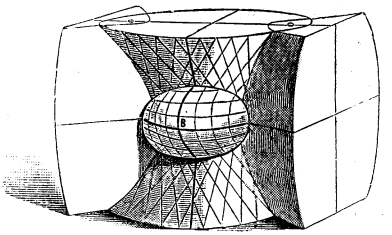
Zu den drei Modellen gehört ein gemeinsamer Holzuntersatz.

Zusammen Mk. 35.—.

183. (XVI, 6.) **Vereinigung** des vorgenannten Ellipsoids mit einem confocalen einschaligen Hyperboloid . . Mk. 18.—.



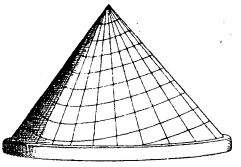
184. (XVI, 7.) **Vereinigung** desselben Ellipsoids mit einem confocalen zweischaligen Hyperboloid . . . . . Mk. 21.—



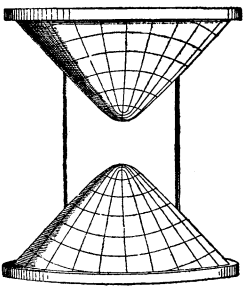
185. (XVI, 9.) **Vereinigung** des Ellipsoids mit einem confocalen einschaligen und einem confocalen zweischaligen Hyperboloid. Mk. 25.—.

186. (III, 7.) **Einschaliges Hyperboloid mit Krümmungslinien.** (23×23 cm.) Mk. 13.—.

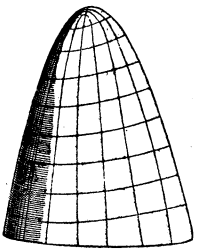
Die Modelle Nr. 183 bis 186 sind von stud. math. *Haussner* in Göttingen (S) hergestellt.



187. (III, 18.) **Elliptischer Kegel mit Krümmungslinien.** Die eine Schar von Krümmungslinien sind die Erzeugenden, die andern sphärische Curven; sie werden durch den Endpunkt eines Fadens beschrieben, dessen anderer Endpunkt in der Spitze befestigt ist. Dieser Kegel ist Asymptotenkegel zu Nr. 186 und 188. (23×13 cm.) Mk. 6.60.



188. (III, 9.) **Zweischaliges Hyperboloid mit Krümmungslinien.** Es besitzt 4 reelle Nabelpunkte. Das eine System von Krümmungslinien, das aus der Fläche durch die Ellipsoide des zugehörigen confocalen Systems ausgeschnitten wird, kann durch dieselbe Fadenconstruction wie beim Ellipsoid construiert werden, das andere durch die einschaligen Hyperboloide ausgeschnittene aber nicht. (23×13 cm.) . . Mk. 19.50.



189. (III, 12.) **Elliptisches Paraboloid mit Krümmungslinien.** Diese Curven schlingen sich um die 2 reellen Nabelpunkte der Fläche; das geschlossene System läßt sich durch die beim Ellipsoid angegebene Fadenconstruction finden. Diese Fläche gehört vermöge der Gleichung:

$$\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}+2z=\lambda$$

einem dreifach orthogonalen System an, das 2 Systeme von elliptischen Paraboloiden, eins nach der positiven, das andere nach der negativen Seite der z-Axe geöffnet, und ein System hyperbolischer Paraboloide enthält. Die Durchdringungscurven dieser Flächen sind Krümmungslinien derselben. (12×20 cm.) . . . . . Mk. 8.—.

190. (III, 16.) **Hyperbolisches Paraboloid mit Krümmungslinien** (vergl. Bemerkung zu der vorhergehenden Fläche. (16×12 cm.) Mk. 5.70.

191. (X, 2b.) **Modell zu Staude's Fadenconstruction des Ellipsoids aus 2 confocalen Flächen zweiten Grades.** Wenn ein geschlossener unausdehnbarer Faden, der um zwei ineinandergefügte confocale Flächen, ein Ellipsoid und ein einschaliges Hyperboloid, herumgeschlungen ist, durch einen

beweglichen Punkt derart gespannt wird, dass er beständig jeden der beiden durch das Ellipsoid getrennten Teile des Hyperboloids berührt (sei es in einem Punkt oder längs eines ganzen Curvenzugs), so beschreibt der Punkt ein den gegebenen Flächen confocales Ellipsoid. Der rote Faden legt sich an beide Teile des Hyperboloids längs eines Teiles der Schnittcurve an (erster Fall), der andere, gelbe, nur an den einen Teil, berührt dagegen den andern nur in einem Punkt (zweiter Fall). (20×9 cm.) . Mk. 7.—.

192. (X, 2a.) **Modell (aus Draht) zu Staude's Fadenconstruction des Ellipsoids aus den 2 Focalcurven** des zum Ellipsoid gehörigen confocalen Flächensystems. (Specieller Fall der vorigen Erzeugungsweise). Der Apparat gestattet nur das obere vordere Viertel des Ellipsoids zu construieren; dabei muss sich der Faden von unten an die Ellipse, von hinten an die Hyperbel anlegen. Die Länge des Fadens ist gleich der grössten Axe des Ellipsoids, vermehrt um die Differenz der Excentricität der Ellipse und Hyperbel. (20×10 cm.) . . . Mk. 8.50.

Beide Modelle sind von Dr. *O. Staude* construiert. (Vergl. dessen Abhandlung in den Math. Annal. Bd. 20, pag. 147.) Erläuterungen des Verfassers sind beigegeben.

Zusammen Mk. 15.50.

193. (XVII, 13.) **Fläche, auf welche das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird.** Von Dr. *K. Reinbeck* in Einbeck (S).

Die Fläche wird durch ihre **Krümmungslinien** in unendlich kleine Quadrate geteilt. Mit Hülfe des Modells lässt sich eine Vorstellung gewinnen von der Gestalt derjenigen Flächen, auf welche die übrigen Flächen zweiten Grades durch parallele Normalen conform abgebildet werden . Mk. 14.—.

194°. (X, 11a.) **Bohnenförmiger Körper** mit Symmetrieebenen zur Anstellung von Proben bezüglich des Verlaufes der **Krümmungslinien, Asymptoten- und parabolischen Curven** auf einer Fläche. (14×8 cm.)

195°. (X, 11b.) **Dasselbe** anderer Gestalt (tordierte Bohne). (10×6 cm.)

Zusammen Mk. 3.50.

Hierher gehören ferner die Abt. III, a unter Nr. 85 ff. aufgeführten Cycliden, deren Krümmungslinien bekannt sind, die Röhrenschraubenfläche Nr. 133 (VIII, 5), die windschiefe Schraubenfläche Nr. 245 (VIII, 6a.), die Flächen von constantem positiven Krümmungsmass nach *Enneper* Nr. 226. 227 (XVII, 3) und die Bianchi'sche Fläche Nr. 232 (VIII, 1).

c) Asymptotencurven und parabolische Curven.

196—207. (X, 10a—m.) **Modelle von verschiedenen Rotationsflächen mit aufgezeichneten Asymptotencurven.** Man gelangt zu denselben durch die Frage nach solchen Rotationsflächen, deren Asymptotencurven zur Projektion auf eine Ebene senkrecht zur Axe gegebene Curvensysteme (logarithmische Linien, Kreise etc.) besitzen; a. bis l. von *Herting* in München berechnet und modelliert. (B).

Zusammen Mk. 92.—.

196°. (X, 10a.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Parabel** um ihre Scheiteltangente. Gleichung der Fläche

$$z^2 = r \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

der Projection der Asymptotencurven in Polarcoordinaten $\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}} \log r$. (19×13 cm.)

197°. (X, 10b.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der cubischen Parabel** um ihre Wendetangente. Gleichung der Fläche $z^3 = 27\,r$, der Projection der Asymptotencurven in Polarcoordinaten $\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \log r$. (14×14 cm.)

198°. (X, 10f.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Neil'schen Parabel** um ihre Rückkehrtangente. Gleichung der Fläche $z^3 = 25\,r^2$, der Projection der Asymptotencurven in Polarcoordinaten $\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}} \log r$. (14×17 cm.)

199°. (X, 10d.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der gleichseitigen Hyperbel** um eine ihrer Asymptoten. Gleichung der Fläche $z \cdot r = 6$, der Projection der Asymptotencurven in Polarcoordinaten $\varphi = \sqrt{2} \log r$. (15×16 cm.)

200°. (X, 10c.) **Rotationsfläche,** deren Gleichung ist $zr^2 = 8$. Gleichung der Asymptotencurven $\varphi = \sqrt{3} \log r$. (15×16 cm.)

201°. (X, 10e.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der logarithmischen Spirale** um ihre Asymptote. Gleichung der Fläche $z = 6 \log r$, der Projection der Asymptotencurven $\varphi = \log r$. (16×11 cm.)

202°. (X, 10k.) **Rotationsfläche, entstanden durch Drehung der Parabel** um eine Parallele zur Axe. Gleichung der Fläche $z = a(r-a)^2$, der Projection der Asymptotencurve $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r}{a}}$, (Cardioide). (16×16cm.)

203°. (X, 10g.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Parabel** um eine Parallele zur Scheiteltangente. Gleichung der Fläche $z^2 = a^2(r-a)$, der Projection der Asymptotencurven

$$\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \log \frac{2\left(r + \sqrt{r(r-a)}\right) - a}{a}.$$

(18×15 cm.)

204°. (X, 10h.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der cubischen Parabel** um eine Parallele zur Wendetangente. Gleichung der Fläche $z^3 = a^3(r-a)$, der Projection der Asymptotencurven:

$$\varphi = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \log \frac{2\left(r + \sqrt{r(r \pm a)}\right) \pm a}{a}.$$

(18×19 cm.)

205°. (X, 10i.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Neil'schen Parabel** um eine Parallele zur Rückkehrkante. Gleichung der Fläche $z^3 = a^3(r-a)^2$, der Projection der Asymptotencurven

$$\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \log \frac{2\left(r + \sqrt{r(r-a)}\right) - a}{a}.$$

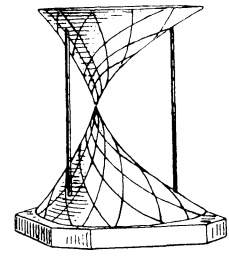
(13×17 cm.)

206°. (X, 10l.) **Rotationsfläche,** deren Gleichung ist

$$z = \frac{1}{2c}\left(\sqrt{c^2 - r^2} - c^2 \arccos \frac{r}{c}\right).$$

Die Projection der Asymptotencurven ergibt ein System von Kreisen, die durch denselben Punkt gehen. (14×20 cm.)

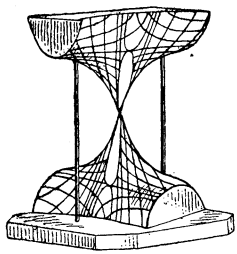
207°. (X, 10m.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Sinuslinie** $z = \cos r$. Das Modell erläutert das Verhalten der Asymptotencurven in der Nähe der parabolischen Curve. Im Allgemeinen setzen die Asymptotencurven auf die parabolische Curve mit Spitzen auf, und nur wenn letztere die Berührungscurve einer Doppeltangentialebene ist, wird sie von den Asymptotencurven berührt. Das in dem Ausdruck für den Bogen auftretende Integral wurde mit Hilfe der Gauss'schen Näherungsmethode ausgewertet. Die aufgezeichneten Kreise bilden die parabolische Curve. Berechnet und construiert von stud. math. *Sievert* in München. (B). (21×5 cm.)



208—211. (XVII, 7a. b. c. d.) **Verschiedene Typen conischer Knotenpunkte** mit Angabe des Verlaufes der parabolischen Curve und der Asymptotencurven in der Umgebung dieser Punkte. Ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. Dyck und Prof. Dr. Finsterwalder von Professor *A. Sucharda* in Prag.

Berücksichtigt man in der Taylor'schen Entwicklung der Flächengleichung im Knotenpunkt $f(x, y, z) = u_2 + u_3 + \ldots = 0$ die Glieder 2. und 3. Ordnung, so hat man bekanntlich nach der Realität der 6 Schnitt-

geraden der Kegel $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$ vier Hauptfälle zu unterscheiden: 6, 4, 2, 0 dieser Schnittgeraden reell. Zur Darstellung dieser Fälle sind specielle, jedoch hinreichend all-



gemeine Beispiele ausgewählt. Des Näheren vergl. die Abhandlung von Sucharda, Über die asymptotischen Curven gewisser Flächen dritter Ordnung mit gewöhnlichem Knotenpunkt. Monatshefte für Math. und Physik, VIII. Jahrgang. (Höhe ca. 20 cm.)

Zusammen Mk. 84.—.

212. (II, 2.) **Fläche 3. Ord.** vierter Classe mit 4 reellen conischen Knoten, **auf welche eine Asymptotencurve** (gelb) **aufgezeichnet ist;** sie entspricht dualistisch einer Asymptotencurve der Steiner'schen Fläche (4. Ord., dritter Classe) und ist nach Clebsch (Crelle Bd. 67, S. 9) eine Raumcurve 6. Ord., vierter Classe, die in jedem Knotenpunkt der Fläche einen Rückkehrpunkt besitzt. Von *Bacharach* in München (B). Erläuterung beigegeben. (13×22 cm.) . . . . . Mk. 16.50.

NB. Asymptotencurven finden sich auch auf der Römischen Fläche von Steiner Nr. 100 (IX, 3); auf den Rotationsflächen von constantem negativen Krümmungsmass Nr. 228 (II, 4) und 230 (I, 1); auf der windschiefen Schraubenfläche Nr. 245 (VIII, 6a) und auf der Minimalfläche Nr. 246 (VIII, 2.)

d) Geodätische Linien auf Flächen 2. Ordnung.

213. (I, 4.) **Geodätische Linien auf dem verlängerten Rotationsellipsoid.** Das Problem führt auf elliptische Funktionen. Es sind 3 Linien (rot, blau, violett) aufgezeichnet. Construiert und mit Erklärung versehen von stud. math. *Rohn* in München (B). (12×18 cm.) . . . . . Mk. 7.—.

214. (I, 5.) **Geodätische Linien durch die Nabelpunkte** (siehe Bemerkung zu Nr. 178) **eines dreiaxigen Ellipsoids.** Das Problem führt auf elliptische Functionen. Eine geodätische Linie durch den einen Nabelpunkt geht stets auch durch den ihm gegenüber liegenden und nähert sich nach einer Richtung asymptotisch demjenigen Hauptschnitt, der durch die beiden Nabelpunkte geht. (Vgl. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie II. Teil, 2. Aufl., pag. 167 ff.) Berechnet und construiert von stud. math. *Rohn* (B). Erläuterung beigegeben. (10×18 cm.) Mk. 7.—.

215. (V, 7a.) **Verlängertes Rotationsellipsoid mit geodätischen Linien und Enveloppen von Systemen solcher, welche von einem Punkt ausgehen.** Diejenigen geodätischen Linien, welche die symmetrisch gestaltete der 2 roten, vierspitzigen Curven umhüllen, kommen von einem Punkte A des Äquators, diejenigen, welche die andere rote Curve berühren, von einem auf einem Parallelkreis gelegenen Punkte A_1. Zwei der 4 Spitzen der zu A_1 gehörigen Enveloppe liegen selbstverständlich in dem durch A_1 gehenden Meridian, die zwei andern auf dem zum Parallelkreis durch A_1 symmetrisch gelegenen Parallelkreis und zugleich auf der geodätischen Linie, welche in A_1 den Parallelkreis durch A_1 berührt. (Vgl. Nr. 217.) (12×8 cm.) Mk. 7.50.

216°. (X, 12c.) **Dasselbe in grösserem Massstabe.** Die von einem Punkt A ausgehenden geodätischen Linien bilden eine Enveloppe, die von einem in A befestigten Faden umhüllt wird. (18×12 cm.)

217. (V, 7b.) **Sphäroid** (abgeplattetes Rotationsellipsoid) **mit geodätischen Linien und Enveloppen** von Systemen solcher, welche von einem Punkt ausgehen. Die Bedeutung und Gestalt der Curven wie in Nr. 215. (17×10 cm.) . . . . . Mk. 6.50.

218°. (X, 12b.) **Dasselbe, grösserer Massstab.** Durch einen im Punkte A befestigten Faden kann man die Erzeugung der Enveloppen demonstrieren. (18×13 cm.)

219°. (X, 12a.) **Dreiaxiges Ellipsoid nebst Andeutung der Enveloppe von geodätischen Linien,** welche von einem Punkt ausgehen. Durch den Ausgangspunkt der geodätischen Linien gehen 2 Krümmungslinien; die 4 Spitzen der Enveloppe (auch hier ist sie ein vierspitziger Curvenzug) liegen zu je zweien auf denjenigen Krümmungslinien, welche zu den durch den Ausgangspunkt gehenden beiden symmetrisch liegen. Vgl. Dr. A. v. Braunmühl's Abhandl. in den Math. Annalen, Bd. 20, pag. 557 ff. (19×11 cm.)

