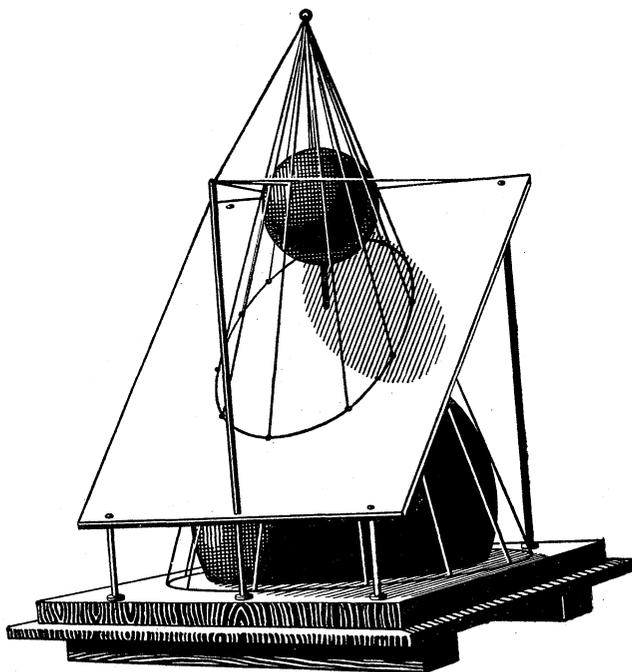


cd

VERZEICHNIS MATHEMATISCHER MODELLE

SAMMLUNGEN H. WIENER UND P. TREUTLEIN



AUS DEM VERLAG  VON B.G. TEUBNER
IN LEIPZIG UND BERLIN 1912

In demselben Verlage erscheinen:

Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle

In zwanglosen Heften herausgegeben von

HERMANN WIENER

I. Heft: Abhandlungen von H. Wiener

91 S. 1907. Geh. M. 3.—

Inhalt: Nr. 1. Über mathematische Modelle und ihre Verwendung im Unterricht. Nr. 2. Zur Projektion einiger ebenen Figuren. Nr. 3. Die 5 regelmäßigen Vielfache PLATONS, Regelmäßigkeit in einer Gruppe. Nr. 4. Die regelmäßigen Vielfache (PLATONS, KEPLERS und POINSOTS), abgeleitet aus ihrer Gruppe. Nr. 5. Regelmäßige Vielstrahlen und geschlossene Spiegelsysteme. Nr. 6. Wie sollen Flächen, insbesondere die der 2. O., gezeichnet werden? Nr. 7. Über Flächen 2. O.: I. Reelle und ideelle Achsen und Scheitel der Flächen 2. O. Imaginäre Flächen. II. Erzeugung der Kurven und Flächen 2. O. im Gebiet der affinen Abbildungen. Nr. 8. Bewegliche Fadenmodelle der Regelflächen 2. O. mit gleichbleibenden Fadenlängen. Nr. 9. Bewegliche Stabmodelle zur Überführung einer Fläche 2. O. in konfokale Flächen.

II. Heft: Abhandlungen von P. Treutlein

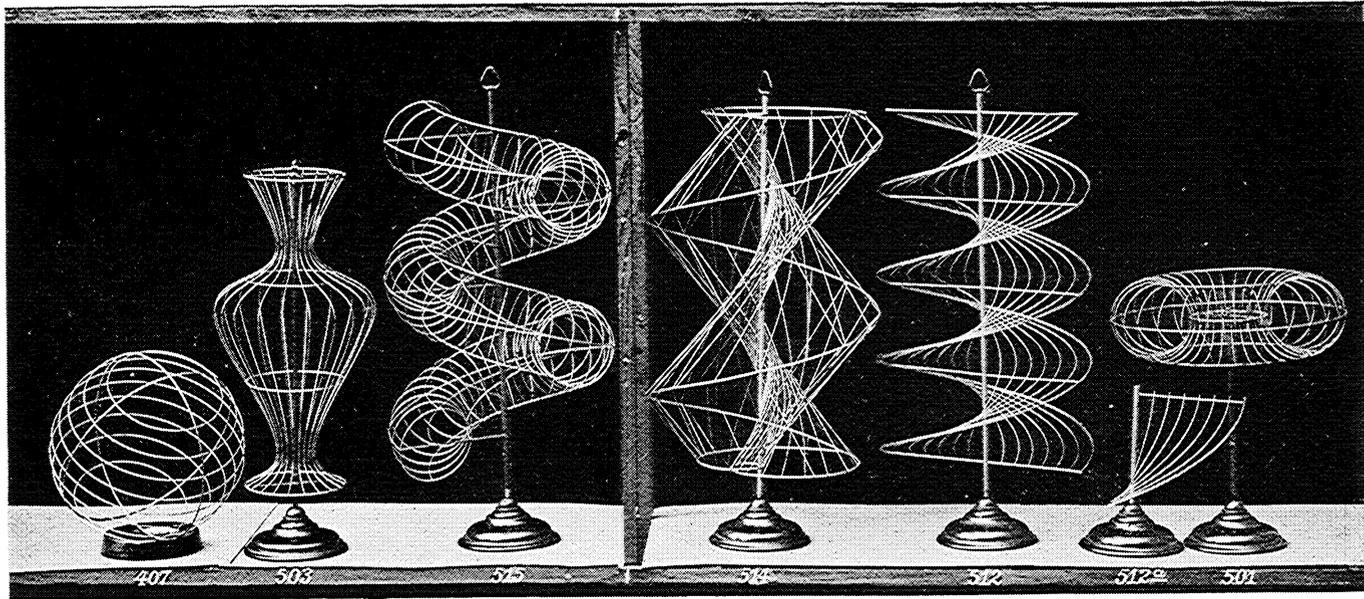
20 S. 1911. Geh. M. —,80

Inhalt: Nr. 1. Über mathematischen Anschauungsunterricht. Nr. 2. Über mathematische Modelle und deren Verwendung im Unterricht. Nr. 3. Erläuterungen zu den Reihen und zu den einzelnen Modellen der Treutleinschen Sammlung.

In den letzten Jahren hat sich die Überzeugung immer mehr gefestigt, daß es eine wesentliche Aufgabe des mathematischen Unterrichts sei, neben dem logischen Denken auch die Raumanschauung auszubilden. Da mag einmal darauf hingewiesen werden, daß vor einem halben Jahrhundert GOTTFRIED SEMPER — allerdings im Hinblick auf die Kunst — in dem gleichen Sinne gewirkt hat, indem er auf die Mängel des damals herrschenden Systems des Schulunterrichts hinweist, der eben dasjenige Organ ertöte, das bei dem Kunstempfinden, und in gleichem Maße bei dem Kunst Hervorbringen sich betätige, nämlich „die dem Künstler sowie dem Kunstempfänglichen unentbehrliche Gabe unmittelbaren anschauenden Denkens“, womit er (nach v. RUMOHR) „diejenige unabhängige Tätigkeit des Geistes“ bezeichnet, „vermöge welcher ohne die Vermittlung der Kritik des Verstandes die volle Auffassung und Insichaufnahme des Schönen in der Kunst möglich ist.“ (Der Stil, I, S. VIII.) Mag es manchem gewagt erscheinen, diese Äußerung über das künstlerische Schaffen (wenn auch ohne den Verzicht auf die Kritik

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlags.

H. WIENERS UND P. TREUTLEINS SAMMLUNGEN MATHEMATISCHER MODELLE. Tafel I.



Maßstab 1:13.

H. Wieners Sammlung, Reihe VII.

VERZEICHNIS VON
H. WIENERs UND P. TREUTLEINs
SAMMLUNGEN
MATHEMATISCHER MODELLE
FÜR HOCHSCHULEN, HÖHERE LEHRANSTALTEN
UND TECHNISCHE FACHSCHULEN

ZWEITE AUSGABE

MIT 6 TAFELN



LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG VON B. G. TEUBNER

1912

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

VORWORT.

Das hier in zweiter Auflage ausgegebene Verzeichnis mathematischer Modelle hat nicht nur dem Umfange nach eine Erweiterung erfahren, sondern auch im Anwendungsgebiet. Während die in der ersten Auflage angezeigten Modelle von H. WIENER aus den Bedürfnissen der Hochschule hervorgegangen waren und für den Schulunterricht nur das brachten, was auch an Hochschulen nicht entbehrt werden kann, liegt jetzt in 18 Reihen eine Sammlung von über 200 Modellen vor, die ausgesprochenermaßen den Zwecken der Schule dienen: der Direktor der Karlsruher Goetheschule, Herr P. TREUTLEIN, hat, einer Anregung des Herausgebers der früheren Reihen folgend, seine in langjährigem Unterricht erprobten Schulmodelle in dankenswerter Weise dem unterzeichneten Verlag zur Veröffentlichung übergeben. Sie bilden eine Unterstufe der früheren Reihen, da und dort auch in die Oberstufe hinüberreichend.

Gleichzeitig wird H. WIENERS Sammlung in vier neuen Reihen mit 49 Modellen fortgesetzt, die außer den Raumkurven 3. Ordnung verschiedene Arten von Gelenksystemen behandeln und darin zum Teil neue Tatsachen aus der räumlichen Kinematik vorführen.

Eine weitere Ausdehnung des Unternehmens ist in Aussicht genommen, und es wäre erwünscht, wenn sich auch andere Fachmänner daran beteiligten. Anträge zur Aufnahme bereits gefertigter oder in Entwürfen vorliegender Modelle sind an die Verlagsbuchhandlung zu richten. Die für die Aufnahme maßgebenden Grundsätze sind wie bisher die folgenden:

Die Modelle sollen mehr dem Unterricht an höheren Schulen und Hochschulen dienen als der Sonderforschung;

sie sollen in geschlossenen Reihen ganze Gruppen geometrischer Gebilde und mathematischer Sätze umfassen und sich nicht in einzelnen Stücken auf getrennte Gebiete verlieren;

sie sollen endlich nach Größe und Ausstattung die Einheit der Sammlung wahren.

BEZUGSBEDINGUNGEN.

Die Modelle können in Reihen oder einzeln zu den im Verzeichnis vermerkten Preisen bezogen werden, zu denen noch Verpackungs- und Versandkosten hinzukommen. Bei der Bestellung ist die Nummer jedes gewünschten Modells anzugeben. Die Versendung der Modelle geschieht auf Gefahr des Empfängers.