Nr. 216, 218 u. 219 zus. Mk. 16.—.

Die Modelle Nr. 215—219 wurden von Dr. *A. von Braunmühl* in München (B) construiert. Vergl. dessen Abhandlung in den Math. Annalen Bd. 14, pag. 553 ff. u. Bd. 20. Erläuterung beigegeben.

Geodätische Linien finden sich auch auf den Flächen von constantem Krümmungsmass Nr. 220, 221, 228—230 und von constanter mittlerer Krümmung Nr. 239—243.

e) Flächen von constantem Krümmungsmass und aufeinander abwickelbare Flächen.

Für die Flächen von constantem Krümmungsmass ist das Product der beiden Hauptkrümmungsradien, dessen reciproker Wert nach Gauss gleich dem Krümmungsmass der Fläche in dem betrachteten Punkt ist, an jeder Stelle dasselbe. Nach dem Vorzeichen dieses Productes unterscheidet man Flächen von constanter positiver oder negativer Krümmung oder von der Krümmung Null. Alle Flächen von gleichem constanten Krümmungsmass sind ohne Dehnung und Schrumpfung auf einander aufbiegbar und in sich selbst verschiebbar, wie z. B. die Ebene oder die Kugel. Man kann auf solchen Flächen daher von Congruenz der Figuren reden, weil man getrennt gelegene Flächenstücke durch Verschiebung in der Fläche selbst zur Deckung bringen und mit einander vergleichen kann. Die notwendige Bedingung zum Aufbau einer Geometrie, im Euklidischen Sinn, ist damit für diese Flächen gegeben; an die Stelle der „Geraden" tritt hier nur die kürzeste, d. h. die „geodätische Linie". Die Geometrie auf den Flächen von constanter positiver Krümmung ist die gewöhnliche sphärische Geometrie; die auf den Flächen von constanter negativer Krümmung wird Nicht-Euklidische Geometrie genannt und deckt sich mit der durch Lobatschewsky begründeten, welche des elften Axioms von Euklid entbehrt. Der Unterschied zwischen dieser und der sphärischen hat ein verschiedenes Verhalten der unbegrenzt verlängerten geodätischen Linien zur Folge. (Vergl. die diesbezüglichen Anmerkungen zu den Modellen beider Flächengattungen).

Die nachfolgenden Flächenmodelle sind bestimmt, dem Studium dieser Geometrie zu dienen. Zu diesem Zweck sind einzelnen Nummern verbiegbare Messingbleche von dem Krümmungsmass der Flächen beigegeben, welche jeder beliebigen Stelle einer Fläche von dem gleichen Krümmungsmass, wie es der Streifen besitzt, sich anschmiegen.

Die partielle Differentialgleichung, durch welche diese Flächen definiert sind, wird unter Voraussetzung einer Rotationsfläche zu einer gewöhnlichen integrierbaren und liefert für die Meridiancurve der Fläche die Gleichung

$$z = \int \sqrt{\frac{c - r^2}{r^2 - c + t^2}}\, dr;$$

wobei $\pm t^2$ der reciproke Wert des Krümmungsmasses der Fläche ist.

Sowohl für die Flächen positiver wie für die negativer Krümmung erhält man 2 verschiedene Typen, zwischen denen ein Übergangsfall mit einfacheren Eigenschaften liegt (Kugel und Tractrixfläche).

220—222. (V, 2.) **Rotationsflächen von constantem positiven Krümmungsmass** mit

geodätischen Linien. Drei Typen mit gleichem Krümmungsmass $= \frac{1}{4{,}33^2}$ (in Centimetermass). Da diese Flächen auf eine Kugel abwickelbar sind und geodätische Linien bei der Abwickelung erhalten bleiben, so treffen sich alle von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien wieder in einem Punkt. Nach Zeichnungen von E. Bour, Journal de l'Ecole Polytechnique, Tome 22 modelliert und mit geodätischen Linien versehen von Assistenten Dr. *P. Vogel* (B).

220. (V, 2b.) **Spindeltypus;** die Meridiancurve trifft die Axe. (11×7 cm.) Mk. 4.60.

221. (V, 2c.) **Wulsttypus;** die Meridiancurve der Fläche trifft die Axe nicht. (10×12 cm.) . . . . . Mk. 10.50.

222. (V, 2a.) **Kugel;** Zwischenfall, Radius 4,33 cm . . . . . Mk. 1.25.

Die Flächen von constanter Krümmung sind, als dünne Haut gedacht, wie bereits erwähnt, in sich selbst verschiebbar und auf einander abwickelbar. Man kann dies durch die folgenden biegsamen, auf diese Flächen aufgepassten Streifen von Messingblech erproben.

223°. (X, 6a.) **Flächenstreifen von constanter positiver Krümmung aus Messingblech.** Kugelzone, einem Centriwinkel von fast 90° entsprechend.

224°. (X, 6b.) **Hohle Halbkugel aus Messingblech.** Beide zusammen Mk. 4.50.

225. (V, 3.) **Schraubenfläche von constantem positiven Krümmungsmass,** auf die vorhergehenden 3 Flächen abwickelbar, indem das Krümmungsmass mit dem der vorhergehenden Flächen übereinstimmt. Die Gleichung der Meridiancurve führt auf elliptische Functionen. Ganghöhe der Schraube 10,9 cm. Schneidet man aus der vorherigen Kugel eine von 2 gleich grossen Parallelkreisen begrenzte Zone (einem Centriwinkel von 90° entsprechend) heraus, so geht diese durch gegenseitige Verschiebung der Endschnitte in diese Schraubenfläche über, wie sich dies mit Hülfe der Kugelzone aus Messingblech zeigen lässt. (24×15 cm.) . . . . . Mk. 15.—.

Von stud. math. *Kuen* in München (B). Erläuterung hierzu und auch zu den vorhergehenden Rotationsflächen beigegeben.

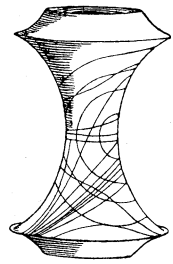
226. 227. (XVII, 3.) **Zwei Flächen von constantem positiven Krümmungsmass mit einem System ebener Krümmungslinien.** Die eine (Nr. 226) repräsentiert den allgemeinen, von Enneper zuerst (Göttinger Nachrichten 1868) untersuchten Fall, dass die Coordinaten der Fläche elliptische Functionen von 2 Parametern sind; die andere (Nr. 227) den von Kuen (Bayr. Acad. Sitzungsber. 1884) nachgewiesenen besonderen, wo Kreisfunctionen für die Coordinatendarstellung ausreichen. Letzterer entspricht dem Typus der Bianchischen Fläche (Nr. 232) für Flächen von negativem Krümmungsmass.

Die Flächen sind beide auf die Kugel Nr. 222 abwickelbar. (16×16×8 u. 16×15×14 cm.) . . . Zusammen Mk. 21.—.

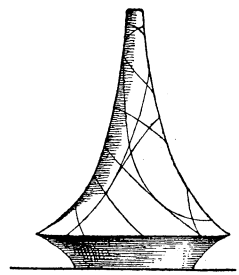
Die Flächen von constantem negativen Krümmungsmass unterscheiden sich wesentlich durch die Eigenschaften ihrer geodätischen Linien von denen positiver Krümmung. Die von einem Punkt ausgehenden Linien treffen sich überhaupt nicht mehr. Durch einen Punkt der Fläche gehen unendlich viele Linien, die eine gegebene geodätische Linie schneiden, zwei (nach jeder Seite eine) zu ihr parallele (sie im Unendlichen treffende) und unendlich viele sie nicht schneidende. Unter einem geodätischen Kreis versteht man diejenige Curve, die der Endpunkt eines am anderen Endpunkte befestigten auf der Fläche aufliegenden angespannten Fadens beschreibt. — Um Vieldeutigkeit zu vermeiden, hat man sich eine Rotationsfläche als unendlich dünne, über das Modell der Rotationsfläche unendlich oft gewickelte Haut zu denken (als Schraubenfläche von der Ganghöhe Null).

228. (II, 4.) **Rotationsfläche von constantem negativen Krümmungsmass (Kegeltypus),** nebst geodätischen Linien (blau) und einer

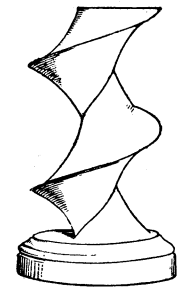
Asymptotencurve. Von stud. math. *Bacharach* in München (B). Erläuterung beigegeben. (17×17 cm.) . . . . . Mk. 10.50.



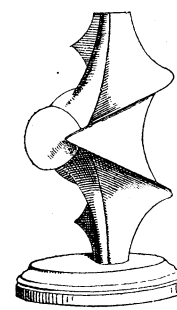
229. (II, 5.) **Ebenso (Hyperboloidtypus).** Es ist ein System paralleler geodätischer Linien aufgezeichnet (grün), worunter sich 2 (rot) befinden, die sich dem Kehlkreis asymptotisch nähern. Die geschlossenen Curven sind geodätische Kreise. Von stud. math. *W. Dyck* in München. Erläuterung beigegeben. (13×21 cm.) . . Mk. 14.—.



230. (I, 1.) **Rotationsfläche der Tractrix,** durch Umdrehung um ihre Asymptote entstanden. Die Tractrix ist durch die Eigenschaft definiert, dass alle Tangenten zwischen dem Berührpunkt und einer Geraden, der Asymptote, constante Länge besitzen. Diese Fläche bildet den Übergang zwischen den beiden vorgenannten Flächen und entspricht der Kugel bei den Flächen constanter positiver Krümmung. Die blau gezeichneten Curven auf ihr sind verschiedene geodätische Linien, die rote ist eine Asymptotencurve, deren Torsion bekanntlich gleich der Wurzel aus dem negativen Krümmungsmass der Fläche an der betreffenden Stelle, also für diese Curve allenthalben dieselbe ist. Von stud. math. *Bacharach* in München (B). Erläuterung beigegeben. (25×18 cm.) Mk. 11.—.



231. (V, 4.) **Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass,** deren Meridiancurve die Tractrix ist. Sie ist die einzige Schraubenfläche von der erwähnten Art, in deren Gleichung nicht elliptische Functionen eintreten. (Bei Flächen constanter positiver Krümmung gibt es keine von dieser Eigenschaft). Vergl. U. Dini, Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris 1865, I. Sem. pag. 340; Th. Kuen, Berichte der kgl. bayr. Acad. 1884. Von Dr. *P. Vogel* in München (B). Erläuterung beigegeben. (24×15 cm.) . . . . . Mk. 18.—.



232. (VIII, 1.) **Fläche von constantem negativen Krümmungsmass mit ebenen Krümmungslinien nach Enneper.** Sie entsteht aus der Tractrixfläche von der Krümmung $-\frac{1}{t^2}$ dadurch, dass man auf den Tangenten an ein System von parallelen geodätischen Linien das Stück t in bestimmtem Sinn

aufträgt. Die Fläche besitzt eine Ebene und eine räumliche Rückkehrkante mit 2 Spitzen sowie eine Doppelcurve. Das eine System von Krümmungslinien wird von Ebenen ausgeschnitten, welche durch eine (im Modell vertikal gestellte) Gerade hindurch gehen. Das andere System liegt auf Kugeln, deren Mittelpunkte in dieser Geraden liegen. Vergl. Bianchi, Math. Annalen Bd. 16, sowie Enneper, Göttinger Nachrichten 1868; Th. Kuen, Sitzungsberichte der kgl. bayr. Acad. 1884, Heft II. Modelliert von stud. math. *Mack*. Erläuterung hierzu von Assistenten *Th. Kuen* in München (B). (24×18 cm.) . . . . . Mk. 18.50.

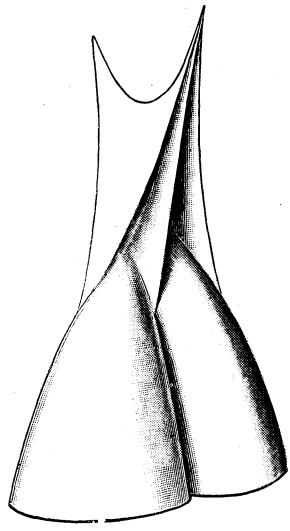
Die Flächen Nr. 229, 231, 232 besitzen das nämliche Krümmungsmass. Um ihre Abwickelbarkeit auf einander und besonders ihre Verschieblichkeit in sich selbst und die merkwürdigen Beziehungen der Nicht-Euklidischen zur Geometrie des Lobatschewsky zu zeigen, hat man auf dieselben 2 Flächenstreifen (Nr. 233) aus dünnem Messingblech aufgepasst. Schneidet man von einem ein dreieckiges Stück ab, dessen Seiten geodätische Linien (z. B. der Fläche Nr. 229) sind, so lehrt bereits der Augenschein, dass die Summe der Winkel in einem solchen Dreieck kleiner als $2R$ ist.

233. (X, 14.) **Zwei Flächenstreifen von constantem negativen Krümmungsmass** aus biegsamem Messingblech, vom Krümmungsmass der Flächen 229, 231, 232. (Siehe die vorstehende Bemerkung.) (B) . je Mk. 4.—.

234. (VIII, 7a.) **Schraubenfläche, auf das Rotationsellipsoid Nr. 235 abwickelbar** (nach E. Bour, Journal de l'Ecole Polyt., Bd. XXII). Von Assistenten Dr. *P. Vogel* (B). (12×26 cm.) . . . . . Mk. 12.—.

235. (VIII, 7c.) **Rotationsellipsoid,** auf die vorige Fläche abwickelbar (B). (3×9 cm.) Mk. 1.75.

236. (VIII, 7b.) **Rotationsellipsoid aus biegsamem Messingblech** zur Demonstration der erwähnten Abwickelung. Die durch 2 gleich grosse Parallelkreise begrenzte Zone obigen Ellipsoids geht durch einen leichten Druck in die vorhin erwähnte Schraubenfläche über (B) . . . . . Mk. 2.50.



237. 238. (XXX, 6, 7.) **Auf das Rotationsparaboloid abwickelbare Flächen 12. Ordnung und 10. Klasse,** auf Veranlassung von Prof. G. Darboux angefertigt von Dr. *E. Estanave* in Marseille. Die erste Fläche ist reell abwickelbar auf das Rotationsparaboloid $x^2 + y^2 = \frac{495}{256} z$. Die zweite entsteht aus der ersten durch die Transformation $x_2 = iy_1$, $y_2 = -ix_1$, $z_2 = z_1$, wobei x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes der ersten bzw. zweiten Fläche bezeichnen. Eine ausführliche Erläuterung wird den Modellen beigegeben. Wegen der Einzelheiten siehe auch: G. Darboux, Bulletin des Sciences mathématiques, 2. série, tome XXIX, Avril 1905 und Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tome CXL, 13. Mars 1905, p. 697. (29×18×9,5 cm. u. 20×10,5×29,5 cm.) Nr. 237 Mk. 19.—, Nr. 238 Mk. 28.—.

In diesen Abschnitt gehört noch die in der folgenden Abteilung aufgezählte windschiefe Schraubenfläche Nr. 245, welche auf das Catenoid abwickelbar ist, und der zugehörige Messingstreifen Nr. 244.

f) Flächen von constanter mittlerer Krümmung, Minimalflächen.

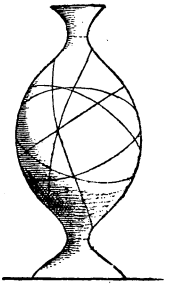
Die Flächen von constanter mittlerer Krümmung sind dadurch definiert, dass die Summe der reciproken Werte ihrer 2 Hauptkrümmungsradien an jeder Stelle denselben Zahlenwert besitzt. Die partielle Differentialgleichung, durch welche sie definiert sind, geht in eine integrierbare totale über, wenn man sich auf Rotationsflächen beschränkt, und zwar erhält man für die Meridiancurve die Gleichung

$$z=\int \frac{r^2 \pm a_1 a_2}{\sqrt{(a_1^2-r^2)\,(r^2-a_2^2)}}\,dr.$$

Nach Delaunay (Comptes rendus XIII, 1841) ergibt sich die Meridiancurve dieser Flächen auch als diejenige Curve, die der Brennpunkt eines Kegelschnittes beim Abrollen auf einer Geraden beschreibt, welche dann Rotationsaxe wird. Den 3 Kegelschnitten Ellipse, Hyperbel, Parabel entsprechend, erhält man 3 verschiedene Typen, die von Plateau in seinem Werke „Statique expérimentale et théorique des liquides etc.“ Onduloid, Nodoid, Catenoid genannt wurden. Nach Laplace werden die Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten, welche der Einwirkung der Schwere entzogen sind, von Flächen constanter mittlerer Krümmung begrenzt. Geometrisch lassen sie sich auch als gewisse Parallelflächen zu Flächen von constantem positiven Krümmungsmass definieren. Einen speciellen Fall davon bilden die Minimalflächen, deren mittlere Krümmung Null ist. Dieselben haben die Eigenschaft, einen kleineren Flächeninhalt zu besitzen als jede andere benachbarte Fläche, die durch eine beliebige auf ihr geführte geschlossene Randcurve hindurchgelegt wird. Sie ergeben sich mechanisch als diejenigen Flächen, welche die zwischen eine gegebene Randcurve sich einspannende Flüssigkeitshaut (z. B. durch Eintauchen eines Drahtes von der Form der Curve in Seifenlösung) annimmt.

Die Minimalflächen werden sowohl durch ihre Krümmungs- wie durch ihre Asymptotencurven in unendlich kleine Quadrate geteilt. (Die Indicatrix ist für diese Flächen eine gleichseitige Hyperbel, deshalb stehen auch die Asymptotencurven aufeinander senkrecht). Zu jeder Minimalfläche gibt es eine zweite, ihre sog. Bonnet'sche Biegungsfläche, welche auf sie derart abwickelbar ist, dass die Krümmungslinien der einen in die Asymptotencurven der andern übergehen. Vergl. Schwarz in Crelle's Journ. Bd. 80.

239—242. (II, 3.) **Drei Typen von Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung** mit geodätischen Linien. Das Verhalten der letzteren ist je nach dem Winkel, unter dem eine den grössten Parallelkreis trifft, ein verschiedenes. Entweder bewegt sie sich zwischen 2 Parallelkreisen (blau) oder sie nähert sich asymptotisch dem Kehlkreis, d. i. Parallelkreis vom kleinsten Radius (grün), oder sie läuft über die ganze Fläche hin. Von stud. math. *A. v. Braunmühl* in München (B). Erläuterung beigegeben.



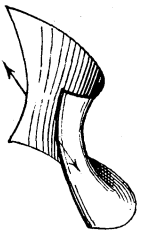
239. (II, 3a.) **Onduloid.** Die Meridiancurve ergibt sich für $a_1=1$ cm., $a_2=5{,}77$ cm. aus der oben angegebenen Gleichung, wenn von den 2 daselbst vorkommenden Vorzeichen das obere (positive) gewählt wird. (12×26 cm.) . . . . . Mk. 10.50.

240. (II, 3b.) **Nodoid.** a_1 und a_2 wie oben, aber in der Gleichung ist das untere (negative) Vorzeichen zu wählen. (11×8 cm.) Mk. 9.50.

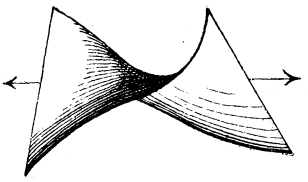
241. (II, 3c.) **Ring des Nodoids,** durch Umdrehung der Schleife der Meridiancurve von b entstanden. (9×3 cm.) Mk. 2.50.

242. (II, 3d.) **Catenoid,** durch Umdrehung der Kettenlinie um ihre Axe entstanden. Ausser den 3 verschiedenen Typen von geodätischen Linien ist hier auch noch eine Asymptotencurve (gelb) aufgezeichnet. Diese Fläche ist eine Minimalfläche, sie besitzt die constante mittlere Krümmung Null. (16×10 cm.) . . . . . Mk. 9.50.

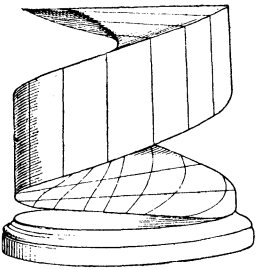
243. (VIII, 6c.) **Catenoid,** grösser, mit aufgezeichneten Krümmungslinien (weiss) und Asymptotencurven (rot). Diese Fläche ist die Bonnet'sche Biegungsfläche zur folgenden windschiefen Schraubenfläche (Nr. 244, 245). Beim Aufbiegen beider auf einander geht der Kehlkreis in die Axe der letzteren über, die Meridiane in die geraden Erzeugenden, Parallelkreise in die Schraubenlinien (B). (20×14 cm.) . . Mk. 12.—.



244. (VIII, 6b.) **Catenoid aus biegsamem Messingblech.** Die Umdrehungsfläche der Kettenlinie wird in die windschiefe Schraubenfläche dadurch übergeführt, dass man an dem Messingblech



die Endpunkte des Kehlkreises fasst und diesen in eine Gerade auszieht, indem man gleichzeitig ein wenig dreht. Der Versuch ist überraschend. In der ersten Gestalt passt das Blech auf das Catenoid Nr. 243, in der zweiten auf die Schraubenfläche Nr. 245. Von *Herting* in München (B). Mk. 2.50.

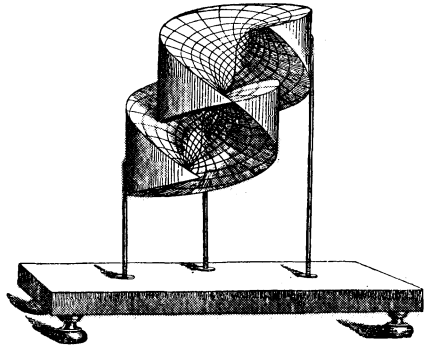


245. (VIII, 6a). **Windschiefe Schraubenfläche,** Minimalfläche, nebst Krümmungslinien und Asymptotencurven; auf das Catenoid Nr. 243 abwickelbar. Von *Herting* in München (B). (23×22 cm.) Mk. 19.50.

246. (VIII, 2.) **Minimalfläche 9. Ord. nach Enneper** (vergl. Göttinger Nachrichten 1871, pag. 27 ff.). Sie besitzt 2 ebene Doppelcurven 3. Ord., in welchen die aufgezeichneten beiden Scharen von Krümmungslinien (ebenfalls ebene Curven 3. Ord.; die Ebenen derselben sind alle einer Geraden parallel) einen Doppelpunkt besitzen. Die Fläche hat ferner 3 dreifache Geraden, nämlich die unendlich ferne Gerade in der Horizontalebene und die in einer solchen Ebene liegenden 2 roten Geraden. Von den 3 durch diese letztere gehenden Mänteln sind aber 2 imaginär. Die Fläche lässt sich dadurch mit sich selbst zur Deckung bringen, dass man die eine Doppelcurve in die andere verlegt. Ihre Bonnet'sche Biegungsfläche ist sie selbst, d. h. die Fläche kann auf sich selbst aufgebogen werden. Dabei gehen die Krümmungslinien (weiss) in die Asymptotencurven (rot) über. Von *Herting* in München (B). Erläuterung beigegeben. (26×34 cm) Mk. 24.—.

247. (XVII, 4) **Catalan'sche Minimalfläche.** Diese Fläche gehört bekanntlich zu den Minimalflächen, welche eine Schar reeller Curven zweiten Grades enthalten, und zwar sind es bei der Catalan'schen Fläche Parabeln. Die Ebenen der Parabeln sind

senkrecht zu einer festen Ebene, welche eine Symmetrieebene der Fläche ist. In dieser liegt eine von einer gewöhnlichen Cycloide gebildete geodätische Linie der Fläche. Die Parabeln und deren orthogonale Trajectorien veranschaulichen die Eigenschaft der Fläche, dass sie durch die beiden Curvenscharen in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann. Modelliert von stud. math. *Laine* in Helsingfors unter Leitung von Prof. Neovius. (Grösse des Gipskörpers ohne Holzplatte 22×22×14 cm.) . . . . M. 45.—.



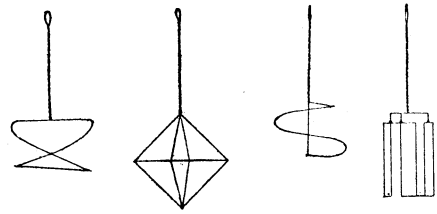
248. (XVII, 1.) **Minimalfläche, welche eine Schar reeller Parabeln enthält, deren Ebenen mit einer festen Ebene des Raumes einen constanten Winkel einschliessen.**

Die Fläche entsteht durch „geometrische Addition" der gewöhnlichen Schraubenfläche und der Catalan'schen Minimalfläche, d. h. in der Weierstrass'schen Darstellung der Coordinaten setzt sich die Funktion $F(s)$ (Monatsberichte der Berliner Acad. 1886, pag. 618) aus den beiden, die jene liefern, zusammen

$$F(s) = \frac{b}{2is^2} + ia\frac{s^2-1}{s^2},$$

wo $i = \sqrt{-1}$; a, b Constante sind. — Ausser den Parabeln sind noch deren Orthogonaltrajectorien angegeben, welche mit jenen die Fläche in unendlich kleine Quadrate teilen, sowie die Scheitelcurve der Parabeln. Jener constante Winkel ist für das Modell 45°.

Modelliert von stud. math. *Tallqvist* in Helsingfors unter Leitung von Prof. Neovius. (Grösse des Gipskörpers ohne Holzplatte 21×25 cm.) . . . . . Mk. 45.—.



249. (X, 1a–k.) **Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen durch Lamellen von Seifenwasser** nebst einer Anweisung zur Herstellung der Seifenlösung nach Angabe von Plateau, Statique des liquides (B). Näheres siehe Teil I, Serie X. Mk. 15.—.

g) Flächen constanter Breite.

250–252. (XL, 1–3.) **Gipsmodelle von Flächen constanter Breite.** Flächen constanter Breite b sind solche convexe, geschlossene Flächen, bei denen je zwei parallele Stützebenen denselben Abstand b besitzen. Sie lassen sich daher zwischen zwei solchen Ebenen noch so mit fünf Freiheitsgraden bewegen, dass sie beide Ebenen dabei beständig berühren.

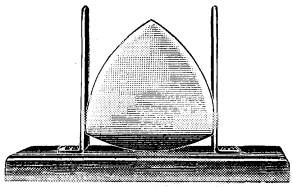
Diese Flächen besitzen jede Normale als Binormale und sind zugleich Flächen constanter Profillänge. Näheres über Flächen constanter Breite mit Angabe weiterer Literatur gibt ein soeben erscheinender Aufsatz unter demselben Titel in der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Unter Mitwirkung von Prof. Fr. Schilling in Danzig herausgegeben von Prof. *Ernst Meissner* in Zürich.

250. (XL, 1.) Dies Modell stellt eine algebraische Rotationsfläche constanter Breite $b = 12$ cm dar. Der Meridian hat die Parametergleichungen

$$x = p(u) \cdot \cos u - p'(u) \cdot \sin u,$$
$$y = p(u) \cdot \sin u + p'(u) \cdot \cos u,$$

wobei $p(u) = \frac{b}{2}\left(1 + \frac{1}{8}\cos(3u)\right)$,

$$p'(u) = \frac{dp(u)}{du} \text{ ist.}$$



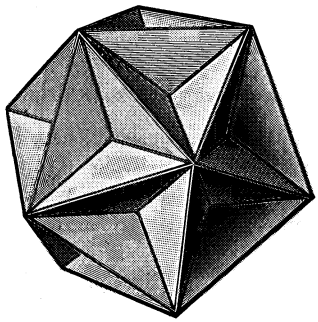
251. (XL, 2.) Dies Modell ist die Rotationsfläche des Reuleaux'schen Kreisbogendreiecks. Bei diesem gleichseitigen Kreisbogendreieck hat jeder Bogen sein Centrum in der gegenüberliegenden Ecke. Eine Symmetrieaxe ist die Rotationsaxe. Die Fläche setzt sich aus einer Kugel- und einer Ringfläche zusammen und besitzt eine Spitze und eine kreisförmige Kante, beide von maximaler Schärfe.

252. (XL, 3.) Dies Modell gibt ein Beispiel einer Fläche constanter Breite, die nicht Rotationsfläche ist. Man lege durch je drei Ecken eines regulären Tetraeders $A\,B\,C\,D$ die Kugel mit der vierten Ecke als Centrum. Durch Abrunden dreier Kanten des tetraederartigen, gemeinsamen Raumes der vier Kugeln ergibt sich die Modellfläche. Abrundende Fläche einer Kante $A\,B$ ist dabei die Ringfläche mit $A\,B$ als Axe, deren Meridiankreis durch $A\,B$ geht und seinen Mittelpunkt auf der gegenüberliegenden Kante $C\,D$ des krummflächigen Tetraeders besitzt. (Grösse jedes Modelles 12×12×12 cm.) Preis der drei Modelle mit dem Messapparat und sechs Cylindern aus Pausleinen Mk. 40.—.

VIII. Darstellende und projective Geometrie.

a) Hilfsmittel für das geometrische Zeichnen, projective Erzeugung der Kegelschnitte, Reliefperspective.

253—256. (XXXVII, 1—4.) Die **vier regelmässigen Sternvielflache** von Prof. *Fr. Schilling* und Dr. *Otto Wiesing* in Danzig.



253. (XXXVII, 1.) Das **sterneckige Zwölfflach** (great dodecahedron [Cayley]) besitzt 12 Fünfecke erster Art und 12 fünfkantige Ecken zweiter Art (Sternecken).

254. (XXXVII, 2.) Das **zwölfeckige Sternzwölfflach** (small stellated dodecahedron [Cayley]) besitzt 12 Fünfecke zweiter Art (Sternfünfecke) und 12 fünfkantige Ecken erster Art.

255. (XXXVII, 3.) Das **sterneckige Zwanzigflach** (great icosahedron [Cayley]) besitzt 20 Dreiecke und 12 fünfkantige Ecken zweiter Art.

256. (XXXVII, 4.) Das **zwanzigeckige Sternzwölfflach** (great stellated dodecahedron [Cayley]) besitzt 12 Fünfecke zweiter Art und 20 dreikantige Ecken. Vgl. wegen der Literatur die folgenden Arbeiten: Chr. Wiener, Über Vielecke und Vielflache, Leipzig 1864; sowie: Lehrbuch der darstellenden Geometrie I, Leipzig 1884, S. 135 ff. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1876, S. 1—92. M. Brückner, Vielecke und Vielflache, Leipzig 1900 (insbesondere S. 176 ff.).

Grösse I: Höhe ca. 20 cm. Ganze Serie Mk. 105.—.

Grösse II: Höhe ca. 25 cm. Ganze Serie Mk. 140.—.

257—266. (XXVI, 1—10.) **Architektonische Polyeder** von Prof. Dr. *Guido Hauck.*

Die Modelle, entstanden durch Zurückführung architektonischer Motive auf ihre polyedrische Grundform, sind von einer gewissen Regelmässigkeit im Aufbau, zeigen aber im Gegensatz zu den elementaren stereometrischen Körpern vielfach einspringende Flächenwinkel. Sie dienen zu Übungen im Aufnehmen von Körpern in Grund- und

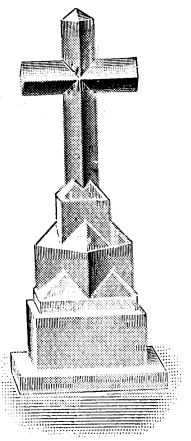


Abbildung von Nr. 258. (XXVI, 2.)

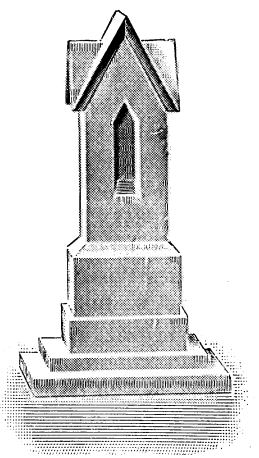


Abbildung von Nr. 260. (XXVI, 4.)

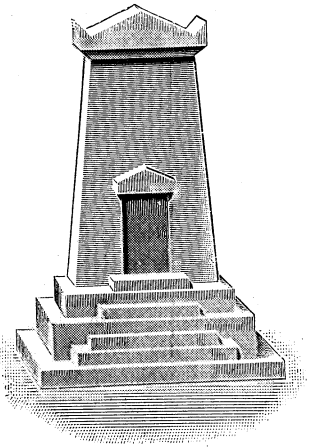


Abbildung von Nr. 261. (XXVI, 5.)

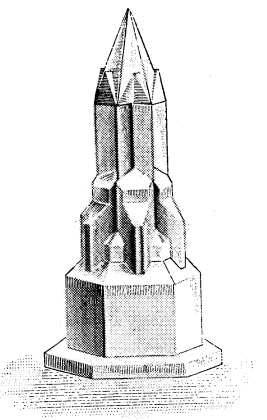


Abbildung von Nr. 266. (XXVI, 10.)