Sonderwünsche, die Herstellung betreffend, werden von der Verlagsbuchhandlung nach Möglichkeit berücksichtigt.

Den einzelnen Modellen werden wissenschaftliche Abhandlungen beigefügt, soweit solche erschienen sind.

LEIPZIG, Poststraße 3.

B. G. TEUBNER.

INHALT.

Vorwort. Seite 3

H. Wieners Sammlung mathematischer Modelle.

	Seite		Seite
Ebene Gebilde.			
I. Reihe. Sieben Drahtmodelle zum Projizieren.	5	modelle der Flächen 2. Ord. in Kreisschnitten	15
Ebenflächige Raumgebilde.			
II. Reihe. Fünf Drahtmodelle der regelmäßigen (Platonischen) Vielfache.	7	Dreh- und Schraubenflächen.	
III. Reihe. Sechs Drahtmodelle mit Fäden: Höhere regelmäßige Vielfache. Regelmäßige räumliche Vielstrahlen	8	VII. Reihe. Sechs Drahtmodelle von Dreh- und Schraubenflächen . . .	19
Flächen zweiter Ordnung.		Raumkurven.	
IV. Reihe. Sechs Drahtmodelle der Flächen 2. Ord., dargestellt durch Hauptschnitte	10	VIII. Reihe. Sechzehn Fadenmodelle d. Singularitäten von Raumkurven	24
V. Reihe. Sechs bewegliche Modelle der Regelflächen 2. Ord. a) Fadenmodelle, b) Stabmodelle	12	IX. Reihe. Raumkurven 3. Ord. (14 Draht- und Fadenmodelle)	29
VI. Reihe. Sechs bewegliche Draht-		Gelenksysteme.	
		X. Reihe. Gelenkvierecke (10 bewegliche Modelle)	32
		XI. Reihe. Gelenkvielfache (13 bewegliche Modelle aus Blech und Papier)	36
		XII. Reihe. Gelenkflächen (11 bewegliche Modelle in Stäben und Drahtkurven)	41

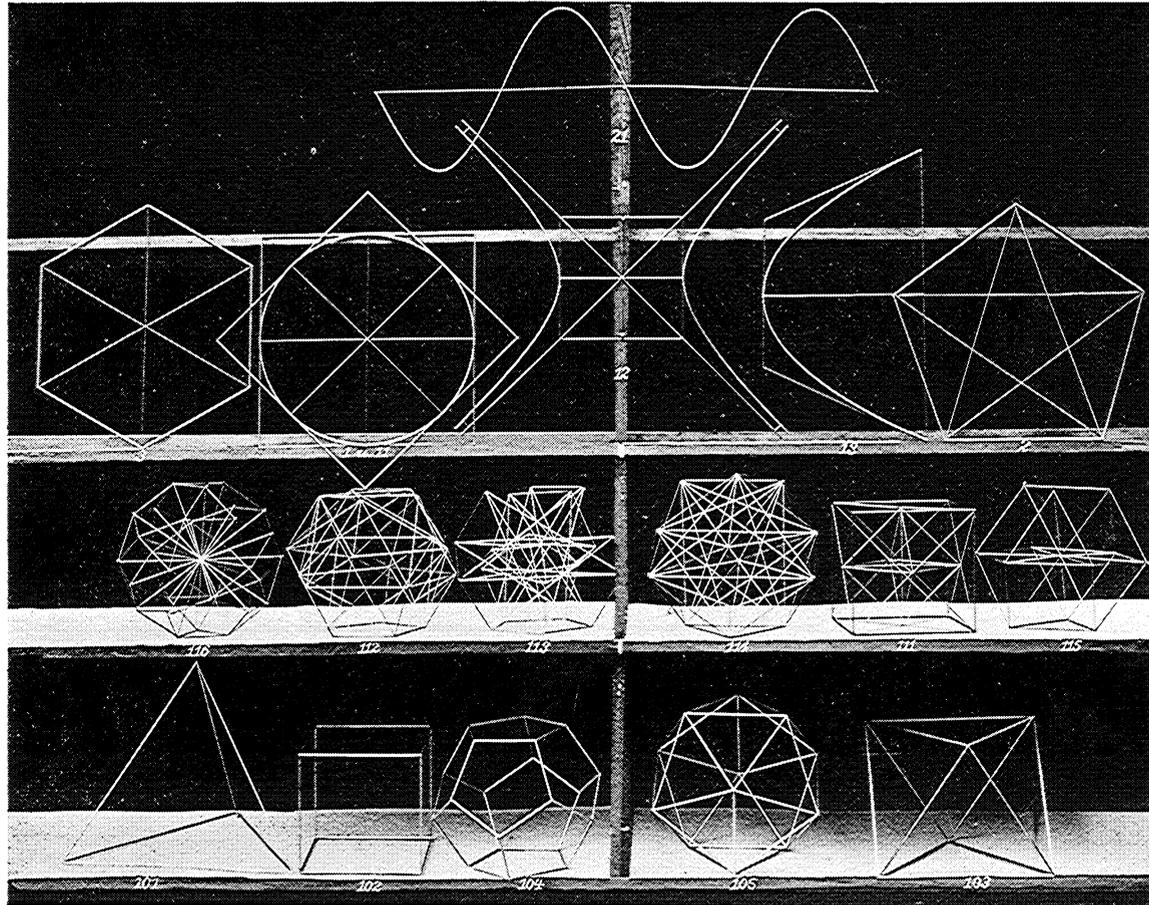
P. Treutleins Sammlung mathematischer Schulmodelle.

A. Modelle für den Rechenunterricht.

XXXI. Reihe. Für Verdeutlichung des Zehnergesezes und für das Bruchrechnen	47	XXXII. Reihe. Maße, Gewichte und Münzen	48
--	----	---	----

B. Modelle für den geometrischen Unterricht.

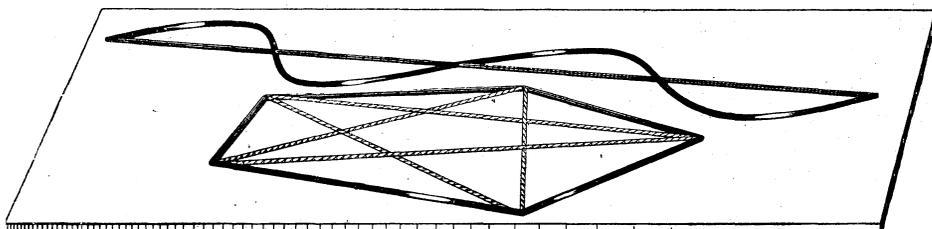
I. Modelle für die ebene Geometrie.			
XXXIII. Reihe. Meßinstrumente	49	XL. Reihe. Prismen	56
XXXIV. Reihe. Verwandlung von Rechteck und schiefem Parallelogramm	50	XLII. Reihe. Zylinder	56
XXXV. Reihe. Inhalt von Rechteck und schiefem Parallelogramm	51	XLIII. Reihe. Pyramiden und Pyramidenstumpfe	57
XXXVI. Reihe. Dreieck.	52	XLIV. Reihe. Kegel- und Kegelstumpfe	58
XXXVII. Reihe. Trapez und beliebiges Viereck	52	XLV. Reihe. Kugel und ihre Teile, sowie Ellipsoide	59
XXXVIII. Reihe. Flächensätze beim rechtwinkligen Dreieck (Pythagoreischer Lehrsatz)	53	XLVI. Reihe. Kugeldreiecke u. Kugeldreiecke	59
II. Modelle für die körperliche Geometrie.		XLVII. Reihe. Geometrische Verwandtschaften	60
XXXIX. Reihe. Parallelfächner	55	XLVIII. Reihe. Perspektive Abbildungen des Kreises.	60
		XLVIII. Reihe. Kegelschnitte. A. Ebene Schnitte des Kreiszyllinders und des Kreis kegels. B. Kegelschnittschablonen zum Wandtafelzeichnen	61
Sachübersicht		Seite 62	



Maßstab 1 : 14.

H. Wieners Sammlung, Reihe I, II, III.

Ebene Gebilde.



Nr. 2 und 21.

I. Reihe. Sieben Drahtmodelle zum Projizieren.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 7 Modelle mit Drehachse und 2 Drehköpfen *M.* 65.—

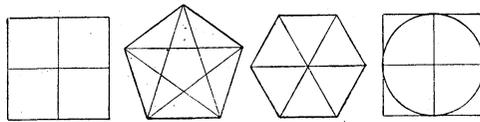
- | | |
|---|---------------|
| 1. Quadrat | <i>M.</i> 6.— |
| 2. Regelmäßiges Fünfeck (s. die Figur) | „ 9.— |
| 3. Regelmäßiges Sechseck | „ 7.— |
| Die Größe der drei Vielecke ist so bemessen, daß sie einem Kreis von 40 cm Durchmesser umschrieben sind. Dem Quadrat und Sechseck sind die Diagonalen, dem Fünfeck das Sternfünfeck mit gleichen Ecken hinzugefügt. | |
| 11. Kreis mit Quadrat, Durchmesser des Kreises 40 cm | „ 10.— |
| Hierzu eine a) Drehachse mit aufsetzbarem b) Drehkopf | „ 3.50 |
| 12. Rechtwinkelige Hyperbel, Länge der äußersten Sehnen etwa 60 cm | „ 16.— |
| Hierzu ein Drehkopf, auf die Drehachse passend | „ 2.40 |
| 13. Parabel. Länge der äußersten Sehne 56 cm | „ 7.50 |
| 21. Sinuslinie (s. die Figur), Länge der mittleren Linie 95 cm | „ 7.50 |

Die Modelle sind in ihren Hauptteilen aus starkem blanken Messingdraht hergestellt, die Diagonalen und anderen Hilfslinien aus schwächeren, teils schwarz, teils rot lackierten Drähten.

Das Quadrat (Nr. 1) läßt sich mittels angebrachter Stiftchen auf den Kreis Nr. 11 aufsetzen, so daß beide vereinigt einen Kreis mit umschriebenem regelmäßigen Achteck bilden.

Hierzu die Abhandlung Nr. 2: „Zur Projektion einiger ebenen Figuren“.

Die Gesetze der Perspektive, einschließlich der Parallelprojektion, bedürfen im Unterricht außer der mathematischen Begründung auch einer anschaulichen Erläuterung, und hierzu ist am zweckmäßigsten das Projizieren solcher einfachen Formen, wie sie in diesen Modellen gegeben sind. Andererseits dient das Projizieren als Beweisverfahren, da es ermöglicht, Eigenschaften, die bei Projektion invariant bleiben, von einem Gebilde auf das andere, etwa vom Kreis auf andere Kegelschnitte, zu übertragen. Sehr anschaulich läßt sich z. B. eine Anzahl solcher Übertragungen machen, indem man das Modell des Kreises mit umschriebenem Quadrat (Nr. 11) auf die Achse aufsteckt, in Drehung versetzt und die so entstehenden Figuren etwa parallel projiziert.

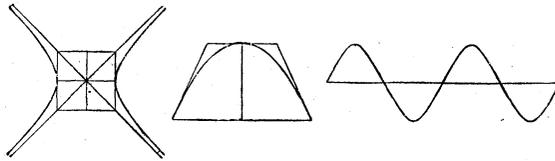


Nr. 1.

Nr. 2.

Nr. 3.

Nr. 11.



Nr. 12.

Nr. 13.

Nr. 21.

Schema der Modelle, Maßstab 1:30.

Ebenflächige Raumgebilde.

II. Reihe. Fünf Drahtmodelle der regelmäßigen
(Platonischen) Vielfache.Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 5 Modelle *M.* 60.—

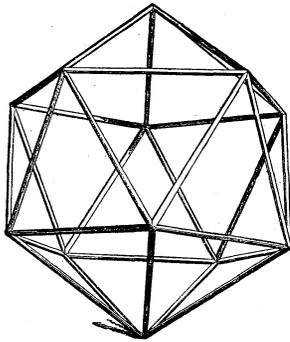
101. Tetraeder	<i>M.</i> 7.—
102. Würfel	„ 11.—
103. Oktaeder	„ 11.—
104. Dodekaeder	„ 16.—
105. Ikosaeder (s. die Figur)	„ 16.—

Bei sämtlichen Modellen beträgt die Entfernung von einer Kante zur Gegenkante 32 cm, so daß in alle eine und dieselbe Kugel die Kanten berührend hineingelegt werden kann.

Die Vielfache sind mittels ihrer Kanten dargestellt, die aus 4 mm starkem blankem Messingdraht bestehen.

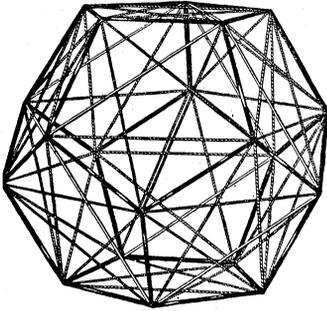
Hierzu die Abhandlung Nr. 3: „Die fünf regelmäßigen Vielfache PLATONS. Regelmäßigkeit in einer Gruppe“.

Die verschiedenartigen Projektionen der regelmäßigen Vielfache lassen sich am deutlichsten an diesen Modellen erkennen, die auch die hinteren, bei körperlichen Modellen verdeckten Teile sichtbar machen. Aber auch für die Verdeutlichung der Sätze der Gruppentheorie, in der bekanntlich die regelmäßigen Körper eine wichtige Rolle spielen, sind keine anderen so wirksam, wie solche durchsichtigen Modelle.

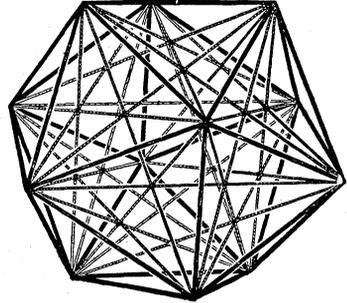


Nr. 105.

Maßstab 1:8.



Nr. 112.



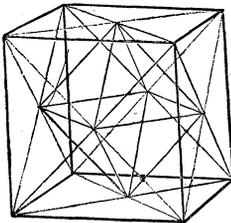
Nr. 114.

Maßstab 1:8.

III. Reihe. Sechs Drahtmodelle mit Fäden: Höhere regelmäßige Vielfache. Regelmäßige räumliche Vielstrahlen.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 6 Modelle *M.* 115.—

- | | |
|---|----------------|
| 111. Würfel mit zwei eingeschriebenen Tetraedern und dem diese als Halbfächner enthaltenden Oktaeder (s. die Figur) | <i>M.</i> 16.— |
| 112. Dodekaeder mit fünf eingeschriebenen Würfeln (s. die Figur) | „ 20.— |
| 113. Dodekaeder mit eingeschriebenem Ikosaeder | „ 24.— |
| 114. Ikosaeder mit eingeschriebenem Dodekaeder (s. die Figur) | „ 24.— |
| 115. Regelmäßiger räumlicher Sechsstahl | „ 12.— |
| 116. Regelmäßiger räumlicher Fünfzehnstrahl | „ 20.— |



Nr. 111.

Maßstab 1:8.

Die Größe der Modelle beträgt bei Nr. 111 bis 114, wie bei der vorigen Reihe, von einer Kante zur Gegenkante gemessen, 32 cm, dieselbe Länge haben die Diagonalen in Nr. 115 und 116.

Die Modelle bestehen aus schwarz gehaltenen Drahtgestellen, in die starke Seidenfäden eingespannt sind, und zwar bei Nr. 113 und 114 in weißer Farbe, bei den übrigen verschiedenfarbig; bei Nr. 115 und 116 sind die aufeinander senkrechten Geraden mit gleicher Farbe dargestellt, während bei Nr. 111 jedes der beiden Tetraeder, bei Nr. 112 jeder der fünf Würfel seine besondere Farbe hat, so daß sich jeder dieser Körper sehr deutlich heraushebt. Das in die Faden tetraeder von Nr. 111 eingesetzte Oktaeder ist aus Neusilberdraht.

Die Gestelle von Nr. 115 und 116 bilden halbreghelmäßige Vielfache, die man erhält, wenn man beim Würfel oder Oktaeder (für Nr. 115) und beim Dodekaeder oder Ikosaeder (für Nr. 116) die Kantenmitten als Ecken eines neuen gewöhnlichen Vielfachs wählt.

Hierzu die Abhandlungen Nr. 4 „Die regelmäßigen Vielfache (PLATONS, KEPLERS und POINOTS), abgeleitet aus ihrer Gruppe“ und Nr. 5 „Regelmäßige Vielstrahlen und geschlossene Spiegelsysteme“.

Die Modelle Nr. 113 und 114 stellen in erster Linie die zwei KEPLERSchen Vielfläche dar, indem in das Dodekaeder und in das Ikosaeder solche Nebenkanten eingeschrieben sind, daß sie sich im Innern wieder in Ecken eines Ikosaeders und eines Dodekaeders treffen. Werden dann diese Linien als Kanten eines neuen Vielflachs betrachtet, und solche Flächen durch sie gelegt, daß sie an jeder Ecke ein gewöhnliches Vieltkant bilden, so sind die so entstehenden Vielfläche die beiden KEPLERSchen. Es können diese noch auf eine zweite Art entstanden gedacht werden, nämlich durch Erweiterung der im Innern schwebenden PLATONischen Vielfläche, die so als Kerne der KEPLERSchen zu betrachten sind.

Diese beiden Modelle zeigen aber auch, wie die POINSOTSchen Vielfläche durch Einschreiben oder Umschreiben (Erweitern der Seitenflächen) aus den PLATONischen entstehen, und in gleicher Weise behandeln die Modelle Nr. 111 und 112 die in mehrere gewöhnliche zerfallenden Vielfläche; das erstere zeigt in übersichtlicher Anordnung die beiden Tetraeder als Halbflächner (Hemiëdrien) des Oktaeders und ist deshalb im Unterricht der Kristallkunde vorteilhaft zu verwenden.

Die Modelle Nr. 115 und 116 bieten, wie die regelmäßigen Körper, eine Darstellung der Gruppen von Drehungen um einen festen Punkt und verdienen vor den regelmäßigen Körpern den Vorzug, da sie einmal auf die Gruppen eindeutig bezogen sind und außerdem für sie eine Erzeugung aus involutorischen Drehungen (Umwendungen oder Spiegelungen an Achsen) liefern. Die in den Modellen dargestellten Geraden bilden ein geschlossenes System von Spiegelachsen. Als Ergänzung der beiden ist das Modell Nr. 401 zu betrachten, an dem (als Durchmesser einer Kugel) drei zueinander senkrechte Geraden angebracht sind, die ein weiteres geschlossenes System ausmachen.

Der regelmäßige Fünfzehnstrahl Nr. 116 enthält fünf (durch Farben unterschiedene) Achsenkreuze, die so liegen, daß mit den Achsen (Strahlen) eines Kreuzes irgend eine weitere Achse die Winkel $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{5}$ eines Gestreckten einschließt. Dieser stereometrische Satz liefert den gruppentheoretischen: Wenn man die Spiegelung an jeder der drei Achsen eines Kreuzes mit der Spiegelung an irgend einer anderen der 15 Achsen zusammensetzt, so erhält man gerade die dreierlei in der Gruppe vorkommenden, einander nicht kongruenten, nicht involutorischen Drehungen. Aus diesem Satze folgt dann gruppentheoretisch, daß in der Ikosaedergruppe sechs einander nicht kongruente regelmäßige Vielfläche auftreten: das Ikosaeder und das Dodekaeder und die vier KEPLERSchen und POINSOTSchen Vielfläche.

Die 6 Modelle sind vom Herausgeber zuerst für das mathematische Institut der Universität Halle angefertigt worden und waren auf den Ausstellungen mathematischer Modelle in München und Chicago im Jahre 1892 ausgestellt. Nur das Oktaeder in Nr. 111 ist nachträglich eingefügt. Man vergleiche den Katalog von W. DYCK (Nachtrag 1893, S. 54).