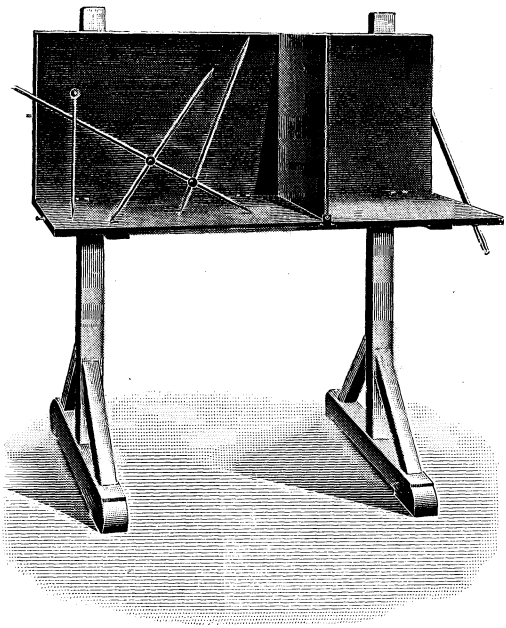
Aufriss und Schattenconstructionen, zur Darstellung in axonometrischen Projectionen, malerischer Perspective u. s. w. Näheres siehe Teil I, S. 63. (Höhe der Modelle 22—26 cm.)

Einzelpreis Mk. 14.—.
Ganze Serie Mk. 130.—.
In billiger Ausgabe Einzelpreis M. 5.—.
Ganze Serie Mk. 45.—.

Zum Schutze dieser Modelle sind noch passende **Glasglocken mit Holzuntersätzen** hergestellt, s. S. 61.

Einzelpreis Mk. 2,75—8.50.

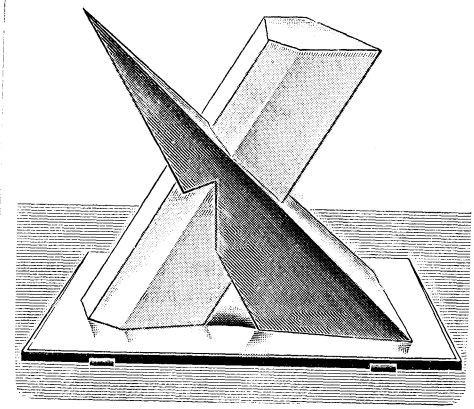
267—275. (XXVI, 11—18.) **Hilfsmittel für den Unterricht in darstellender und projectiver Geometrie** von Prof. Dr. *Fr. Schilling*. Wegen ihrer Einrichtung im Einzelnen und Verwendung beim Unterricht vgl. die Beschreibung der Serie im I. Teil, Seite 64 u. ff.



267. (XXVI, 11a.) **Grosse Projectionstafel.** Sie ist nach Art der Schulwandtafeln hergestellt, besteht aus zwei Teilen, welche der ersten und der zweiten Tafel des Grund- und Aufrissverfahrens entsprechend leicht im rechten Winkel gegeneinander eingestellt werden können. Der Tafel selbst werden noch zwei kleinere Hilfstafeln beigegeben, von denen die eine die Seitenrissebene, die andere eine allgemein gelegene Ebene darstellt. Endlich gehören zu der ganzen Vorrichtung noch acht Stahlstäbe und zehn Korkkugeln zur Darstellung von Punkten und Geraden. (110×90 cm.) Mk. 100.—.

268. (XXVI, 11b.) **Festes Gestell** zum Aufhängen der Tafel . . . . Mk. 22.—.

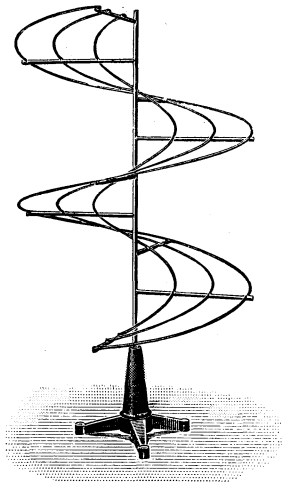
269. (XXVI, 12.) **Kleine Projectionstafel** aus Pappe mit Schiefertafelpapier bezogen. Sie stellt gleichfalls die Grund- und Aufrisstafeln und ihre Umklappung in eine Ebene dar, wobei jedoch die Tafeln über ihre Schnittlinie hinaus sich erstrecken. (52×45 cm.) . . . . . Mk. 5.—.



270. (XXVI, 13.) **Durchdringung eines fünfseitigen Prismas und einer dreiseitigen Pyramide** aus Pappe und Holz. Das Prisma ist leicht abzuheben und zeigt dann besonders deutlich die Schnittlinie beider Körper, die auch auf der Pyramide eingezeichnet ist, und den ihnen gemeinsamen Raumteil. (68×48×50 cm.) . . . . . Mk. 30.—.

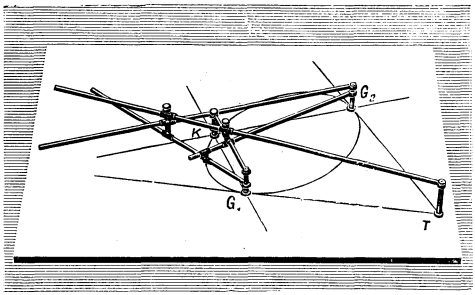
271. (XXVI, 14.) **Gerader Kreiscylinder** mit elliptischem Schnitt, aus Pappe, nebst 10 Bogen Papier, um mit mehreren Perioden die Abwickelung der Schnittcurve, die affine Curve einer einfachen Sinuslinie, darzustellen. Der obere Teil des Cylinders kann überdies gegen den unteren gedreht werden, um die Durchdringung zweier congruenter Cylinder mit sich rechtwinklig schneidenden Axen zu zeigen (Kreuzgewölbe), (42×24 cm.) Mk. 12.—.

272. (XXVI, 15.) **Zwei congruente Ellipsen** mit gemeinsamer kleiner Axe, sich rechtwinklig schneidend, dem vorigen Modell entsprechend, aus Aluminiumdraht. Mk. 12.—.

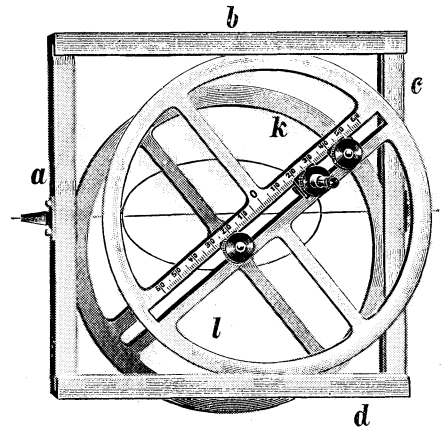


273. (XXVI, 16.) **Drei Schraubenlinien mit derselben Axe und Ganghöhe** und zwar in zwei Windungen. Die rechtsgewundenen Schraubenlinien selbst sind aus Messingdraht, die Axe und die Speichen aus vernickeltem Eisendraht sorgfältig hergestellt. Wird das Modell vor die Wandtafel gehalten, so lassen sich sowohl die senkrecht zur Axe und Tafel ausgeführten Projectionen der verschiedenen Schraubenlinien als affine Curven derselben Sinuslinie, wie ihre schiefen Parallelprojectionen als affine Curven von Cycloiden veranschaulichen. (Höhe 70 cm.) Mk. 70.—.

274. (XXVI, 17.) **Einzelne Schraubenlinie** mit 5 Windungen, aus Aluminiumdraht. (Höhe 50 cm.) a. rechtsgewunden, b. linksgewunden . . . . . je Mk. 7.50.



275. (XXVI, 18.) **Allgemeine projective Erzeugung der Kegelschnitte,** speciell einer Ellipse. Das aus verschiedenen Metallen auf einem Reissbrett construierte Modell lässt unmittelbar den speciellen Fall des Pascalschen Satzes erkennen, bei dem zwei Gegenseiten des Sechsecks in Tangenten ausgeartet sind. (70×52 cm.) Mk. 75.—.

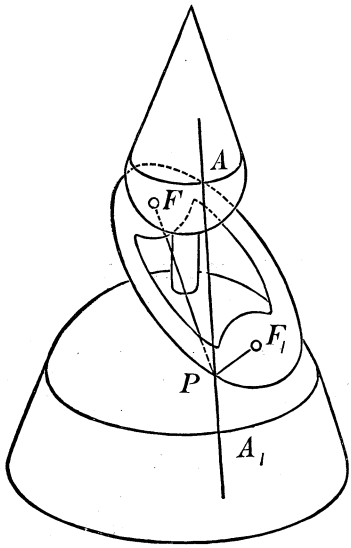


276. (XXXII, 1.) **Ellipsencirkel** von Prof. Dr. *Karl Rohn* in Leipzig.

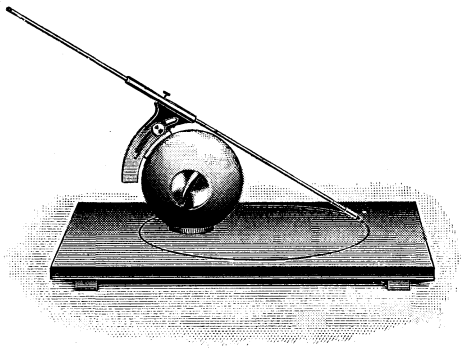
Der Ellipsencirkel beruht auf dem bekannten Satz, dass jeder Punkt P einer Strecke AB eine Ellipse beschreibt, wenn diese Strecke so bewegt wird, dass ihre Endpunkte A und B auf zwei rechtwinkligen Geraden x und y hingleiten. (17×17 cm.) Mk. 120.—.

277. (XXXII, 2.) **Erläuterung des Dandelin'schen Satzes für den Fall der Ellipse** von Prof. Dr. *E. Kötter* in Aachen.

Bekanntlich wird die Ebene eines beliebigen, einem Rotationskegel angehörigen Kegelschnittes in dessen Brennpunkten F und F_1 von zwei Kugeln berührt, die den Kegel längs je eines Kreises berühren. Es ist dann leicht zu erkennen, dass jeder Punkt des Kegelschnittes, z. B. für den Fall der Ellipse, von den beiden Punkten F und F_1 eine constante Summe der Entfernungen besitzt. Diese Verhältnisse werden von diesem



beweglichen Holzmodell anschaulich dargestellt. (18×27 cm.) . . . . Mk. 80.—.



278. (XXXII, 3.) **Erzeugung der Kegelschnitte (Ellipse, Hyperbel und Parabel) nach dem Dandelin'schen Satze** von Prof. Dr. *C. Hildebrandt* in Braunschweig.

Auf einer Grundplatte ist eine massive Kugel befestigt, durch deren Mittelpunkt eine horizontale Axe gelegt ist. Um die letztere lässt sich ein Zapfen drehen, die Axe eines Tangentialkegels darstellend. Mit dieser Axe ist eine Hülse verbunden mit einem Metallstab. Führt man diesen Stab um die Kugel herum, so beschreibt er, stets eine Kugeltangente bildend, den Mantel eines der Kugel umschriebenen Kegels. Sein unteres Ende zeichnet hierbei auf der Grundplatte mit Kreide je nach der Einstellung eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, deren einer Brennpunkt nach dem Dandelin'schen Satze mit dem Berührungspunkt von Kugel und Platte zusammenfällt. (45×60 cm.) Mk. 50.—.

279—282. (XXXVI, 1—4.) **Darstellung affiner Transformationen von Punktsystemen in der Ebene und im Raume,** unter Mitwirkung von Prof. Fr. Schilling in Danzig von Prof. *F. Klein* in Göttingen.

Geometrisch kann man am einfachsten das affin veränderliche, ebene oder räumliche System dargestellt denken durch drei zu einem Dreieck bzw. sechs zu einem Tetraeder vereinigte ähnlich-veränderliche Punktreihen. Man braucht dann für den weiteren Aufbau nur noch beliebig weitere solche Punktreihen gleichsam einzuspannen, von denen eben die einzelne zwei der bereits vorhandenen Punkte verbindet. Zur mechanischen Verwirklichung dieser Gedanken dient die bekannte „Nürnberger Schere".

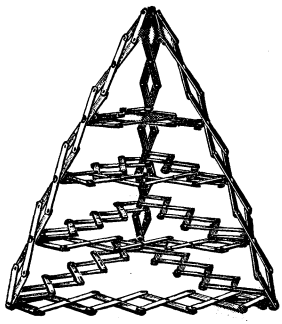
Man bekommt daher in einfachster Weise einen organischen Aufbau der affinen Geometrie, indem man eben die Verbindung zweier Punkte durch eine Gerade sich nicht durch eine am Lineal gezogene Linie oder durch einen gespannten Faden, sondern allemal durch eine Nürnberger Schere ausgeführt denkt.

Des Näheren vgl. den Aufsatz mit gleicher Überschrift in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 58, S. 311 ff., 1910.

279. (XXXVI, 1.) Sieben Nürnberger Scheren und zwar je zwei 8- und 6-gliedrige und je eine 4-, 3- und 2-gliedrige, nebst 12 federnden Stiften zum Zusammenstecken der Scheren zum ebenen affinen System und 12 Unterlagsplättchen . . . . Mk. 36.—.

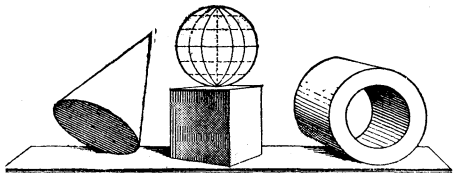
280. (XXXVI, 2.) Ebene Vereinigung Nürnberger Scheren in Gestalt eines Dreiecks mit Parallelen zur einen Seite. Mk. 30.—.

281. (XXXVI, 3.) Räumliche Vereinigung 2-gliedriger Nürnberger Scheren in den Kanten eines Tetraeders . . . Mk. 27.—.



282. (XXXVI, 4.) Räumliche Vereinigung Nürnberger Scheren in Gestalt eines Tetraeders mit Parallelebenen zur einen Fläche. Mk. 65.—.

Preis der ganzen Serie Mk. 158.—.



283. (VIII, 4.) **Reliefperspectivische Darstellung eines Würfels, einer Kugel, eines Kegels und eines Hohlcylinders,** auf einem Untersatz vereinigt.

Der Augenpunkt befindet sich in der Verlängerung der Rotationsaxe des Kugelreliefs, 56 cm. vor der vorderen Bildfläche des Modells, genauer, vor der Collineationsebene, die durch die obere Kante des Gesimses hindurchgeht, welches die Basis des Modells begrenzt. Die Fluchtebene des Bildraumes ist 28 cm. hinter der Collineationsebene gelegen. Die Tiefe des abgebildeten Raumes beträgt etwa 16,5 cm. Um den gewünschten Eindruck zu erhalten, stelle man das Modell in gedämpftem Licht vor einer einfarbigen Wandfläche auf und betrachte es durch einen im Augenpunkt angebrachten kleinen kreisförmigen Ausschnitt. Von stud. *Thoma* in München (B). (20×45×5 cm.) . . . . . Mk. 26.50.

NB. Zur darstellenden Geometrie können natürlich noch eine grosse Zahl der an anderen Stellen aufgeführten Modelle gerechnet werden; wir nennen z. B. die Kugelmodelle No. 38—40, allgemein die Flächen 2. Grades, die Schraubenflächen u. s. w.

b) Projectionen von vier-dimensionalen Körpern.

284—289. (XV, 1—6.) **Drahtmodelle mit Seidenfäden der sechs regelmässigen vier-dimensionalen Körper,** in den dreidimensionalen Raum projiciert, von Dr. *V. Schlegel* in Hagen i. W.

Vergl. Schlegel, Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde, Nova Acta d. Kais. Leop. Carol. Akademie, Bd. 44, Nr. 4. Der Serie ist eine erläuternde Abhandlung von Schlegel beigegeben.

284. (XV, 1.) **Fünfzell,** d. h. regelmässiges vier-dimensionales Gebilde, begrenzt von 5 regelmässigen congruenten Tetraedern. Das Projectionsmodell besteht aus einem regelmässigen Tetraeder, welches symmetrisch in 4 Tetraeder zerlegt ist. Alle Körper sind, wie auch in den übrigen Modellen, für welche alle folgenden Bemerkungen gelten, durch ihre Kanten dargestellt, und zwar teils in Draht, teils in Seide. Ein prinzipieller Unterschied zwischen den Draht- und den Seidenkanten besteht nicht; die abwechselnde Verwendung beider Stoffe ist in erster Linie durch technische Gründe bedingt. Jedoch dient dieselbe auch dazu, eine bessere Übersicht über die Schichtungsverhältnisse der Teilkörper zu geben. Die an dem vier-dimensionalen Körper befindlichen Ecken, Kanten, Flächen und Körper kommen in den Projectionsmodellen genau in derselben Anzahl und Anordnung zur Anschauung, wie sie einer der unsrigen analogen Gesichtswahrnehmung im vierdimensionalen Raume von einem bestimmten Augenpunkte aus erscheinen würden. Die

Modelle enthalten, abgesehen von ihrer Bedeutung für die Geometrie des vier-dimensionalen Raumes, auch die Lösung der rein stereometrischen Aufgabe: ein gegebenes homogenes Polyeder auf alle Arten homogen in gleichartige Polyeder zu zerlegen, und treten dadurch in Beziehung zur Theorie der räumlichen Configurationen. (Kante des äusseren Tetraeders 6 cm.) . . Mk. 1.20.