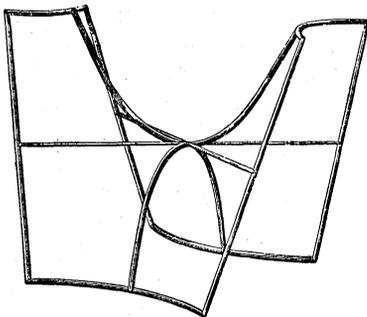
Flächen zweiter Ordnung.

IV. Reihe. Sechs Drahtmodelle der Flächen 2. O., dargestellt durch Hauptschnitte.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 6 Modelle *M.* 90.—

401. Kugel, Durchmesser 32 cm *M.* 10.—
 Hierzu vergleiche man die Kugel Nr. 407 in der VII. Reihe.
 402. Ellipsoid, Achsenlängen 40, 32 und 24 cm „ 10.—
 403. Zweischaliges Hyperboloid, Höhe 34 cm „ 20.—
 404. Einschaliges Hyperboloid, Höhe 34 cm „ 20.—
 405. Elliptisches Paraboloid, Höhe 28 cm „ 8.—
 406. Hyperbolisches Paraboloid, Höhe 32 cm (s. die Figur) „ 28.—

Die Modelle bestehen im wesentlichen aus blanken Messingdrähten, in allen Fällen sind die Hauptschnitte durch 4-mm Draht angegeben, die Kugel ist durch drei aufeinander senkrechte Kreise



Nr. 406.

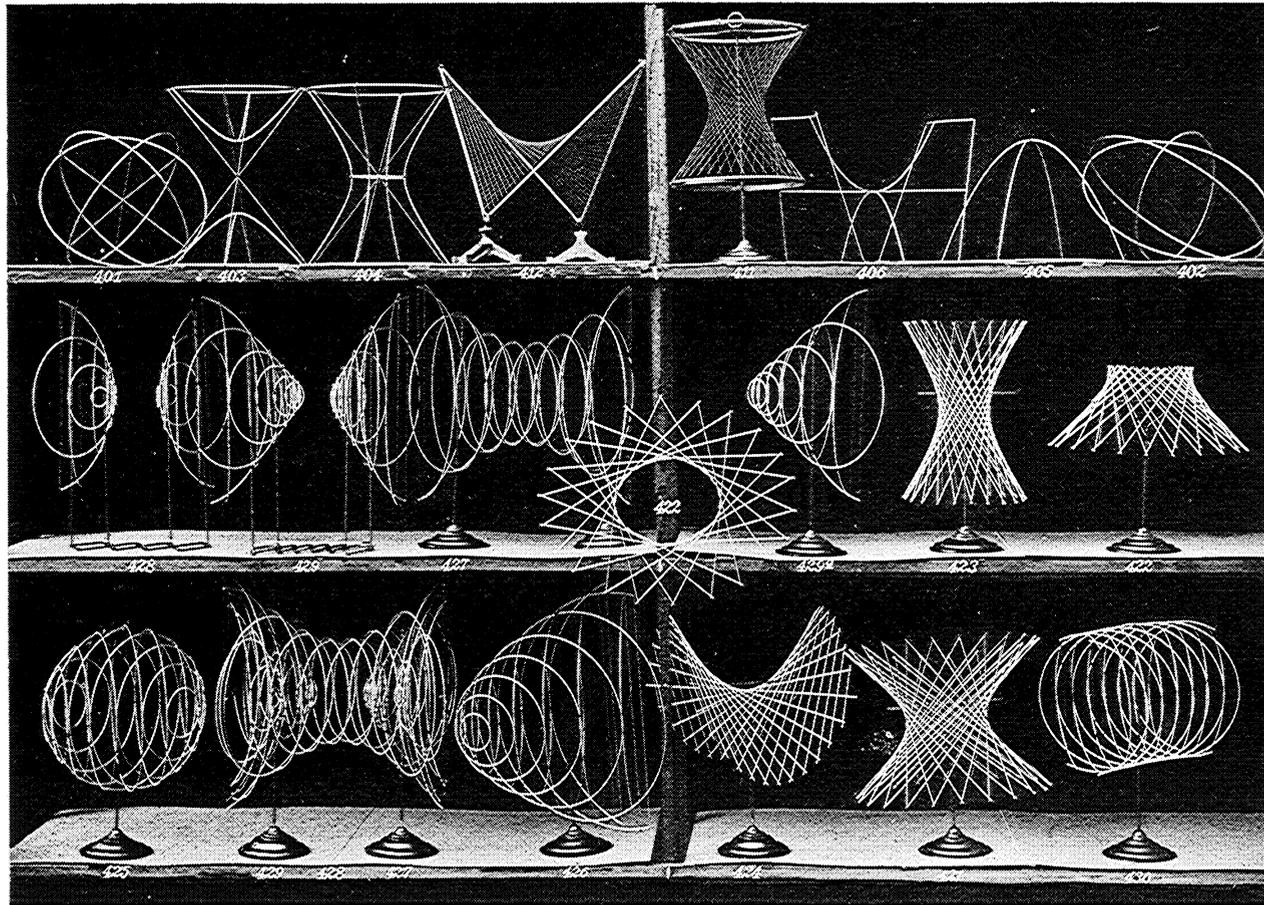
Maßstab 1:6.

dargestellt, und diesen sind (in Fäden) drei auf einander senkrechte Durchmesser eingespannt. Den Hyperboloiden sind die 4 Asymptoten der Hauptschnitte hinzugefügt, die Hyperboloide und das elliptische Paraboloid sind durch elliptische Schnitte begrenzt, desgleichen das hyperbolische Paraboloid (s. die Figur) durch 2 Hyperbeln und 4 Erzeugende, während außerdem die beiden Scheitelerzeugenden beigelegt sind.

Den Modellen wird Nr. 6 der Abhandlungen beigegeben: „Wie sollen Flächen, insbesondere die der 2. O., gezeichnet werden?“ und

von der Abhandlung Nr. 7 der Abschnitt I: „Reelle und ideelle Achsen und Scheitel der Flächen 2. O. Imaginäre Flächen“. Bei Bezug der ganzen Reihe erhält der Käufer die Abhandlung Nr. 7: „Über Flächen 2. Ordnung“.

Die IV. Reihe soll die Flächen 2. O. in der Form wiedergeben, wie sie bei der ersten Behandlung im Unterricht auftreten, nämlich bestimmt durch ihre Hauptschnitte. Mittels der durchsichtigen Gestalt, in der sich die Modelle als Drahtgestelle darbieten, soll gleichzeitig die Wiedergabe dieser Flächen in der Zeichnung dem Lehrer wie dem Schüler er-



Maßstab 1:14.

H. Wieners Sammlung, Reihe IV, V, VI.

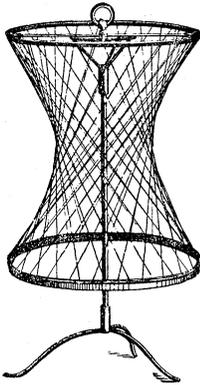
leichtert werden. Auch hier wird, wie bei den regelmäßigen Vielflachen, das Projizieren der Modelle eine zwar nicht unbedingt erforderliche, aber erwünschte Unterstützung gewähren.

Beim Ellipsoid und den beiden Hyperboloiden ist ein gemeinsames Achsenverhältnis $5:4:3$ und bei den Hyperboloiden auch gleiche Länge der Achsen gewählt. Denkt man sich das Ellipsoid durch ähnliche Verkleinerung auf dieselben Achsen gebracht und dann alle drei Flächen so in einander gesetzt, daß die gleichen Achsen sich decken, so sind die Flächen in einer besonderen Lage, in der man sie als harmonisch zugeordnete Flächen bezeichnet. Auch die Modelle der beiden Paraboloiden weisen die gleiche Beziehung auf, indem die Parabeln der Hauptschnitte der einen Fläche mit denen der anderen Fläche kongruent sind. Diese Beziehung ist deswegen von großer Wichtigkeit, weil sich aus ihr ganz elementare Konstruktionen für beliebige Punkte oder Tangenten der Flächen gewinnen lassen, falls diese durch ihre Hauptschnitte gegeben sind. In Nr. 7 der Abhandlungen wird eine rein geometrische und elementare Theorie der Flächen 2. O. mitgeteilt, die ihre Einfachheit der elementar-geometrischen Einführung des Begriffs der harmonischen Zuordnung verdankt. Diese Betrachtungen lehren beliebige Punkte oder Berührebenen aus den Hauptschnitten der Fläche zu konstruieren, ohne Anwendung von Sätzen der projektiven Geometrie. Jedoch lassen diese Konstruktionen sehr wohl eine projektive Verallgemeinerung zu.

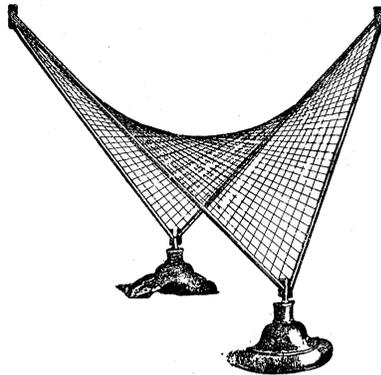
V. Reihe. Sechs bewegliche Modelle der Regelflächen 2. Ordnung.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 6 Modelle *M.* 210.—

a) Fadenmodelle:



Nr. 411.



Nr. 412.

D. R. G. M.

207707.

Maßstab 1:10.

411. Bewegliches einschaliges Dreh-Hyperboloid mit Ständer
(s. die Figur*). Höhe (mit Ständer) 44 cm. *M.* 35.—
412. Bewegliches hyperbolisches Paraboloid mit Ständer (s. die
Figur). Höhe (mit Ständer) 40 cm „ 45.—

Die beiden Modelle sind dem Wunsche entsprungen, bewegliche Fadenmodelle der Regelflächen 2. O. herzustellen, bei denen die Spannung der Fäden nicht durch angehängte Gewichte, sondern durch Unveränderlichkeit der Fadenlängen bewirkt wird. In beiden Modellen sind die beiden Scharen von Erzeugenden durch Fäden dargestellt.

Beim Gebrauche der Modelle ist folgendes zu beachten:

Bei 411: Der obere Teil des Modells besteht aus zwei aufeinanderliegenden gegen einander drehbaren Ringen, deren jeder mit dem unteren Ringe des Modells durch Fäden verbunden ist. Bei der Drehung eines der oberen Ringe gegen den anderen wird die Einschnürung des Hyperboloids verändert, von der Grenzlage des Zylinders bis zu der des Kegels. Man beginne beim Aufstellen des Modells stets beim Zylinder und lasse die Fäden erst gut aushängen; dann drehe man beide Ringe gegen einander und achte darauf, daß alle Fäden dauernd straff sind. Beim Niederlegen drehe man das Modell wieder zum Zylinder auf und drille dann, indem man die oberen Ringe gegen einander fest läßt, die beiden Scharen von Fäden gleichzeitig im selben Sinn möglichst weit zusammen.

Von dem Ständer kann der Ring abgehoben und die beiden Hülsen nach der Mitte zu verschoben werden, und hierauf lassen sich die drei Füße zusammenklappen.

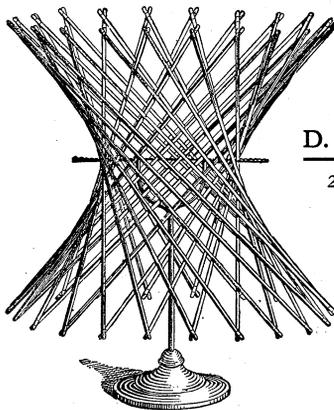
*) In der Figur 411 sind von der Anzahl der Fäden nur zwei Drittel eingezeichnet.

Bei 412: Die Bewegung wird durch vier Scharniere mit parallel (vertikal) gestellten Achsen ermöglicht; die Grenzlagen sind zwei Parabeln, in einer mittleren Lage bilden die 4 Stäbe, zwischen denen die Fäden gezogen sind, Kanten eines regelmäßigen Tetraeders. Beim Öffnen des Modells aus einer der ebenen Grenzlagen fasse man es an den beiden aufeinander liegenden Scharnieren und öffne es durch Ziehen in kurzen, ja nicht heftigen Rucken; dabei achte man darauf, daß sich beide Scharniere gleichzeitig öffnen. Allgemein beachte man bei allen Bewegungen die Regel, stets die beiden Scharniere anzufassen, die einander am nächsten sind, und beim Öffnen (bis zur Mittellage) an den beiden sich von einander entfernenden Scharnieren zu ziehen, beim Schließen (von der Mittellage an) an den beiden sich nähernden Scharnieren zu drücken.

Den Modellen wird die Abhandlung Nr. 8 beigegeben: „Bewegliche Fadenmodelle der Regelflächen 2. Ordnung mit gleichbleibenden Fadenzahlen“.

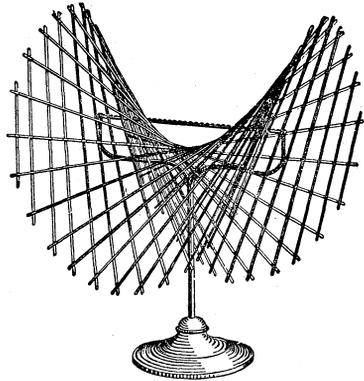
b) Stabmodelle:

Gesamtpreis der 4 Stabmodelle mit 4 Ständern M. 130.—



Nr. 421.

D. R. G. M.
208811.



Nr. 424.

Maßstab 1:8.

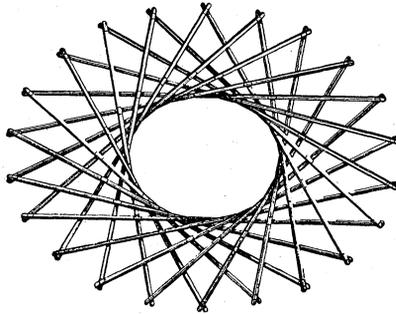
- 421. **Bewegliches einschaliges Hyperboloid** (mit Grenzellipse und -Hyperbel) mit Ständer (s. die Figur). Höhe (zusammengeklappt) 36 cm M. 35.—
- 422. **Dasselbe, halb, zum Umstülpen** mit Ständer (s. die Figur). Höhe (zusammengeklappt) 19 cm „ 25.—
- 423. **Bewegliches einschaliges Dreh-Hyperboloid** (mit Grenzkreis und -Geraden) mit Ständer. Höhe (zusammengeklappt) 40 cm „ 35.—
- 424. **Bewegliches hyperbolisches Paraboloid** mit Ständer (s. die Figur). Höhe (zusammengeklappt) 31 cm „ 35.—

Die Modelle bestehen aus dünnen versilberten Metallstäben, die durch eigenartige Scharniere miteinander verbunden sind. Sie können in jeder beliebigen Lage auf dem Ständer festgehalten werden. Der gewellte Stab, der dies ermöglicht, kann beim Ständer des Paraboloids aus dem federnden Bogen herausgenommen, durch das Modell hindurchgesteckt und hierauf wieder in den Bogen eingefügt werden.

Will man das Modell Nr. 422 umstülpen, so lege man es erst mit der einen Schar völlig in die Ebene des Tisches und achte darauf, daß an der Kehlellipse die Stabenden mit ihren Scharnieren richtig übereinander liegen.

Den Modellen wird die Abhandlung Nr. 9 beigegeben: „Bewegliche Stabmodelle zur Überführung einer Fläche 2. Ordnung in konfokale Flächen“, und außerdem bei Bezug der ganzen Reihe V b) die Abhandlung Nr. 7: „Über Flächen 2. Ordnung“.

Die Beweglichkeit dieser Stabmodelle beruht auf einem von O. HENRICI im Jahre 1873 aufgestellten Satze. Jedes Modell läßt sich durch die gegenseitige Drehung der Stäbe in alle geradlinigen Flächen einer Schar von konfokalen Flächen 2. O. überführen. Die Schwierigkeit einer dauerhaften Herstellung dieser Modelle beruhte darin, daß die Verbindung der Stäbe, die ja keine mathematischen Linien sind, außer der gegenseitigen Drehung um einen festen Punkt (in dem sich beide berühren) auch noch ein Herumwandern des Drehpunktes um den Umfang des Stabes gestatten muß. Dies geschieht durch „H. WIENERS geschränktes Verbindungsgelenk“ (D. R. G. M. 208811), das aus zwei seitlich mittels Zapfens verbundenen Hülsen besteht; in diesen Hülsen sind die eingefrästen Stäbe drehbar.



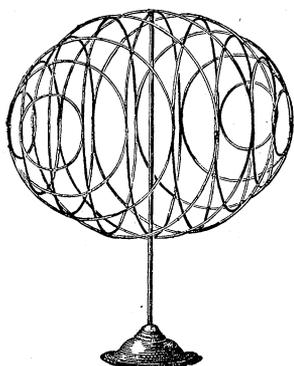
Nr. 422.

Maßstab 1:8.

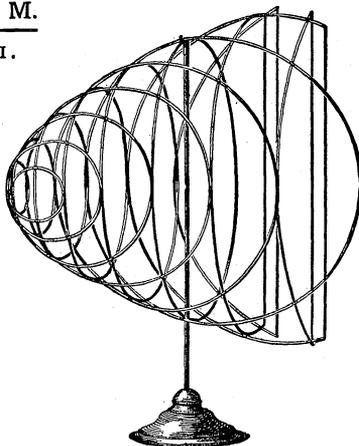
**VI. Reihe. Sechs bewegliche Drahtmodelle
der Flächen 2. O. in Kreisschnitten.**

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 6 Modelle
mit zwei Scheren und allem anderen Zubehör *M.* 255.—

D. R. G. M.
208811.



Nr. 425.



Nr. 426.

- | | |
|--|----------------|
| 425. Bewegliches Ellipsoid mit Ständer. Länge der unveränderlichen Achse 30 cm (s. die Figur) | <i>M.</i> 42.— |
| 426. Bewegliches elliptisches Paraboloid mit Ständer. Länge der unveränderlichen Achse der Begrenzungsellipse 44 cm (s. die Figur) | „ 42.— |
| 427. Bewegliches einschaliges Hyperboloid mit 2 Ständern. Länge der unveränderlichen Achse der Begrenzungsellipse 43 cm | „ 42.— |
| 428. Bewegliches zweischaliges Hyperboloid in 2 Schalen, mit Schere. Länge der unveränderlichen Achse der Begrenzungsellipse 38 cm | „ 42.— |
| 429. Beweglicher Kegel (Doppelkegel) mit Schere. Länge der unveränderlichen Achse der Begrenzungsellipse 41 cm | „ 48.— |
| 430. Beweglicher elliptischer Zylinder mit Ständer. Länge der unveränderlichen Achse 26 cm | „ 40.— |
| Nr. 427, 428 und 429 werden auch ineinander steckbar und gemeinsam beweglich geliefert, so daß der Kegel stets Asymptotenkegel der beiden Hyperboloide bleibt; die drei Modelle zusammen, mit 2 Ständern ohne Scheren | „ 125.— |
| Bei Bezug aller 6 Modelle werden die drei genannten Nummern gemeinsam beweglich geliefert und zum Einzelgebrauch zwei Scheren beigegeben. | |
| 429a. Beweglicher Kegel, einfach mit Ständer | „ 24.— |

Die Modelle stellen die mit zwei Scharen von Kreisschnitten behafteten Flächen 2. O. durch ihre Kreisschnitte dar; die Kreise sind aus 2 mm starkem Draht gefertigt und an ihren Kreuzungen durch „H. WIENERS geschränktes Verbindungsgelenk“ beweglich miteinander verbunden. Die Drähte sind versilbert, mit Ausnahme von Nr. 429 bei den drei ineinander steckbaren Modellen, wo der Asymptotenkegel durch Anwendung blanken Messingdrahtes hervor gehoben ist.

Das Ellipsoid, das Paraboloid und der Zylinder werden auf die Stange eines Ständers aufgehängt und können so in ihre verschiedenartigen Gestalten übergeführt werden. Beim einschaligen Hyperboloid werden zwei Ständer verwendet, beim zweischaligen Hyperboloid und dem zweiteiligen Kegel wird jeder Teil auf 2 Stangen aufgesetzt, während alle 4 Stangen durch eine Nürnberger Schere gemeinsame Führung erhalten. Bei den drei ineinander gesteckten Modellen übernimmt das einschalige Hyperboloid die Führung, so daß hier die Scheren wegfallen.