285. (XV, 2.) **Achtzell,** begrenzt von 8 congruenten Würfeln. Das Modell besteht aus einem in 7 Hexaeder zerlegten Würfel; 6 dieser Hexaeder bilden die äussere Schicht der Teilkörper und gruppieren sich symmetrisch um das siebente (einen Würfel), welches den Kern bildet, und demnach im vier-dimensionalen Raume dem äusseren Würfel gegenüber liegen würde. (Kante des äusseren Würfels 6 cm.) . . . . . Mk. 4.50.

286. (XV, 3.) **Sechzehnzell,** begrenzt von 16 congruenten regelmässigen Tetraedern. Ein regelmässiges Tetraeder ist in 15 Tetraeder zerlegt, von welchen 14 die äussere Schicht bilden und sich symmetrisch um ein inneres, den Kern bildendes regelmässiges Tetraeder gruppieren. (Kante des äusseren Tetraeders 8 cm.) . . . . . Mk. 4.—.

287. (XV, 4.) **Vierundzwanzigzell,** begrenzt von 24 congruenten regelmässigen Oktaedern. Ein regelmässiges Oktaeder ist in 23 Oktaeder zerlegt. Diese gruppieren sich symmetrisch in zwei Schichten um einen Kern (regelmässiges Oktaeder), von denen die äussere 14, die innere 8 Oktaeder enthält. (Kante des äusseren Oktaeders 13 cm.) Mk. 12.—.

288. (XV, 5.) **Sechshundertzell,** begrenzt von 600 congruenten regelmässigen Tetraedern. Ein regelmässiges Tetraeder ist in 599 Tetraeder zerlegt. Diese lagern symmetrisch in 5 aufeinander folgenden Schichten, welche, von aussen nach innen gezählt, 56, 164, 218, 144, 16 Tetraeder enthalten, um ein in der Mitte befindliches Kerntetraeder. (Kante des äusseren Tetraeders 69 cm.) Mk. 160.—.

289. (XV, 6.) **Hundertzwanzigzell,** begrenzt von 120 congruenten regelmässigen Dodekaedern. Ein regelmässiges Dodekaeder ist in 119 Dodekaeder zerlegt, welche in 4 aufeinander folgenden Schichten symmetrisch um ein in der Mitte befindliches Kerndodekaeder gelagert sind. Die 4 Schichten enthalten, von aussen nach innen gezählt, 12, 32, 42, 32 Dodekaeder. (Kante des äusseren Dodekaeders 21,5 cm.) Mk. 200.—.

Über diese Projectionskörper, sowie über ihren Zusammenhang mit den regulären Gebietsteilungen des Raumes und der Theorie der Transformations-Gruppen vergl. noch Hess, Über perspectivische Dreiecke und Tetraeder, Math. Annalen 1886; Schlegel, Über congruente Raumteilungen, Hoppe's Arch. 1891; Schoute, Voordracht over de regelmatige lichamen in ruimte van meer dimensies, Utrecht 1891; Goursat, Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace, Ann. de l'Ecole Normale 1889.

290. (XV, 7.) **Projectionsmodell des vierdimensionalen vierseitigen Prismas** und seiner Zerlegung in vier inhaltsgleiche Fünfzelle. Drahtmodell mit Seidenfäden. Von Dr. *V. Schlegel* in Hagen i. W.

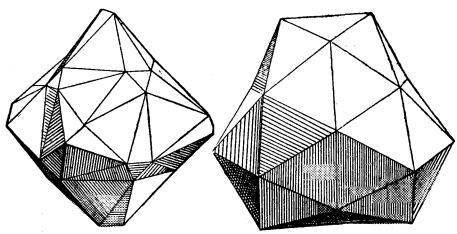
Durch Parallelverschiebung eines Dreiecks in der Ebene, wobei die Ecken parallele Strecken beschreiben, entsteht die ebene Projection eines dreiseitigen Prismas. In analoger Weise erhält man durch Parallelverschiebung eines Tetraeders im Raume die drei-dimensionale Projection des entsprechenden vier-dimensionalen Prismas. Und wie dort durch 3 Diagonalen der das Prisma begrenzenden Parallelogramme die Zerlegung desselben in 3 inhaltsgleiche Tetraeder zur Anschauung gebracht wird, so hier durch 6 Diagonalen der an der Begrenzung des vier-dimensionalen Prismas vorkommenden Parallelogramme die Zerlegung desselben in 4 inhaltsgleiche Fünfzelle, die in der von dem betreffenden Projectionsmodell bekannten Form zur Anschauung kommen. Die Kanten des Projectionsmodells sind durch Draht, die 6 die

Teilung angebenden Diagonale durch Seidenfäden dargestellt. (Seitenkante des Prismas 11 cm.) . . . . . Mk. 4.—.

Vergl. hierzu Schlegel, Sur un théorème de géométrie à 4 dimensions, Comptes rendus de l'Association franç. pour l'avancement des Sciences, (Congrès de Toulouse, 1887.)

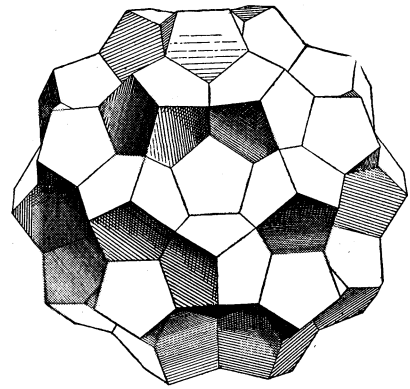
291—295. (XV, 8—12.) **Ansichten, Netze und Modelle aus Carton** zu den Drahtmodellen der zwei letzten **regelmässigen vier-dimensionalen Körper.** (Zu Nr. 5 Sechshundertzell, und Nr. 6 Hundertzwanzigzell.) Nach Zeichnungen von Dr. *V. Schlegel* in Hagen i. W.

Der Einblick in die gesetzmässige Zusammensetzung der beiden aus 599 Tetraedern und 119 Dodekaedern bestehenden Projectionskörper wird bedeutend erleichtert, wenn man sich die verschiedenen Körperschichten, aus denen diese Gebilde bestehen, der Reihe nach von aussen nach innen abgelöst, oder umgekehrt von innen nach aussen angesetzt denkt. Man erhält dann verschiedene Polyeder von bemerkenswerter Gestalt, deren Oberfläche jedesmal die Grenze zweier Körperschichten darstellt. — In den Drahtmodellen kommen von diesen Polyedern nur die Kanten als Drahtkanten zur Anschauung, in den Cartonmodellen



dagegen auch die Flächen. Ausserdem gestatten die letzteren Modelle im Gegensatz zu den ersteren die Betrachtung jedes einzelnen Polyeders, ungestört von den übrigen. Eine vergleichende Betrachtung desselben Polyeders am Carton- und am Drahtmodell wird also auch das Verständnis des letzteren erleichtern.

Die zum Drahtmodell Nr. 5 gehörigen Cartonmodelle zeigen (von innen nach aussen gerechnet) das 24-Flach, 68-Flach (beide von oktaedrischem Typus), ferner das



innere 76-Flach, aus dem vorigen durch Aufsetzen von 16 Tetraedern entstehend, (wodurch der oktaedrische Typus in den tetraedrischen verwandelt wird), das äussere 76-Flach und das 40-Flach. — Die Cartonmodelle zu Nr. 6 zeigen in gleicher Reihenfolge das innere und äussere 132-Flach und das 72-Flach.

Die Netze der Cartonmodelle, von denen jedes aus einer Anzahl getrennter congruenter Stücke besteht, dienen zur Selbstanfertigung der Cartonmodelle und werden auf Wunsch zum Preise von Mk. 1.50 für die 5 Modelle zu Nr. 5 und Mk. 2.50 für die 3 Modelle zu Nr. 6 geliefert.

Den in je einem Hefte vereinigten Ansichten der Cartonmodelle sind auch die Netzstücke in je einem Exemplare beigegeben.

291. (XV, 8.) Zwei Hefte mit lithographischen Ansichten und Netzen. Mk. 4.—.

292. (XV, 9.) 5 Carton-Modelle zu Nr. 5. Mk. 30.—.

293. (XV, 10.) Netze zu Nr. 5. Mk. 1.50.

294. (XV, 11.) Drei Carton-Modelle zu Nr. 6. Mk. 30.—.

295. (XV, 12.) Netze zu Nr. 6. Mk. 2.50.

Preis der ganzen Serie Nr. 284—295 ohne Nr. 293 u. 295 . . . . Mk. 430.—.

296. 297. (XXXII, 4, 5.) **Drei-dimensionale Netze zu vier-dimensionalen Körpern** von Dr. *R. Gaetschenberger* in Freiburg i. B.

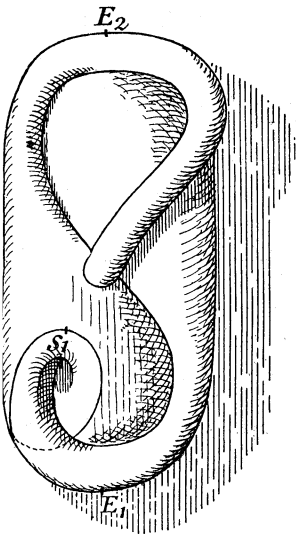
Im Gegensatz zu den vorstehenden Modellen liegt diesen die Annahme zugrunde, dass das vier-dimensionale Gebilde aus drei-dimensionalen Körpern erst durch „Zusammenbiegen" ebenso erzeugt werden soll, wie man drei-dimensionale Körper aus ihren ebenen Netzen herstellen kann. Bei diesen „Netzen" vier-dimensionaler Körper sind die beim Zusammenbiegen zur Deckung zu bringenden Teile mit gleicher Farbe bezeichnet.

296. (XXXII, 4.) **Netz des Fünfzells.** Dies besteht aus 5 Tetraedern, von denen eines unsichtbar ist. (Tetraederkante 6 cm.) Mk. 2.50.

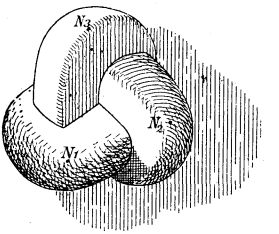
297. (XXXII, 5.) **Netz des Achtzells.** Dies besteht aus 8 Würfeln, von denen einer wieder unsichtbar ist. (Würfelkante 4 cm.) Mk. 6.—.

IX. Analysis situs.

298. 299. (XXX, 1, 2.) **Singularitätenfreie Bilder der projectiven Ebene,** auf Anregung von Prof. Hilbert und unter Mitwirkung von Prof. Schilling ausgeführt von Dr. *Werner Boy* in Göttingen. Diese Flächen entsprechen der unendlichen projectiven Ebene in derselben Weise, wie die Kugel der complexen Zahlenebene.



298. (XXX, 1.) Diese Fläche besitzt ein Minimum, ein Maximum und ein Maximinimum und ist so in bezug auf die Extreme die einfachste Verallgemeinerung der Kugel. (21×36×8 cm.) . . . . . Mk. 27.—.



299. (XXX, 2.) Diese Fläche besitzt eine Symmetrieaxe, so dass die Fläche bei einer Drehung um 120° um dieselbe mit sich selbst zur Deckung kommt. (21×25×17 cm.) Mk. 27.—.

X. Algebra.

300. (XXXIII, 1.) **Fadenmodell der Discriminantenfläche der Gleichung 5. Grades,** nach Prof. O. Bolza von Frl. Dr. *Mary Emily Sinclair* in Oberlin.

Durch eine reelle Tschirnhausensche Transformation kann man im allgemeinen jede Gleichung 5. Grades in die Normalform

$$u^5 + 10xu^3 + 5yu + z = 0$$

bringen. Diese Gleichung stellt ein System von Ebenen dar, für die u die Parameter des Systems und x, y und z die Koordinaten der Punkte einer Ebene sind. Wenn wir u aus der oberen Gleichung und ihrer in bezug auf u abgeleiteten eliminieren, erhalten wir die Gleichung einer abwickelbaren Fläche, welche die Discriminantenfläche der Gleichung darstellt. Den Punkten der 5 Bereiche, in welche die Fläche den Raum teilt, entsprechen Gleichungen bez. mit nur 1 reellen, mit 3 reellen und mit 5 reellen Wurzeln, während die Punkte der Fläche selbst die Gleichungen mit Doppelwurzeln darstellen. Eine ausführliche Abhandlung wird beigegeben. (26×26×21 cm.)

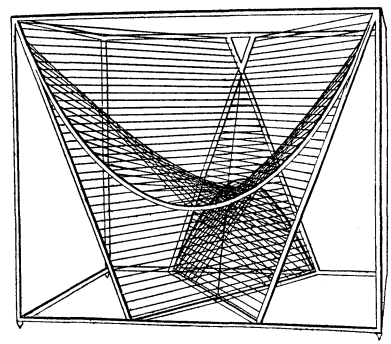
Mk. 48.—.

301. 302. (XXXIII, 2, 3.) **Discriminantenfläche der Gleichungen 4. Grades.** Auf Anregung von Prof. F. Klein ausgeführt von *Roderich Hartenstein* in Göttingen, herausgegeben unter Mitwirkung von Prof. Fr. Schilling in Danzig.

Die allgemeine Gleichung 4. Grades lässt sich durch eine einfache Transformation in die Form überführen:

$$f(t) = t^4 + 6a_2\, t^2 + 4a_3\, t + a_4 = 0.$$

Deutet man a_2, a_3, a_4 als rechtwinklige Raumkoordinaten x, y, z, so stellt diese Gleichung eine Schar von Ebenen mit dem Parameter t dar. Die Enveloppe dieser Ebenenschar ist eine abwickelbare Fläche 5. Ordnung, die „Discriminantenfläche der Gleichung". Die Fläche



zerlegt den ganzen Raum in 3 Gebiete, entsprechend den Zahlen reeller Wurzeln, die bei einer Gleichung 4. Grades auftreten können. Die Punkte der Discriminantenfläche entsprechen Gleichungen mit mehrfachen Wurzeln. Diese Verhältnisse werden durch das erste Modell veranschaulicht.

Das zweite Modell enthält ausser der Discriminantenfläche noch 2 ihrer Schmiegungsebenen, die den Werten $\pm t_0$ entsprechen. Hierdurch wird der ganze Raum in 9 wesentlich verschiedene Gebiete geteilt, die einen Überblick über die Gleichungen 4. Grades im Hinblick auf die Anzahl der reellen Wurzeln zwischen $\pm t_0$ gestatten. Eine ausführliche Abhandlung wird beigefügt.

(31,5×31,5×27 cm. bez. 32,5×31×28 cm.)

Mk. 66.— und Mk. 75.—.

XI. Functionentheorie.

303—305. (XVII, 10, 11, 12.) **Modelle Riemann'scher Flächen** (S.), nämlich

303. (XVII, 10.) **Einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche mit einem Windungspunkt I. Ord.** (zweiblättrig.) Mk. 2.30.

304. (XVII, 11.) **Desgl. mit einem Windungspunkt 2. Ord.** (dreiblättrig). Mk. 2.30.

305. (XVII, 12.) **Dreifach zusammenhängende Fläche mit einer in sich zurückkehrenden Begrenzungslinie** . . Mk. 3.50.
Zusammen Mk. 7.—.

306. (XXXV, 1—27.) **Reducierte Kreisbogenvierecke,** 27 Cartonmodelle, unter Mitwirkung von Prof. Fr. Schilling in Danzig von Dr. *W. Ihlenburg* in Ehrenbreitstein.

Unter einem Kreisbogenviereck verstehen wir eine in einer Ebene ausgebreitete, einfach zusammenhängende, von 4 Kreisbogen begrenzte Fläche. Zunächst werden durch vier Modelle die Erweiterungsprozesse veranschaulicht, welche von den „reducierten" Kreisbogenvierecken zu den „erweiterten" führen, nämlich die polare Einhängung einer Kreisscheibe, die diagonale Einhängung einer Vollebene, die transversale Einhängung eines Kreisringes und die laterale Anhängung einer Kreisscheibe. Die reducierten Vierecke lassen sich nun durch Ungleichheitsbedingungen für die Winkel in 4 Gruppen einteilen, welche dann in ihren verschiedenen Unterfällen durch die übrigen 23 Modelle veranschaulicht werden.