Die Aufhängung auf den Stangen hat stets so zu geschehen, daß die horizontale Achse der Fläche 30 cm über die Tischfläche zu liegen kommt.

AL. BRILL hat von den Flächen 2. O. Kreisschnittmodelle veröffentlicht, bei denen die beiden Kreisscharen in prismatischer Führung gegeneinander beweglich gemacht sind, indem die aus Pappe gefertigten Kreisscheiben in ihren parallelen Schnittgeraden durcheinander gesteckt sind.*) In den vorliegenden Modellen werden die Pappkreise durch solche aus Draht ersetzt, und um dies ohne Beeinträchtigung der Herstellbarkeit und der Beweglichkeit tun zu können, wird an Stelle der parallelen Drehachsen die Verbindung durch das „geschränkte Verbindungsgelenk“ (vgl. die Stabmodelle in der V. Reihe) gesetzt. Es läßt sich beweisen, daß bei Annahme unendlich dünnen Drahtes (wie er auch bei der V. Reihe vorausgesetzt werden muß) für jede Stelle und in allen Lagen die Drehung um jene parallelen Achsen durch das Gelenk geleistet wird; und bei der gewählten geringen Dicke der Drähte weicht die tatsächliche Bewegungsfähigkeit des Modells von der mathematisch geforderten nur unbedeutend ab, wie aus der zwangsfreien Beweglichkeit und der nur ganz geringen Deformation der Drahtkreise ersichtlich ist.

Ersetzt man die Kreisschnitte einer Fläche 2. O. durch das den ganzen Raum erfüllende System der beiden Parallelebenenbüschel, in denen die Kreise enthalten sind, und denkt man die Ebenen des einen Büschels gegen die des anderen um ihre parallelen Schnittgeraden drehbar gemacht, so erhält man ein räumliches System, das bei einer jeden durch diese prismatische Führung ermöglichten Veränderung zur ursprünglichen Lage affin bleibt**); daraus folgt, daß die Modelle in allen Lagen Flächen 2. Ordnung mit Kreisschnitten darstellen, wenn dies in einer einzigen Lage der Fall ist. Eine den Raum erfüllende Schar

*) Die erste Anregung zu solchen Modellen ist, wie bei den Stabmodellen der V. Reihe, auf O. HENRICI zurückzuführen. Vgl. den DYCKschen „Katalog mathematischer Instrumente“ (München 1892) S. 258.

***) L. BURMESTER. Zeitschr. für Math. u. Physik. 47. Band (1902) S. 156.

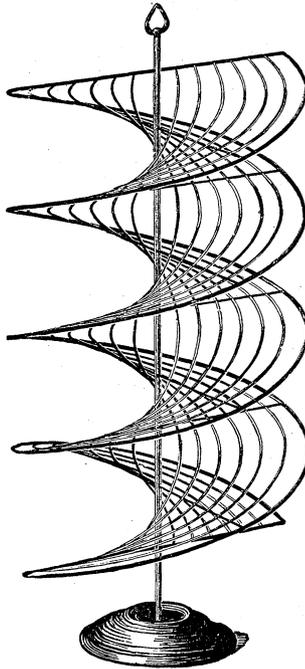
ähnlicher und ähnlich liegender Flächen 2. O. behält bei der Veränderung des Systems diese Eigenschaft, insbesondere geht ein Kegel mit der Gesamtheit aller Flächen, die ihn zum Asymptotenkegel haben, in ein ebensolches Flächensystem über. Diese Eigenschaft geben die drei vereinigten Modelle wieder. Für alle ähnliche und ähnlich liegende Flächen (bezw. für solche mit gemeinsamem Asymptotenkegel) liegen die Mitten der Kreisschnitte in zwei Geraden, und diese treffen eine jede Fläche in ihren „Kreispunkten“ (Nabelpunkten). Diese sind beim Ellipsoid und beim zweischaligen Hyperboloid in der Zahl vier, beim Paraboloid in der Zahl zwei reell, beim einschaligen Hyperboloid aber imaginär, während sie beim Kegel und Zylinder in den Doppelpunkt zusammenfallen.

Das ganze räumliche System, das in der angegebenen Weise beweglich ist, und in ihm auch die dargestellten Flächen, lassen zwei Grenzlagen zu, in denen die Ebenen beider Scharen nach der einen oder anderen Seite hin in eine einzige Ebene zusammenklappen. Die Kreise sind so gewählt, daß dabei (abgesehen von der einen Grenzlage des elliptischen Paraboloids) stets zwei Kreise von beiderlei Scharen zur Deckung kommen. Die Fläche 2. O. entartet dabei in einen reellen oder imaginären Grenzkegelschnitt, der von zwei ineinander geklappten Kreisen an den beiden Stellen berührt wird, an denen sie sich vorher kreuzten. Die Kreispunkte gelangen mit den Brennpunkten des Grenzkegelschnittes zur Deckung. Aus dem Ellipsoid (Nr. 425) entsteht so als Grenzfläche beide Male der von den Kreisen doppelt überdeckte Innenraum einer Ellipse; beim Kegel (Nr. 429) ist es das eine Mal ein durch ein reelles Geradenpaar begrenzter Winkel mit seinem Scheitelwinkel, das andere Mal überdecken die Kreise, zwei imaginäre Geraden berührend, die ganze Ebene doppelt; bei den drei vereinigt beweglichen Flächen (Nr. 427, 428, 429) wird das Geradenpaar des zusammengeklappten Kegels zum Asymptotenpaar der Grenzkegelschnitte, und man erhält somit in der ersten Grenzlage Hyperbeln, in der zweiten (wegen des imaginären Asymptotenpaares) Ellipsen. Dabei füllen im ersten Falle die doppelt berührenden Kreise des einschaligen Hyperboloids das Äußere, die des zweischaligen Hyperboloids das Innere der Hyperbeln aus, wie dies dem Imaginär- und Reellsein des Brennpunktpaares auf der einen und anderen Hyperbelachse entspricht, in die sich die Kreismitten hinein klappen. Im zweiten Fall ist die Grenzfläche des einschaligen Hyperboloids das Äußere einer reellen Ellipse, die des zweischaligen Hyperboloids die ganze doppelt überdeckte Ebene mit imaginärer Grenzellipse. Beim elliptischen Paraboloid erhält man als die eine Grenzfläche das von doppelt zählenden Kreisen überdeckte Innere einer Parabel, als zweite zwei konzentrische Kreisbüschel, deren jedes die ganze Ebene überdeckt, und deren Grenzkurve in die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte zerfällt. Beim hyperbolischen Paraboloid sind als Kreisschnittebenen diejenigen

anzusehen, die durch Erzeugende und die Achsenrichtung gelegt sind. Es tritt hier also das Modell Nr. 424 ergänzend ein; jede der beiden Grenzflächen bildet den von den Tangenten der Grenzparabel überdeckten Teil der Ebene.

In diesen Betrachtungen sind von den drei Paaren von Kreisschnittscharen der Mittelpunktsflächen (oder von den zwei Paaren beim elliptischen Paraboloid) nur die reellen erwähnt, und damit hängt es zusammen, daß für jeden Grenzkegelschnitt einer Fläche nur ein System doppelt berührender Kreise auftritt, deren Berührsehnen den Drehachsen der prismatischen Führung parallel sind. Das andere System doppelt berührender Kreise, dessen Berührsehnen auf den vorigen senkrecht stehen, gehört zu den imaginären Kreisschnitten, von denen in der Grenzlage je zwei beim Zusammenfallen reell werden.

Die geometrischen Eigenschaften der hier auftretenden imaginären Gebilde verdienen besondere Beachtung.

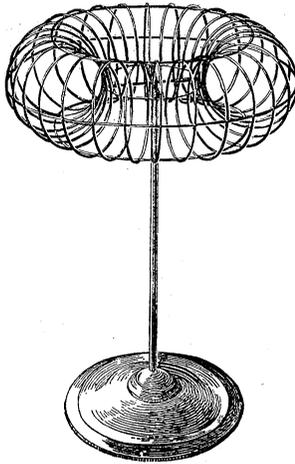


Nr. 512.

Dreh- und Schraubenflächen.

VII. Reihe. Sechs Drahtmodelle von Dreh- und Schraubenflächen.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 6 Modelle mit allem Zubehör *M.* 525.—. (Mit Einschluß von Nr. 512a *M.* 535.—.)



Nr. 501.

407. Kugel mit Parallelkreisen, nebst Holzfuß. Durchmesser 32 cm *M.* 18.—
501. Kreisring mit Meridiankreisen (s. die Figur), nebst 2 Achsen, Holzfuß und Handgriff, drehbar auf dem Fuß und der kleineren Achse stehend, sowie freihändig an der größeren Achse und dem Handgriff. Durchmesser der Meridiankreise 13 cm, größter Durchmesser 39 cm „ 50.—
503. Urne, Drehfläche einer zur Sinuslinie affinen Meridiankurve, nebst Achse, Fuß und Handgriff. Auf der Achse stehend und freihändig drehbar. Höhe 52 cm, größter Durchmesser 27 cm „ 65.—
512. Wendelfläche (gerade geschlossene Schraubenfläche) mit Haupttangentenkurven (Schraubenlinien) (s. die Figur), 2 Umgänge beiderseits der Achse, nebst Fuß und Handgriff, drehbar, Abstand der äußersten Erzeugenden 60 cm. Durchmesser 36 cm „ 100.—
- 512a. Ausschnitt aus der vorigen Fläche, ein viertel Umgang, einseitig der Achse nebst Fuß. Abstand der äußersten Erzeugenden 15 cm „ 10.—

514. **Schiefe geschlossene Regelschraubenfläche** mit Haupttangentialkurven, nebst Fuß und Handgriff, drehbar; zwei Umgänge, Höhe (zwischen den beiden Grenzebenen gemessen) 60 cm, Durchmesser 40 cm „ 175.—
515. **Schrauben-Röhrenfläche** mit Kreischnitten, nebst Fuß und Handgriff, drehbar; zwei Umgänge, Höhe (zwischen den äußersten Punkten der Kreise gemessen) 65 cm, Durchmesser der Kreise 13 cm, Durchmesser 39 cm „ 120.—
- Galgen** zum drehbaren Aufhängen der Schraubenmodelle Nr. 512, 514 und 515 an der Tafel oder dem Projektionsschirm „ 1.50