(Vergl. des Näheren: Ihlenburg, Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke, Dissertation, Göttingen 1909.)

In Buchform auf 15 Tafeln mit 4 Seiten Text . . . . . Mk. 12.—.

307—316. (XIV, 1—10.) **16 Modelle zur Darstellung von Functionen einer complexen Veränderlichen.** Ausgeführt unter Leitung von Prof Dr. *Walther Dyck.*

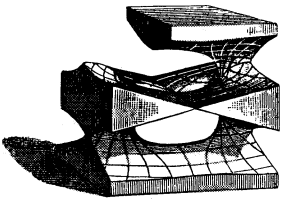
Um den Verlauf einer Function einer complexen Veränderlichen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen und ebenso den Gesamtverlauf gewisser Typen von Functionen einer complexen Veränderlichen durch eine räumliche Darstellung zu veranschaulichen, sind in der bekannten Weise sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil der Functionswerte über der Ebene des complexen Argumentes als Ordinaten aufgetragen. So wird jede Function eines complexen Argumentes durch zwei mit R und I bezeichnete Flächen versinnlicht, deren gleichzeitige Betrachtung ein Bild des Functionsverlaufes liefert. Zur genaueren Characteristik der Wertsysteme sind auf den Flächen Niveaulinien in gleichen Abständen (die Einheit des Massstabes = 3 cm.) und die zugehörigen Orthogonaltrajectorien aufgetragen. Dabei stehen die jedesmal zusammengehörigen Modelle R und I in der Beziehung zu einander, dass die Projection der Niveaulinien und Fallinien der einen Fläche in die Ebene des complexen Argumentes mit der Projection der Fallinien, bezw. Niveaulinien für die andere Fläche in eben diese Ebene identisch ist.

Die Serie enthält folgende Darstellungen:

307—309. (XIV, 1, 2 u. 3) veranschaulichen das Verhalten einer Function in der Nähe von Verzweigungsstellen und zwar:

307. (XIV, 1a u. b.) Für die Function $w^2 = z^2 - 1$. Die beiden über der z-Ebene entstehenden Flächen R und I sind Flächen 4. Ord., die sich zweiblättrig über dieser Ebene ausbreiten. Die $z = +1$ und $z = -1$ entsprechenden Punkte sind die Verzweigungspunkte. Von Lehramts-Candidaten *A. Wildbrett* (D). (12 × 12 × 12 cm.) je Mk. 11.50.

308. (XIV, 2a u. b.) Für die Function $w^2 = z^4 - 1$. Die zugehörigen, zweiblättrig über der z-Ebene ausgebreiteten Flächen sind von der 8. Ord. und bei $z = +1$, $z = -1$, $z = +i$, $z = -i$ verzweigt. Von Lehramts-Candidaten *Wildbrett* (D). (12×12×12 cm.) je Mk. 16.—.



309. (XIV, 3.) Für die Function $w^4 = 1 - z^4$. Hier sind die beiden Flächen R und I identisch. Man hat in unserer Darstellung eine vierblättrig über der z-Ebene sich ausbreitende Fläche (von der 16. Ord.), für welche jedesmal zwei übereinanderliegende Punkte als reeller, bezw. imaginärer Teil der Function w einander zugeordnet sind. Die Punkte $z = \pm 1$ sind Verzweigungspunkte, in denen alle vier Blätter der Fläche zusammenhängen, bei $z = \infty$ sind die Blätter paarweise verzweigt. Von Lehramts-Candidaten *Wildbrett* (D). (12×12×12 cm.) Mk. 18.50.

310. 311. (XIV, 4 u. 5.) sollen das Zusammenrücken zweier logarithmischer Unendlichkeitspunkte zu einem einfachen algebraischen zur Anschauung bringen.

310. (XIV, 4.) $w = \frac{1}{z}$. Von Lehramts-Candidaten *Wildbrett* (D). (12×12×12 cm.) Mk. 12.50.

311. (XIV, 5 a u. b.) $w = \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{z+\varepsilon}{z-\varepsilon}$. Von Assistenten *Burkhardt* und stud. math. *Kleiber* (D). (12×12×12 cm.) . . je Mk. 12.50.

Die Periode des Logarithmus $= i\frac{\pi}{\varepsilon}$ kommt selbstverständlich nur auf der dem imaginären Teile von w entsprechenden Fläche zur Geltung. Sie ist im Modell $= 4i$ angenommen. Für $\lim \varepsilon = o$ findet der Übergang der Flächen 5. in 4. statt, wobei die bei 5. in $z = \pm\varepsilon$ gelegenen „Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung" zusammenrücken, während gleichzeitig die Periode $i\frac{\pi}{\varepsilon}$ unendlich gross wird.

312. (XIV, 6.) $6w = e^{\frac{1}{6z}}$ versinnlicht den einfachsten wesentlich singulären Punkt, und zwar ist der reelle Teil der Funktion durch:

$$u = \frac{1}{6} e^{x'} \cos y'$$

(wo $x' = \frac{x}{6(x^2+y^2)}$, $y' = \frac{-y}{6(x^2+y^2)}$, $z = x + iy$ gesetzt ist)

dargestellt, während der imaginäre Teil

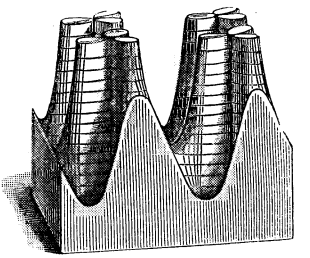
$$v = \frac{1}{6} e^{x'} \sin y'$$

durch eine Transformation der (x, y) Ebene durch reciproke Radien aus ersterem herzuleiten ist. Von stud. math. *Kleiber* (D). (17×18×15 cm.) . . . . . Mk. 21.—.

313—316. (XIV, 7—10.) Die Modelle dienen zur Veranschaulichung des Verlaufes der **elliptischen Functionen** $p(u)$ und $p'(u)$ **in der Weierstrass'schen Normalform.** Es wurden dabei die beiden besonderen Fälle für die Darstellung gewählt, für welche in der cubischen Gleichung

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

einmal $g_3 = 0$, dann $g_2 = 0$ ist; sie sind zugleich Repräsentanten der beiden Functionsklassen, für welche die Discriminante G der obigen Gleichung positiv, bezw. negativ ist.



313. 314. (XIV, 7 a, b. u. 8.) Hier ist $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ gewählt. Dann ergeben sich für die Perioden ω_1 und ω_3 der elliptischen Functionen die Werte

$$\omega_1 = 1{,}311, \quad \omega_3 = 1{,}311 \,.\, i = \omega_1 \,.\, i.$$

Die Symmetrie der Flächen innerhalb des Periodenquadrates (es sind jedesmal vier

solcher modelliert) ist ausser durch die Relationen

$$p(-u) = p(u),\ p'(-u) = -p'(u)$$

durch die hier speciell geltenden Beziehungen

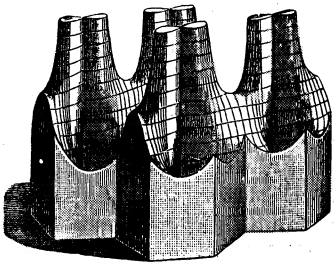
$$p(iu) = -p(u)$$

und

$$p'(iu) = ip'(u)$$

bezeichnet. Die letztere Formel zeigt zugleich, dass für $p'(u)$ in diesem Falle das den imaginären Teil darstellende Modell der Form nach identisch ist mit dem für den reellen Teil und nur seiner Lage nach durch einen Winkel von 90° gedreht erscheint. Die Modelle kennzeichnen ebenso wie die folgenden Nr. 9 und 10 in charakteristischer Weise das Verhalten einer Function in der Umgebung eines zweifachen [für $\mathfrak{p}(u)$] bezw. dreifachen [für $\mathfrak{p}'(u)$] Unendlichkeitspunktes. Neben diesen treten in den Modellen für $\mathfrak{p}(u)$ noch gewisse „Sattelpunkte" — den Werten, für welche $p'(u) = 0$ wird, entsprechend — besonders hervor; und ebenso sind in den Modellen für $p'(u)$ in den Punkten, für welche $p''(u) = 0$ wird, Sattelpunkte vorhanden. Von Assistenten *Burkhardt* und Lehramts-Candidaten *Wildbrett* (D). (16×16×16 cm.)

Nr. 7a u. 7b je Mk. 38.—, Nr. 8 Mk. 44.—.



315. 316. (XIV, 9a, b. u. 10a, b.) Hier sind die Constanten $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ zu Grunde gelegt, für welche die Perioden ω_2 und ω_3 die Werte

$$\omega_2 = 1{,}2143,\ \omega_3 = 0{,}6072 + 1{,}0516\,i = e^{i\frac{\pi}{3}}\omega_2$$

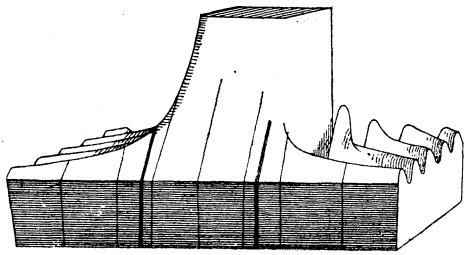
erhalten. Weiter hat man für die Bezeichnung der in den Flächen ersichtlichen Symmetrien der Relationen:

$$p(\varepsilon u) = \varepsilon^4 p(u)$$
$$p'(\varepsilon u) = \varepsilon^3 p'(u),$$

wo ε eine sechste Einheitswurzel bezeichnet. Von Assistenten *Burkhardt* und Lehramts-Candidaten *Wildbrett* (D). (15×22×16 cm.)

Nr. 9a. u. 9b. je Mk. 41.—.
Nr. 10a. u. 10b. je Mk. 48.—.

Den Modellen ist ein erläuternder Text beigefügt und 5 Figurentafeln, in welchen die auf den Flächen verzeichneten Niveaulinien und Fallinien in ihrer Projection auf die Ebene des complexen Argumentes dargestellt sind.



317. (V, 1.) **Darstellung der elliptischen Function $\varphi = am(u, k)$ durch eine Fläche.** φ wurde vertikal, k und u horizontal aufgetragen (Massstab für k-Axe wurde $\frac{3}{2}$ mal so gross als der für die 2 andern Grössen genommen). Für $k^2 < 1$ genügen zur Construction des Modelles die Legendre'schen Tabellen, und in diesem Intervall erstreckt sich die Fläche auch in vertikaler Richtung ins Unendliche. Zur Construction des Modells für die Werte $k^2 > 1$ muss man das elliptische Integral

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

in ein anderes solches Integral mit einem Modul $\lambda^2 < 1$ transformieren, am besten durch die Annahme $\lambda^2 = \frac{1}{k^2}$. Es ergibt sich dann, dass im Intervall $k^2 > 1$ das Modell in vertikaler Richtung sich nicht ins Unendliche erstreckt, sondern eine endliche Höhe besitzt, die um so kleiner wird, je grösser k^2 ist. Modelliert und mit einer

Erläuterung versehen von *Th. Kuen* und *Chr. Wolff* (B). (19×25×35 cm.) Mk. 21.—.

318—320. (XVII, 5.) **Orthogonalsysteme auf der Kugel,** ausgeführt von Assistenten *J. Kleiber* (D). (Durchmesser der Kugel 15 cm.) Die Modelle geben durch eingeritzte schwarzgefärbte Linien dargestellte quadratische Einteilungen auf der Kugel.

a. u. b. bei zwei aufeinander senkrechten Kreissystemen mit zwei getrennten, bezw. zusammenfallenden Polen.
Zusammen Mk. 30.—.

c. bei zwei Scharen von aufeinander senkrechten Loxodromen . . . Mk. 10.—.

Vgl. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen, Bd. I (Leipzig 1890) Seite 165 ff.

321—323. (XVII, 6.) **Die den regulären Polyedern entsprechenden regulären Gebietseinteilungen auf der Kugel** (D). (Durchmesser 9 cm.) Die Modelle geben durch eingeritzte schwarzgefärbte Linien und durch wechselseitige Färbung der Dreiecke

a. den Tetraedertypus (Einteilung in 24 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$); Mk. 6.50.

b. den Octaedertypus (Einteilung in 48 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$); Mk. 8.—.

c. den Icosaedertypus (Einteilung in 120 Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$); Mk. 9.20.

Bezüglich der gruppentheoretischen und functionentheoretischen Bedeutung dieser drei Modelle sei auf das Werk von F. Klein, Vorlesungen über das Icosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom 5. Grade (Leipzig 1884) verwiesen, woselbst auch die weitere Literatur genannt ist.

XII. Mechanik und Kinematik.

324. (V, 6.) **Die Kettenlinie auf der Kugel.** (Vergl. die Abhandlung von Clebsch in Crelle's Journal, Bd. 57, pag. 104 ff.). Die beiden auf der Kugel vereinigten Typen entsprechen dem Fall, wo das elliptische Integral sich auf ein Kreisintegral reduciert; in den Bezeichnungen der genannten Abhandlung

$$\varrho \sin \varepsilon = 1, \text{ a) } \varrho = \frac{3}{4}, \text{ b) } \varrho = \frac{5}{4}.$$

Durch eine Schnur von Glasperlen lassen sich die Curven leicht experimentell prüfen. Berechnet von Assistenten *Fischer* in München (B). (Grösse 9 cm.) . . . . Mk. 9.—.

325. (II, 6.) **Bahncurve eines schweren Punktes auf der Kugel (also die des sphärischen Pendels).** Es ist der Fall dargestellt, wo der oberste (Ausgangs-) Punkt der Bahn sich in der Höhe des Mittelpunktes der Kugel befindet; die Anfangsgeschwindigkeit ist so gross gewählt, dass die Bahncurve sich nach 3 Perioden schliesst. Auch ist der geometrische Ort der untersten Punkte der verschiedenen Ortslinien angegeben, welche verschieden grossen Anfangsgeschwindigkeiten im Anfangspunkt entsprechen. Die Berechnung der Bahn u. s. w. ist von stud. math. *Schleiermacher* ausgeführt (B). (18×14 cm.) . . . . Mk. 13.—.

326—328. (XXIX, 1—3.) **Drei Modelle zur Kreiseltheorie,** aus Metall gearbeitet. Von Dr. *Hermann Grassmann* in Halle a. S.

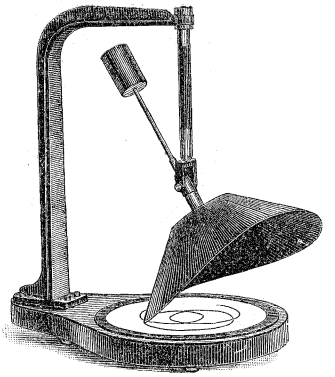
Eine jede Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt lässt sich nach Poinsot auffassen als ein Fortrollen des mit dem

Körper fest verbundenen Polhodiekegels auf dem im Raume festliegenden Herpolhodiekegel. Beide Kegel haben ihren Scheitel im Drehpunkte des Körpers, und ihre Berührungslinie bildet für jeden Augenblick die instantane Drehaxe des Körpers. Trägt man noch vom Drehpunkte aus auf jeder Erzeugenden der beiden Kegel eine Strecke ab, welche durch Länge und Sinn die momentane Winkelgeschwindigkeit veranschaulicht, so erhält man als geometrischen Ort der Endpunkte auf dem Polhodiekegel die „Polhodiecurve", auf dem Herpolhodiekegel die „Herpolhodiecurve". Beide Curven wickeln sich dann ebenfalls bei der Bewegung des starren Körpers aufeinander ab. Regelt man dabei zugleich diese Abwickelung in der Weise, dass ihre Winkelgeschwindigkeit in jedem Augenblick der Länge der auf der Drehaxe abgetragenen Strecke entspricht, so wird die Rotationsbewegung des Körpers vollkommen getreu nachgeahmt.

Bei dem kraftfreien starren Körper ist der Polhodiekegel ein Kegel zweiter Ordnung, der die Hauptträgheitsaxen des Körpers zu Hauptaxen hat, und die Polhodiecurve ein Zweig einer Raumcurve vierter Ordnung, welche aus dem Polhodiekegel durch ein mit ihm coaxiales Ellipsoid ausgeschnitten wird. Die Herpolhodiekurve dagegen ist eine im Raume festliegende ebene Curve und wird erzeugt, wenn man den Polhodiekegel längs der Polhodiecurve abschneidet, seinen Scheitel im Raume festhält und dann den Kegel mit seiner Randcurve unter Ausschluss des Gleitens auf der Herpolhodieebene abrollen lässt. Dabei ergeben sich drei verschiedene Bewegungsformen:

326. (XXIX, 1.) Wenn nämlich der Polhodiekegel die Axe des kleinsten Trägheitsmomentes umschliesst, erfolgt sein Abrollen auf dem Herpolhodiekegel epicycloidisch. (Grösse 20×20×21 cm.) . . M. 100.—.

327. (XXIX, 2.) Wenn der Polhodiekegel die Axe des grössten Trägheitsmomentes



umschliesst, so ist sein Abrollen pericycloidisch. (Grösse 20×31×34 cm.) Mk. 100.—.

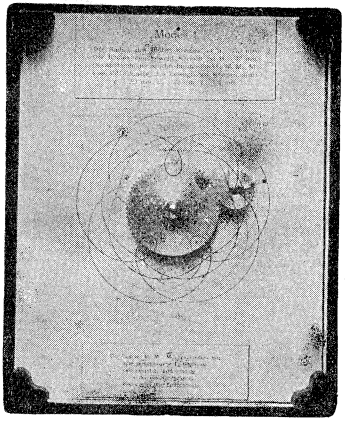
328. (XXIX, 3.) Der dritte Fall ist der Übergangsfall, in welchem der Polhodiekegel in ein (reelles) Ebenenpaar ausgeartet ist. (Grösse 20×31×34 cm.) Mk. 75.—.

Ganze Serie Mk. 265.—.

Den Modellen ist die Abhandlung beigegeben: *H. Grassmann,* Die Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 48. 1903.

329—332. (XXIV, 1—4.) **Kinematische Erzeugung der allgemeinen cyclischen Curven,** aus Metall und Glas gearbeitet, von Prof. *Fr. Schilling* in Danzig. Den Modellen liegt die Definition zu Grunde: Eine Allgemeine cyclische Curve wird von einem Punkte *M* eines Kreises beschrieben, wenn dieser auf einem festen Kreise abrollt. Jede solche cyclische Kurve kann indes in dieser Weise durch zwei verschiedene Kreispaare erzeugt werden, die sich dadurch unterscheiden, dass im einen Falle der als Scheibe gedachte bewegliche Kreis das Centrum des festen nicht bedeckt, im anderen Falle bedeckt. Auf die innige Beziehung der durch diese wie die folgenden Modelle veranschaulichten Verhältnisse zur Theorie der Lie'schen Berührungstransformationen sei hier auch hingewiesen. (Vergl. deswegen die Abhandlung von *Fr. Schilling:*

Die Bewegung in der Ebene als Berührungstransformation. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 54. 1906.) (22×27 cm.)



329. (XXIV, 1.) zeigt uns die drei Arten der **Epitrochoiden,** verschlungene, gestreckte und gespitzte Epitrochoide, erzeugt als solche mit freiem Centrum. . . . . Mk. 56.—.

330. (XXIV, 2.) gibt dieselbe verschlungene **Epitrochoide** wie beim vorigen Modell, jedoch erzeugt als solche mit bedecktem Centrum; daneben ist auch die gespitzte Epitrochoide hinzugefügt, die sich als völlig verschieden von der des ersten Modells zeigt. Mk. 67.—.

331. (XXIV, 3.) zeigt die drei Arten der **Hypotrochoiden,** die verschlungene, gestreckte und gespitzte Hypotrochoide, erzeugt als solche mit freiem Centrum. . Mk. 59.—.

332. (XXIV, 4.) stellt dieselbe gestreckte **Hypotrochoide** dar, jetzt erzeugt als solche mit bedecktem Centrum; daneben wird noch von einem Punkte des beweglichen Systems eine Epitrochoide im festen System beschrieben (Umkehrung der Bewegung). . Mk. 64.—.

333—337. (XXIV, 5—7 und XXXI, 1, 2.) **Kinematische Erzeugung specieller cyclischer Curven,** aus Metall und Glas gearbeitet, von Prof. *Fr. Schilling* in Danzig. (22×27 cm.)

333. (XXIV, 5.) Erzeugung von **Ellipsen und Strecken** durch Abrollung eines Kreises in einem solchen von doppeltem Radius. M. 59.—.

334. 335. (XXIV, 6 u. 7.) veranschaulichen die Erzeugung der verschlungenen, gespitzten und gestreckten **Kreisevolventen,** bez. **Cycloiden** durch Abrollung einer Geraden auf einem Kreise, bez. eines Kreises auf einer Geraden. . . . Mk. 66.— u. Mk. 58.—.

336. 337. (XXXI, 1, 2.) **Kinematische Erzeugung der Pascalschen Curven,** aus Metall und Glas gearbeitet, von Prof. *Fr. Schilling* in Danzig.

Diese Modelle veranschaulichen die verschiedenen Erzeugungsarten der verschlungenen, gespitzten und gestreckten Pascalschen Curven, beispielsweise die durch folgenden Satz gegebene: Bewegt sich ein System so, dass die Schenkel eines Winkels in ihm stets durch feste Punkte hindurchgehen, so beschreibt ein beliebiger Punkt des Systems eine Pascalsche Curve.

336. (XXXI, 1.) **Die Pascalschen Curven als Epitrochoiden mit bedecktem Centrum.** Mk. 65.—.

337. (XXXI, 2.) **Die Pascalschen Curven als Epitrochoiden mit freiem Centrum.** Mk. 53.—.

338—346. (XXXI, 3—11.) **Kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie,** aus Metall und Glas gearbeitet, von Prof. *Fr. Schilling* in Danzig. (22×27 cm.)

Diese Modelle sollen die Verzahnungstheorie veranschaulichen, die theoretischen Grundlagen nicht minder wie die praktischen Konstruktionsmethoden.

Den Modellen ist eine ausführliche Abhandlung beigegeben als Sonderabdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 51. 1904.

338—340. (XXXI, 3, 4, 5.) Die zusammengehörenden Modelle 3—5 behandeln die **Methode der Hülfspolbahnen** und die sich anschliessende **Cycloidenverzahnung.** Zwei Punkte des Hülfspolkreises beim Modell 3 z. B. beschreiben bei gleichzeitiger Abrollung der Polkreise und des Hülfspolkreises aufeinander

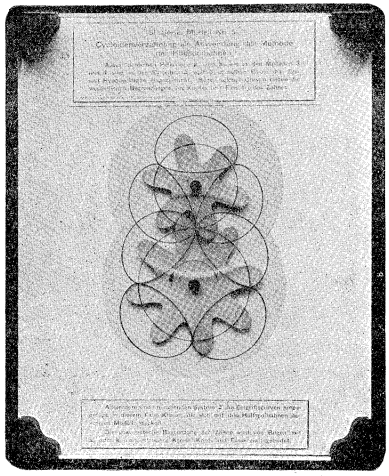


Abbildung von Nr. 340. (XXXI, 5.)

zwei zusammengehörende Profilcurvenpaare, bestimmte Epi- oder Hypotrochoiden.

Mk. 74.—, 74.— und 57.—.

341. (XXXI, 6.) Beispiel einer **Profilcurve und der vollständigen Enveloppe** ihrer Lagen im anderen System.

Dies Modell zeigt in dem einen System eine dreispitzige Hypocycloide, im andern die vollständige Enveloppe aller ihrer Lagen, die aus zwei vierspitzigen und zwei zweispitzigen Epicycloiden besteht. Mk. 61.—.

342. 343. (XXXI, 7, 8.) Die Modelle 7 u. 8 erläutern die **Methode der Äquidistanten** und die darauf sich aufbauende **Triebstockverzahnung.** Im Modell 7 z. B. ist die „Äquidistante" eines Peripheriepunktes des einen Polkreises und die Äquidistante der Bahncurve dieses Peripheriepunktes im andern System nebst allen zur vollständigen Einsicht in diese Verhältnisse notwendigen weiteren Einzelheiten zur Darstellung gebracht . . . . . Mk. 68 — und 74.—.

344—346. (XXXI, 9—11.) Die Modelle 9 bis 11 sind der **Methode der secundären Polbahnen** und deren Anwendung, der **Evolventenverzahnung,** gewidmet. Das Modell 11 insbesondere zeigt eine logarithmische Spirale,

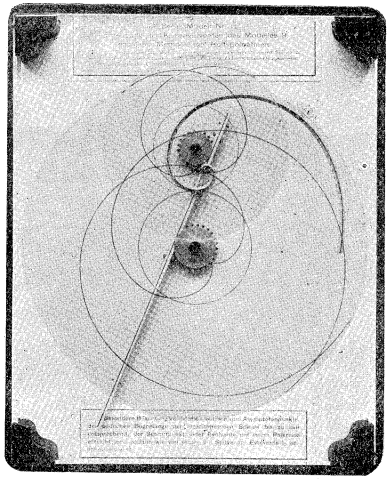


Abbildung von Nr. 346. (XXXI, 11.)

welche gleichzeitig auf den beiden Polkreisen ohne Gleitung abrollt und mit ihrem Asymptotenpunkte die Evolventen in den beiden Systemen erzeugt. Mk. 57.—, 57.— u. 82.—.

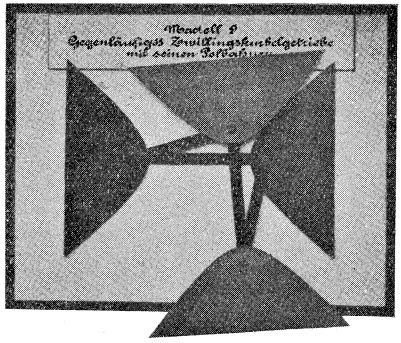
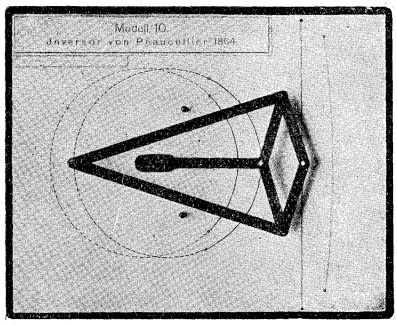


Abbildung von Nr. 348. (XXIV, 9.)

347. 348. (XXIV, 8 u. 9.) **Gleichläufiges und gegenläufiges Zwillingskurbelgetriebe,** aus Metall gearbeitet, von Prof. *Fr. Schilling* in Danzig. Sie entstehen aus einem ein Antiparallelogramm bildenden Gelenkviereck, wenn eines der beiden kleineren oder grösseren Glieder als „Steg" festgehalten wird; denn die beiden dem festen benachbarten Glieder, die „Kurbeln", vermögen

sich im ersten Falle in gleichem, im zweiten im entgegengesetzten Sinne zu drehen. Die bei der Bewegung auf einander abrollenden Polbahnen sind zwei congruente Ellipsen oder Hyperbeln . . Mk. 20.— und 24.—.

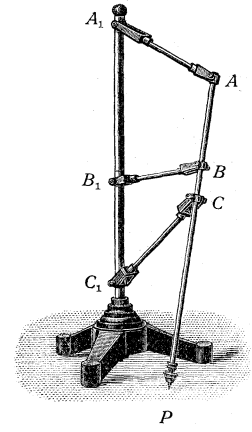
349—351. (XXIV, 10—12.) **Genaue Geradführungen,** aus Metall gearbeitet, von Prof. *Fr. Schilling* in Danzig.



349. (XXIV, 10.) **Inversor von Peaucellier** (erfunden 1864). Er besteht aus einem Gelenkrhombus A, B, C, D und zwei (an den Gegenecken C und D) angreifenden gleichen, mit dem anderen Endpunkte wieder gelenkig mit einander verbundenen Gliedern $PC = PD$. Wird das Gelenksystem bei festgehaltenem Punkte P deformiert, so sind die Punkte A und B einander entsprechende Punkte derjenigen Transformation durch reciproke Radien, deren Centrum P und deren Potenz $PC^2 - AC^2$ ist. Je nach der Einstellung des Modells wird der Punkt A auf einem durch den festen Punkt P gehenden oder auf einem anderen Kreise geführt; dementsprechend beschreibt der Punkt B eine Strecke oder einen Kreisbogen mit sehr grossem Radius. Die analogen Bemerkungen gelten auch für die beiden folgenden Modelle. Mk. 22.—.

350. (XXIV, 11.) **Inversor von Hart** (erfunden 1874). Er besteht aus einem Antiparallelogramm, dessen Seiten von einer Parallelen zu den Diagonalen in den Punkten Q, R, S, T geschnitten werden. Drei dieser Punkte haben dann Beziehung zu einander wie soeben die Punkte P, A, B. Mk. 22.—.

351. (XXIV, 12.) **Inversor von Sylvester-Kempe** (1875), eine Verallgemeinerung des vorigen. Auf jeder Seite des Antiparallelogramms haben wir in richtiger Weise ähnliche Dreiecke aufzusetzen, deren freie Ecken wieder mit Q, R, S, T bezeichnet seien. In der Grenze nehmen sie eben die Lage wie beim Modell 11 an; demgemäss stehen sie wieder zu einer Transformation durch reciproke Radien in nächster Beziehung. Hiermit im Zusammenhange steht der Satz, dass bei jeder Deformation des Gelenksystems die 4 Punkte Q, R, S, T stets ein Parallelogramm mit constanten Winkeln und constantem Inhalt bilden . . . . Mk. 28.—.



352. (XXXII, 6.) **Planigraph** von Prof. *G. Koenigs* in Paris.

Wenn 3 Punkte A, B, C einer Geraden von drei zugehörigen Punkten einer anderen Geraden dieselben Abstände behalten, so hat jeder andere Punkt M der Geraden AB auch eine bestimmte gleichbleibende Entfernung von dem zugehörigen Punkte M_1 der Geraden A_1B_1. Es gibt nun einen Punkt P auf der Geraden AB, dessen zugehöriger Punkt P_1 auf der Geraden A_1B_1 unendlich weit entfernt ist. Wenn man nun die Gerade A_1B_1

festlegt, so beschreiben alle Punkte M der Geraden AB Kugeln oder Kugelzonen, deren Mittelpunkte M_1 auf der Geraden A_1B_1 liegen. Im besonderen beschreibt der Punkt P eine Ebene, die senkrecht zu A_1B_1 liegt. Auf diesem Lehrsatz des Professors Darboux in Paris beruht der vorliegende Planigraph.

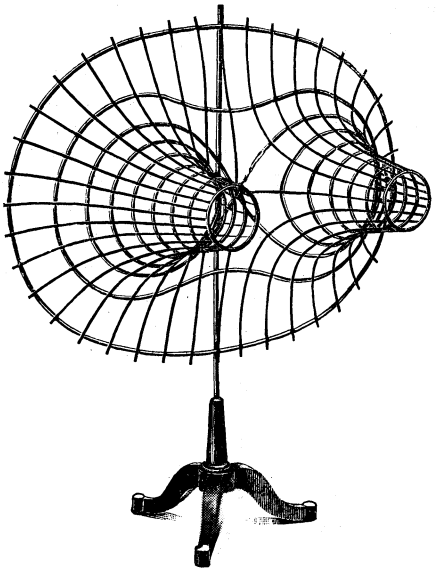
Vgl. des Näheren: Koenigs, Leçons de Cinematique, pag. 295. Paris 1897.

(Höhe 40 cm.) . . . . . Mk. 90.—.

XIII. Mathematische Physik.

(Elektricität, Optik, Elasticität, Wärmelehre.)

353—355. (XXVII, 1—3.) **Drei räumliche Drahtmodelle elektrischer Aequipotential- und Kraftlinien.** Von Prof. *O. Wiener* in Leipzig. Die Modelle stellen die Verteilung des Potentials in einer Ebene dar, in welcher 1) ein elektrischer Massenpunkt, 2) zwei gleichnamige und gleichwertige, 3) zwei ungleichnamige und gleichwertige elektrische Massenpunkte gegeben sind. Trägt man in jedem Punkte senkrecht zur Ebene das Potential



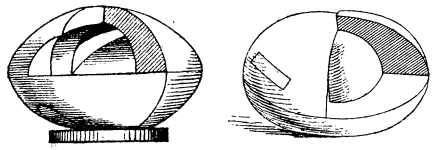
auf, so erhält man eine Fläche, die als topographische Fläche aufgefasst mit ihren Niveau- und Fallinien, beziehungsweise die Aequipotential- und Kraftlinien darstellt; diese Linien sind bei den Modellen beziehungsweise durch weisse und rote Drähte wiedergegeben. Der Zusammenhang der beiden Arten von Linien kann auch experimental veranschaulicht werden, indem man mit einer in grösserer Entfernung aufgestellten, der Linsen entblössten Bogenlampe die mit ihren Niveauflächen aufrecht gestellten Drahtmodelle beleuchtet und ihren Schatten auf einen dahintergestellten, zu den Niveauflächen parallelen Schirm auffängt. Da, wo die topographische Fläche am steilsten, ein fallender Körper also die grösste Beschleunigung erfahren würde, liegen die Projectionen der Niveaulinien am dichtesten gedrängt, als elektrische Aequipotentiallinien aufgefasst, zeigen sie durch ihr enges Aneinanderliegen die Grösse der elektrischen Kraft an. Diese kann ausserdem noch durch die Dichtigkeit der Kraftlinien erkannt werden, die in unmittelbarer Nähe der gedachten elektrischen Massenpunkte unter gleichen Winkeln auslaufend angenommen wurden. Legt man die Modelle um, so dass die Lichtstrahlen parallel den Niveauflächen auffallen, so projicieren sich diese als gerade gleichweit abstehende Linien.