In diesen Modellen sollen die Mißstände vermieden werden, die bei Darstellung von Flächenformen durch Gipsmodelle deshalb auftreten, weil in erster Linie der Körper dargestellt wird und nur in zweiter Linie seine Oberfläche, und weil bei der Undurchsichtigkeit des Materials nur ein beschränkter, dem Auge jeweils zugewandter Teil aufgefaßt werden kann. Die Vorzüge, die bei Fadenmodellen zu Tage treten, legen es nahe, ganz allgemein Flächen durch Scharen von Linien darzustellen, die die Fläche überdecken und durch Drähte veranschaulicht werden. Eine Kugel (Nr. 407), die in dieser Weise durch Parallelkreise hergestellt war, ein Kreisring, sowie die aus Schraubenlinien gebildete zu beiden Seiten der Achse verlaufende Wendelfläche (Nr. 512) wurde von H. WIENER im Jahre 1896 anlässlich der Frankfurter Naturforscherversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vorgezeigt. Die hier vorliegenden Modelle sind im Vergleich zu den damals vorgezeigten noch insofern verbessert, als sie drehbar gemacht sind. Versetzt man nun ein solches Modell in eine (nicht zu rasche) Drehung, so bringen die blanken Messingdrähte, aus denen die Meridiankurven bestehen, einen hellen Schimmer hervor, der an den Rändern besonders glänzend und dabei völlig durchsichtig ist, und damit ist eine auch die verdeckten Teile sichtbar machende und durchaus stetige Darstellung der Flächen gewonnen.

Die Methode des Drehens läßt sich auch auf Schraubenflächen anwenden; nur scheinen sich diese in der Richtung der Achse zu verschieben.

Um die Erscheinung möglichst deutlich zu machen, wähle man die schwarze Wandtafel als Hintergrund und benütze hierzu bei den Schraubenflächen den an der Tafel aufschraubbaren „Galgen“, in den ein am oberen Ende der Achse drehbarer Ring eingehängt wird, während ein Handgriff das untere Ende drehbar aufnimmt.

Besonders schön treten die Flächenformen hervor, wenn man sie im Drehen aus einer Lichtquelle auf einen weißen Schirm Schatten werfen läßt, ein Verfahren, das sich bei verdunkelbaren Hörsälen ohne Mühe anwenden läßt, und das bei den meisten Modellen gegenüber dem bloßen Vorzeigen erhebliche Vorteile bietet.*)

Eine überraschende Erscheinung zeigt sich beim Drehen der Drehflächen, indem eine Anzahl feststehender Linien entstehen, und zwar im Schatten helle Linien, den dem Schirm zugewandten Flächenteilen

*) Man vgl. hierzu die Nr. 1 der „Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle“, B. G. Teubner in Leipzig, sowie H. WIENERS Vorträge und Bericht über die Modellausstellung in den „Verhandlungen des 3. Intern. Math.-Kongresses“ Leipzig 1905.

angehörend, im Modell selbst dunkle Linien auf seinen hinteren Teilen. Beide bilden zusammen ein System von „Verdeckungslinien“^{*)} Bei den Schraubenflächen bleiben sie zwar sich selbst kongruent, verschieben sich aber in der Richtung der Achse.

Die Wahl des Liniensystems für die Darstellung der Fläche hängt von den Eigenschaften der Fläche ab, die man hervorheben will. Parallelkreise sind nur bei der **Kugel** (Nr. 407) angewandt, da hier auf das Drehen verzichtet werden kann; es ist eine solche Schar von Parallelkreisen gewählt, deren Ebenen in gleichen Abständen aufeinanderfolgen, wie sie in den Helligkeitsstufen bei Parallelbeleuchtung auftreten. Beim senkrechten Projizieren liefern diese Kreise ähnliche und paarweise ähnlich liegende Ellipsen, die vom Umrißkreis in zwei reellen oder imaginären Punkten von außen berührt werden; den Übergang zwischen beiderlei Berührung bildet eine Ellipse, für die der Umriß ein umfassender Scheitel-Krümmungskreis ist. Bei schiefer Parallelprojektion auf eine zu den Kreisen parallele Tafel erscheinen diese als eine Schar von Kreisen, die die Umrißellipse reell oder imaginär von innen doppelt berühren; den Übergang bildet der von innen berührende Scheitel-Krümmungskreis; von Grenzgebilden treten die Brennpunkte als Nullkreise auf.

Beim **Kreisring** (Nr. 501) lassen die Meridiankreise die Linie des scheinbaren Umrisses als ihre Hüllkurve erscheinen (s. die Figur). Der innere Umriß ist ein viergespitzter Linienzug, der in allen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie abgebildet ist, aber an den bisherigen Modellen nur in seinem kleinsten Teil sichtbar war. Durch Lagenänderung der Achse gegen das Auge kommen die verschiedenen Formen dieser Kurve zur Anschauung. Die Fläche ist wegen ihrer technischen Anwendungen und wegen der Fülle schöner geometrischer Eigenschaften ein beliebter Gegenstand des Unterrichts, es gewähren z. B. die obenerwähnte Umrißlinie als Schattengrenze, ihr Schlagschatten, und die Hellegleichen der Fläche sehr einfache Konstruktionen.

Um ähnliche Aufgaben für beliebige Drehflächen zu lösen, ist das Beispiel des Kreisrings gerade wegen der Menge besonderer Eigenschaften wenig geeignet. Diesem Zwecke dienlicher ist die **Urne** (Nr. 503), eine Drehfläche, für deren Meridian eine zur Sinuslinie affine Kurve gewählt ist. Da an der Sinuslinie, und damit auch an ihrem affinen Bilde die Tangente und die Schmiegungeellipse (die die Krümmung bestimmt) für einen beliebigen Punkt leicht zu finden ist, bietet die strenge konstruktive Durchführung der obigen Aufgaben keine Schwierigkeit.

Unter den Schraubenflächen nimmt die **Röhrenfläche** (Nr. 515) eine entsprechende Stellung ein, wie der Kreisring unter den Drehflächen. Auch hier sind die Umrisse mit ihren an der Grenze zwischen vorderen

^{*)} H. WIENER, „Entwicklung geometrischer Formen“, Verhandlungen des 3. Intern. Math.-Kongresses, Leipzig 1905.

und verdeckten (im Modelle sichtbaren) Teilen auftretenden scheinbaren Spitzen zu beachten.

Eine andere Klasse von Erscheinungen sollen die beiden **Regelschraubenflächen** veranschaulichen. Für das Erfassen negativ gekrümmter Flächen im Bilde ist das System der Haupttangentialkurven (Asymptotenkurven) wichtig, die durch Aneinanderreihen aufeinanderfolgender Haupttangentialkurven entstehen, d. h. der an einer negativ gekrümmten Stelle der Fläche konstruierten Asymptoten der DUPIN'schen Indicatrix (oder anders ausgedrückt der Flächentangenten, die wenigstens drei aufeinanderfolgende Punkte mit der Fläche gemein haben). Die obenerwähnten scheinbaren Spitzen treten an solchen Stellen auf, wo eine Haupttangente durch das Auge geht; ist dies aber an einer Stelle, wo die Asymptotenkurve um den wahren Umriß herumgeht, nicht der Fall, so hat diese einen scheinbaren Wendepunkt. Der scheinbare Umriß ist also der Ort der scheinbaren Wendepunkte der Asymptotenkurven, gleichzeitig ist er aber auch Hüllkurve der Wendepunktangenten.

Auf Regelflächen (die nicht von der 2. Ordnung oder abwickelbar sind) zerfallen die Asymptotenkurven in zwei getrennte Scharen, nämlich in die Regelschar und in eine krummlinige Schar. Da die beiden Asymptotenrichtungen eines Flächenpunktes zu allen konjugierten Richtungen des Punktes harmonisch sind, kann man bei Regelflächen aus der bekannten Richtung der geraden Erzeugenden und einem (günstig gewählten) Paare konjugierter Richtungen die Richtung der krummen Asymptotenlinie und damit die Richtungen aller konjugierten Paare finden; daraus ergeben sich mancherlei Anwendungen auf die Konstruktion von Schattengrenzen, Hellegleichen und auf ähnliche Aufgaben.

Auf der **Wendelfläche** (Nr. 512) treten als Haupttangentiallinien neben der (zur Achse senkrechten) Regelschar die Schraubenlinien auf, die zugleich Bahnlinien bei der Erzeugung der Fläche durch Schraubung sind. Im Modell erscheinen diese Kurven für ein unendlich fernes Auge als eine Schar von Zykloiden, und zwar scheidet eine Schraubenlinie, die als gespitzte Zykloide erscheint, zweierlei Gebiete, deren eines verschlungene, das andere geschweifte Zykloiden zum Bilde hat; die Wendepunkte selbst sind die obenerwähnten Punkte des scheinbaren Umrisses, der seinerseits eine gespitzte Zykloide von halber Höhe und halber Ganglänge ist. Sein Urbild auf der Fläche, d. h. der wahre Umriß, ist eine Schraubenlinie ganz anderer Art als die genannten; sie gehört der Schar von Schraubenlinien an, die durch Drehzylinder mit einer in die Achse fallenden Erzeugenden ausgeschnitten werden, und die zur Ganghöhe die halbe Ganghöhe der Schraubenfläche haben. Eine solche Kurve in zwei Umgängen ist dem Modell beigegeben und kann durch die Achse durchgesteckt werden.

Ein **Ausschnitt der Wendelfläche** (Nr. 512a) soll die Steigung der Bahnschraubenlinie in ihrer Abhängigkeit vom Radius veranschaulichen.