(Höhe 85 cm.) . . . . Nr. 1 Mk. 40.—.
Nr. 2 u. 3 je Mk. 80.—.

356. (VI, 3.) **Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle mit negativer Doppelbrechung.** Ein Ausschnitt des Sphäroids zeigt die Kugel, welche mit jenem zusammen die Wellenfläche bildet. Das Axenverhältnis 8,8 : 7,8 ist ungefähr das des Kalkspathes (B).

(8×9 cm.) . . . . . Mk. 4.60.

357. (X, 7.) **Dasselbe für optisch einaxige Krystalle mit positiver Doppelbrechung.** Ein Ausschnitt der Kugel zeigt das verlängerte Rotationsellipsoid. Das Axenverhältnis entspricht ungefähr dem des Zinnobers (B). (9×9 cm.) . . . . . Mk. 4.75.



358. (VI, 1.) **Fresnel'sche Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle,** längs eines Hauptschnittes zerlegbar, so dass der innere Mantel in den Hohlraum des äussern eingefügt werden kann. Sie ist eine Fläche 4. Ord. und Klasse (eine Kummer'sche Fläche, vergl. Abt. III, b), besitzt 4 reelle conische Knotenpunkte und ebensoviele längs Kreisen berührende Doppeltangentialebenen (die 12 andern sind imaginär). Man erhält diese Fläche aus dem folgenden Ellipsoid dadurch, dass man auf den im Mittelpunkt errichteten Normalen zu Centralschnitten (Ebenen durch den Mittelpunkt) die 2 Hauptaxen dieser Schnittcurven (Ellipsen) nach beiden Seiten hin abträgt. Vergl. Salmon-Fiedler, Geom. des Raumes, II. Teil, 4. Cap. (B). (12×8 cm.) Mk. 10.50.

359. (VI, 2.) **Ellipsoid hierzu,** aus dem die eben genannte Wellenfläche auf die angegebene Weise hervorgeht. (12×6 cm.) Mk. 4.60.

360. (VI, 4.) **Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle in einzelnen Octanten** mit den sphärischen und ellipsoidischen Curven (die also bezw. durch Kugeln und Ellipsoide ausgeschnitten werden). Auf jedem der beiden Mäntel ist das eine System sphärisch, das andere ellipsoidisch. Auf dem Modell sind ferner die Nabelpunkte angegeben. Die Oeffnungen markieren die Richtung des zugehörigen Strahls. Von Rector Dr. *Böklen* in Reutlingen, nebst einer Erläuterung. (24×9 cm.) . . . Mk. 10.—.

361. 362. (XVII, 8a u. b.) **Darstellung der Gestaltsänderungen einer schwingenden Saite** (Fortpflanzung stehender Wellen), a) für die Violinsaite, b) für die Klaviersaite. Von Oberlehrer Dr. *Schellenberg*, Mülheim a. d. Ruhr (K.)

Für die Differentialgleichung der schwingenden Saite $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dx^2}$ hat d'Alembert die allgemeine Lösung $z = f_1(x+t) + f_2(x-t)$ angegeben, unter f_1, f_2 beliebige Functionen ihrer Argumente verstanden. Mit ihr kann jedem beliebigen Anfangszustand der unbegrenzten Saite entsprochen werden. Denkt man sich nun den Anfangszustand einer auf beiden Seiten eingespannten Saite von der Länge l über die Endpunkte hinaus symmetrisch im Bezug auf sie ins Unbegrenzte fortgesetzt, so entsteht eine Aufgabe für die unbegrenzte Saite, deren Lösung in der Längsrichtung der Saite die Periode $2l$ hat. Eine halbe Periode derselben ist gleichzeitig die Lösung für die begrenzte Saite. Die Modelle stellen die Lösungen dar, die den a) bei der Violinsaite, b) bei der Klaviersaite gegebenen Anfangszuständen entsprechen: letztere erhält durch den Anschlag mittelst des Hammers im getroffenen Stück eine gewisse Geschwindigkeit, erstere wird mit dem Finger oder durch den Strich des Violinbogens in einem Punkte gezupft, sodass sie eine einfach gebrochene Linie darstellt. Um die Ableitung der Lösung durch das oben angedeutete Symmetrieprinzip klar hervortreten zu lassen, kommen in den Modellen in der Längsrichtung der unbegrenzt gedachten Saite 2 volle Perioden zur Darstellung, in der Richtung der Zeit t, wo sich ebenfalls die Periode $2l$ einstellt, 3 halbe Perioden. (33×26×7 cm.)
Preis für 8a Mk. 18.—, für 8b Mk. 23.—.

363 - 365. (XVII, 9a. b. c.) **Wärmeströmung in einem Stabe (a, b) und in einem Ringe (c).** Von Oberlehrer Dr. *Schellenberg*, Mülheim a. d. Ruhr (K).

363. (XVII, 9a.) $F_1(x,t') = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}$ ver-

anschaulicht den Temperaturverlauf in einem unbegrenzten Stabe von der Anfangstemperatur 0, dem in einem Punkte eine gewisse Wärmemenge zugeführt worden ist. Durch zweckmässige Überlagerung solcher Functionen kann man jedem beliebigen Aufangszustand im unbegrenzten Stab gerecht werden.

364. (XVII, 9b.) $F_2(x,t) = \frac{x \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2t \cdot \sqrt{t}}$ stellt den Temperaturverlauf in einem ebensolchen Stabe dar unter der Voraussetzung, dass in einem Punkte 2 Störungen der ersten Art von entgegengesetzt gleicher Intensität an einander gerückt seien. Durch Hinzunahme dieser Function kann man auch für den begrenzten Stab die allgemeine Lösung aufstellen. — Die Functionen F_1 und F_2 werden als Hauptlösungen 1. und 2. Art für den Stab unterschieden.

365. (XVII, 9c.) $V(x,t) = \vartheta_3\left(\frac{x}{l}, \frac{i\pi t'}{l^2}\right)$ für $l = 2$ gibt über den Temperaturverlauf in einem unbegrenzten Stab Aufschluss, dem in Abständen von der Länge l gleiche Wärmemengen zugeführt sind; es handelt sich also um eine Überlagerung unendlich vieler Hauptlösungen der ersten Art. Die Function hat hinsichtlich der Veränderlichen x die Periode l; im Modell kommen 3 solche Perioden zur Darstellung. Jede einzelne Periode bedeutet offenbar gleichzeitig eine Hauptlösung 1. Art für einen Ring vom Umfang l. (28×17×18 cm.)

Preis für 9a Mk. 18.—, für 9b Mk. 20.50, für 9c Mk. 23.—.

XIV. Krystallstructur.

(Reguläre Gebietsteilungen des Raumes.)

366—377. (XIX, 1—12.) **Modelle zur Darstellung von regulären Gebietsteilungen des Raumes.** Von Professor Dr. *A. Schoenflies* in Göttingen. Die Serie besteht aus 2 Typen, wovon 10 zu grösseren Blöcken zusammengesetzt sind.

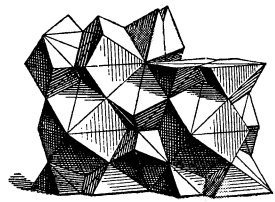
Vermöge jeder Gruppe von Transformationen des Raumes in sich (die sich aus Translationen, Drehungen um Axen und Spiegelungen zusammensetzen) zerfällt der Raum in endliche Bereiche, die bei diesen Operationen ineinander übergehen. Die Form der Bereiche kann mannigfaltig gewählt werden; hier sind sie ebenflächig begrenzt. — Gleichwertig sind alle Punkte des Raumes, die in Folge der Operationen einer Gruppe aus einem gegebenen Punkt hervorgehen. Ein „Fundamentalbereich" hat in seinem Inneren von allen gleichwertigen Punkten nur einen; die Punkte der Oberfläche dagegen gruppieren sich paarweise, zu jedem Stück der Oberfläche gehört ein ihm gleichwertiges, das an den Modellen kenntlich gemacht ist.

Drehungsaxen und Symmetrieebenen, die der Transformationsgruppe angehören, können nicht in das Innere des Fundamentalbereiches dringen, sie gehören vielmehr der Oberfläche an.

An den vorliegenden Modellen sind mehrere Fundamentalbereiche zu einem Raumbereich (Stein) vereinigt, der nun entweder allein zur Ausfüllung des ganzen Raumes benutzt werden kann (wie in den Modellen 1—6), oder aber mit einem ihm symmetrisch gleichen aber nicht congruenten zusammen dies bewirkt (7—9). Um das Zusammenfügen zu erleichtern, sind einige Steine zu einem Block vereinigt.

Siehe des Urhebers Abhandl. über Translationsgruppen in Math. Ann. Bd. 28, 29, 34 sowie Schoenflies, Krystallsysteme und Krystallstructur, Leipzig 1891.

Nr. 1—6. Alle Fundamentalbereiche sind congruent, und zwar stellen Nr. 1—5 überdies Körper dar, die eigene Symmetrie besitzen. Unter den Operationen der zu ihnen gehörigen Gruppe sind daher stets solche, die den Bereich in sich überführen. Für Nr. 6, der ohne eigene Symmetrie ist, ist dies dagegen nicht der Fall.

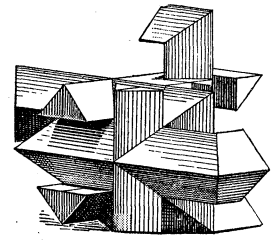


366°. 367°. (XIX, 1, 2.) Sie besitzen je eine zweizählige Symmetrieaxe und zwei durch sie laufende Symmetrieebenen; sie zerfallen in je vier Teile, deren jeder der sechste Teil eines Würfels ist, und zwar so, dass sie je die Hälfte einer Würfeldiagonale als Kante enthalten. Jeder dieser Teile kann selbst Fundamentalbereich einer Raumteilung sein.

368°. (XIX, 3.) Der Bereich besitzt eine vierzählige Symmetrieaxe und vier durch sie hindurchgehende Symmetrieebenen. Er zerfällt daher in acht teils congruente, teils spiegelbildlich gleiche Einzelkörper die selbst Fundamentalbereiche sind. Sie repräsentieren je den zwölfteu Teil eines Würfels, und zwar einen solchen, der eine ganze Würfeldiagonale als Kante besitzt.

369°. (XIX, 4.) Der Bereich besteht aus den gleichen acht Einzelkörpern, wie Nr. 3, ist aber so aus ihnen aufgebaut, dass ihm nur eine zweizählige Symmetrieaxe und zwei durch sie gehende Symmetrieebenen zukommen.

370°. (XIX, 5.) Der Bereich besitzt nur eine Symmetrieebene. Sie scheidet ihn in zwei Einzelkörper, die ebenfalls Fundamentalbereiche darstellen können. Jeder von ihnen ist wieder der sechste Teil eines Würfels, der übrigens von den vorhergehend benutzten Würfelteilen verschieden ist.

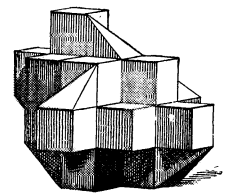


371°. (XIX, 6.) Ein Bereich ohne eigene Symmetrie. Er zerfällt aber noch in zwei congruente Einzelkörper, die selbst Fundamentalbereiche darstellen; jeder von ihnen ist der dritte Teil eines Würfels.

Nr. 7—9 gehören zu Raumteilungen, deren Bereiche teils congruent, teils spiegelbildlich gleich sind. Unter den Operationen der zugehörigen Gruppe gibt es keine, die einen Bereich in sich überführt.

Diejenigen Seitenflächen eines Steins, an welche congruente Steine angrenzen, sind durch ein **c**, diejenigen, an welche symmetrisch gleiche Steine anstossen, durch ein **s** kenntlich gemacht. Ferner sind gleichwertige Flächen mit Buchstaben von gleicher Farbe versehen.

372°. 373°. (XIX, 7, 8.) Diese Bereiche bestehen noch aus zwei Einzelkörpern, deren



jeder Fundamentalbereich einer Raumteilung sein kann. Sie stellen wieder je den sechsten Teil eines Würfels dar.

374°. (XIX, 9.) Der Bereich zerfällt nicht mehr in Einzelbestandteile, die selbst Fundamentalbereiche sein können. Er stellt zugleich den einfachsten Typus derjenigen Bereiche dar, welche der zugehörigen Gruppe von Operationen entsprechen.

375°. (XIX, 10a, b, c.) Diese drei sind Fundamentalbereiche von Raumteilungen, die zu einer Translationsgruppe gehören. Sie werden daher von lauter Paaren paralleler Flächen begrenzt. Die verschiedenen Formen gehen durch leicht sichtliche Umsetzungen ineinander über.

376°. 377°. (XIX, 11, 12.) Sie sollen erkennen lassen, wie mannigfache Formen sich aus einer Grundform ableiten lassen. Als Grundform ist ein Bereich gewählt, der durch Zusammenfügung von zwei Bereichen Nr. 4 entsteht. Nr. 11 zeigt eine zweite Halbierung dieses Körpers, Nr. 12 eine Zerfällung in vier congruente Bestandteile, die von den bisher benutzten verschieden sind. Aus ihnen lassen sich durch Zusammensetzung wieder neue Formen ableiten, u. s. w.

(Blöcke ca. 13×15×10 cm.)
(Einzelbereiche ca. 5×5×3 cm.)
Ganze Serie Mk. 160.—.

Anhang: Modell-Untersätze und Stative.

a) Untersätze für Gipsmodelle.

Um den Modellen in runder Form, z. B. den Kugeln und Ellipsoiden gute Unterlagen zu geben, die sie vor dem Herabrollen schützen, sind **Modell-Untersätze** aus **Holz,** schwarz gebeizt, in runder und ovaler Form zu beziehen und können für folgende Modelle passend geliefert werden: Serie I, Nr. 4 u. 5; Serie III, Nr. 1—4; Serie V, Nr. 2a, b, 5c und 7a, b; Serie VI, Nr. 1a, b, 2 und 3; Serie X, Nr. 3, 7, 12a, b, c und 13; Serie XVII, Nr. 2a, b, 5a, b, c, 6a, b, c; Serie XXIII, Nr. 1a u. b, oder nach der laufenden Nummer geordnet zu Nr. 1—5, 89, 170, 171, 177–179, 213—220, 222, 318—323, 356—359.

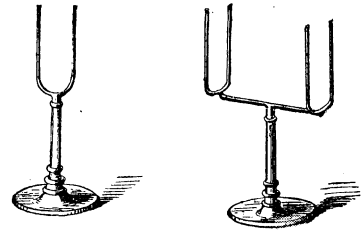
Preis per Stück je nach Grösse Mk. —.40 bis Mk. 1.20.

b) Gestelle für Fadenmodelle.

1) **Dreifuss** aus Draht zum Aufhängen des Modells Nr. 9 (XXIII, 6); die unteren Ringe des Umdreh-Hyperboloids werden dabei durch zwei Klammern in ihrer Lage festgehalten . . . . . Mk. —.50.

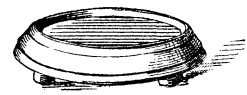
2) **Gestelle aus Draht** als Untersatz für Nr. 30, 31, 75, 76. (XXIII, 8a u. b, 9a u. b) à Mk. —.30.

c) Gestelle für die Cartonmodelle der Flächen 2. Ordnung.



1) **Einfache Gabel** aus vergoldetem Messingdraht mit Holzfuss zu Nr. 6, 7, 24, 28, 43 . . . . . à Mk. 2.—.

2) **Doppelgabel** zu Nr. 13 . . Mk. 3.—.



3) **Holzteller** zum Aufstellen des hyperbolischen Paraboloids Nr. 35 . . Mk. 1.—.

Preis der Untersätze für die ganze Carton-Serie 5 Stück Nr. 1, je 1 Stück von Nr. 2 und 3 . . . . . Mk. 14.—.

Die übrigen Untersätze und Gestelle sind gleich bei den betreffenden Modellen aufgeführt.