Die **schräge geschlossene Schraubenfläche** (Nr. 514) besitzt als krumme Haupttangentiallinien eine Schar kongruenter Kurven, deren senkrechte Projektion auf die zur Achse senkrechten Ebenen hyperbolische Spiralen sind, wie sich geometrisch unmittelbar aus der vorhin erwähnten Konstruktion der zweiten Haupttangentialrichtung eines Punktes ergibt. Die Haupttangentialkurve selbst liegt auf einer Drehfläche, die die Schraubenachse zur Drehachse und eine Hyperbel zur Meridianlinie hat, wobei die eine Hyperbelasymptote mit der Drehachse, die andere mit der Erzeugenden der Schraubenfläche zusammenfällt. Die Haupttangentialkurve windet sich aus der Richtung jener Erzeugenden kommend und immer steiler werdend unendlich oft um die Schraubenachse, der sie sich asymptotisch nähert.

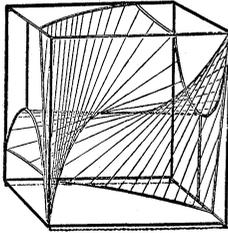
Im Modell sind die geraden Erzeugenden, in ein Achtel Umdrehung aufeinander folgend, durch die Achse durchgeführt, so daß ein oberer Mantel der Fläche mit einem unteren an der Achse stetig zusammenhängt. Als äußere Begrenzung ist eine Schraubenlinie gewählt, in der sich beide Mäntel durchsetzen, während eine zweite solche Schraubenlinie, durch einen aufgelegten Draht bezeichnet, im Innern verläuft; beide zusammen begrenzen ein Stück des Modells, das eine scharfgängige Schraube darstellen kann.

Die Haupttangentialkurven sind gleichfalls in Abständen von ein Achtel Umdrehung auf beiden Mänteln angebracht, zum Teil an der Randschraubenlinie beginnend, zum Teil aus den Archimedischen Spiralen herauswachsend, durch die die Schraubenfläche noch unten und oben begrenzt wird. In der Nähe der Achse verdichten sich die Kurven, so daß sie in einem gewissen Abstand von der Achse abgebrochen werden mußten.

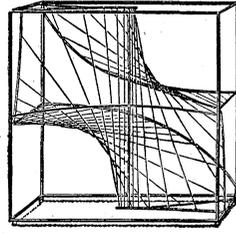
Um beiderlei Linien deutlich zu unterscheiden sind die Erzeugenden durch rote Farbe hervorgehoben, während die Haupttangentialkurven aus blankem Messingdraht gefertigt sind.

Raumkurven.

VIII. Reihe. Sechzehn Fadenmodelle der Singularitäten von Raumkurven.



Nr. 321.



Nr. 329.

Diese Modelle sind auf Anregung von Prof. Dr. H. WIENER berechnet und konstruiert vom Stud. der Mathematik J. HÖRLEIN.

Die Reihe stellt Raumkurven durch die abwickelbaren Flächen ihrer Tangenten dar, und zwar in 16 Modellen die acht Fälle von Singularitäten, die an einer Stelle einer Raumkurve auftreten können, je nachdem der Punkt, die Tangente und die Schmiegungeebene ein fortschreitendes oder ein rückkehrendes Element ist, und ferner für die viererle-Lagen dieser Stelle gegen das unendlich Ferne, je nachdem

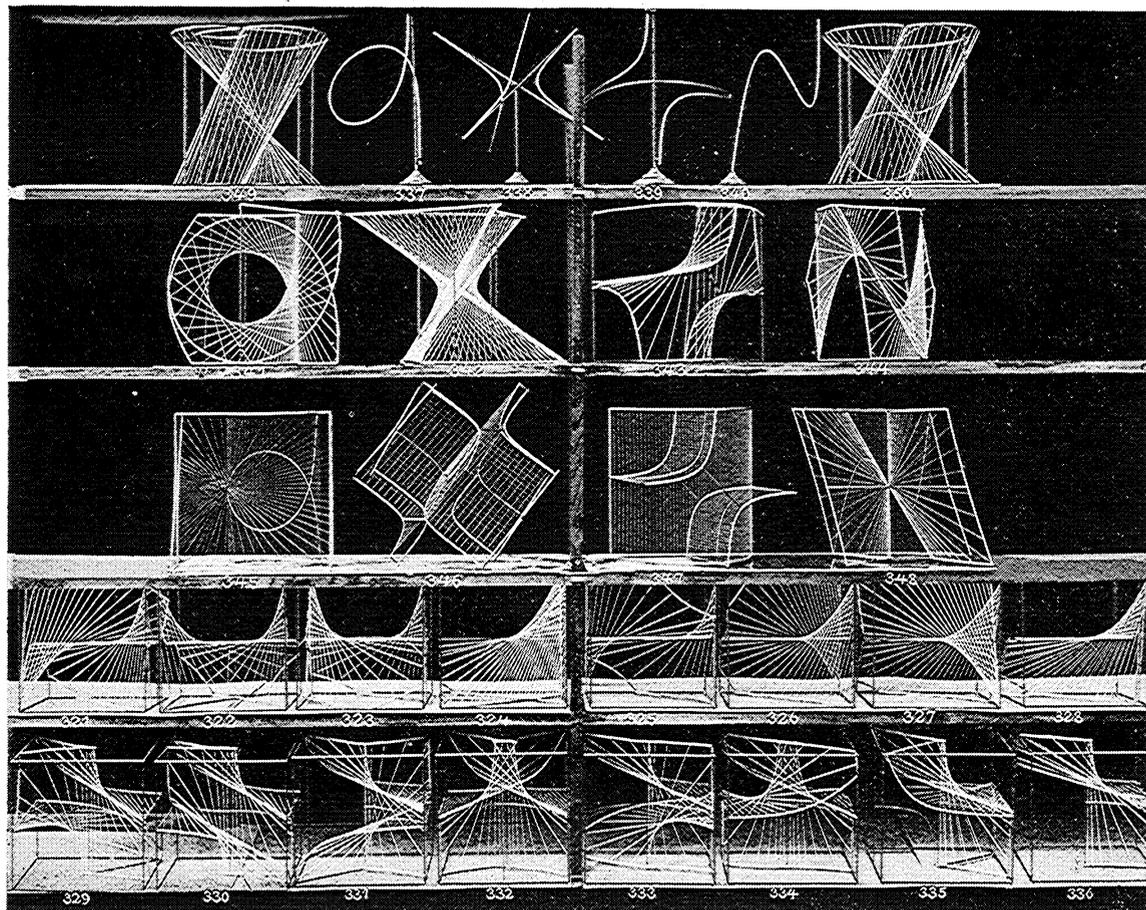
- 1) der Punkt (mit seiner Tangente und Schmiegungeebene) endlich ist;
- 2) der Punkt unendlich fern ist, während seine Tangente (und damit auch seine Schmiegungeebene) ins Endliche reicht;
- 3) die Tangente (und damit auch der Punkt) unendlich fern ist, während seine Schmiegungeebene ins Endliche reicht;
- 4) die Schmiegungeebene (und damit auch der Punkt und die Tangente) unendlich fern ist.

In jedem Modell sind an zwei Stellen I und II je einer der 8 Fälle veranschaulicht, wobei die beiden Stellen duale Singularitäten besitzen. Die ersten acht Modelle (Gruppe A, Nr. 321 bis 328) geben die Lage 1) und 4) an der Stelle I und II wieder, die weiteren acht die Lage 2) und 3) an der Stelle I und II.

Der Preis beträgt

für jedes Modell der Gruppe A	<i>M.</i> 40.—
„ „ „ „ „ B	„ 45.—
„ je 4 Modelle „ „ A	„ 155.—
„ „ 4 „ „ „ B	„ 175.—
„ alle 16 Modelle	„ 660.—

Die Größe jedes Modells ist 24 cm im Würfel'



Maßstab 1:14.

H. Wieners Sammlung, Reihe VIII u. IX.

Bezeichnet man*) das Fortschreiten eines Elementes mit —, das Rückkehren mit +, so sind die 8 Fälle in der folgenden Tabelle enthalten, von der jedes Feld das Zeichen des Punktes, der Tangente und der Schmiegungeebene (in dieser Reihenfolge) enthält:

Gruppe A, Nr.	321	322	323	324	325	326	327	328
Gruppe B, Nr.	329	330	331	332	333	334	335	336
Stelle I	---	---+	-+-	+--	-++	+--+	++-	+++
Stelle II	---	+--	-+-	---+	++-	+--+	-++	+++

Das erste Modell jeder Gruppe (321 und 329) stellt eine singularitätenfreie Raumkurve dar, die drei folgenden zeigen an jeder der beiden Stellen eine Rückkehrschmiegungeebene oder eine Rückkehrtangente oder einen Rückkehrpunkt. Diese 4 Modelle jeder Gruppe geben also die wichtigsten Vorkommnisse an. In den folgenden drei Modellen sind zwei und im letzten drei Rückkehrelemente gehäuft.

Die Raumkurve ist durch eine Folge von Tangenten, also durch ihre abwickelbare Fläche dargestellt, bei der zweiten Gruppe ist die geradlinige Asymptote der Stelle I und eine asymptotische ebene Parabel (zweiter oder höherer Ordnung) der Stelle II hinzugefügt; für letztere ist der Schnitt der Schmiegungeebene des unendlich fernen Punktes II mit dem Zylinder gewählt, durch den die Kurve in der Richtung des unendlich fernen Punktes I projiziert wird.

Als Begrenzung ist ein Würfel gewählt, in dessen Mitte bei der ersten Gruppe der Punkt I gesetzt ist, während seine Tangente und Schmiegungeebene parallel einer Seite und Kante des Würfels gestellt ist. Bei der zweiten Gruppe ist die Asymptote der Stelle I und die dazu senkrecht gestellte asymptotische Schmiegungeebene der Stelle II parallel einer Kante und einer Seite des Würfels gestellt, ihr Schnittpunkt ist in die Mitte des Würfels gesetzt.

Der Grenzwürfel ist durch seine Kanten in schwarzem Draht angegeben, seine Schnittlinien mit der abwickelbaren Fläche in blanken Messingdrähten, die durchbohrt sind und die Fäden zur Darstellung der Tangenten tragen. Die Doppelkurven der abwickelbaren Fläche sind in dünnem blanken Messingdraht, und die geradlinigen und parabolischen Asymptoten der zweiten Gruppe in roten Drähten eingefügt.

Um den Verlauf einer Raumkurve zu verdeutlichen, ist keine Darstellung so geeignet, wie ein Fadenmodell ihrer abwickelbaren Tangentenfläche.***) Denn an einem solchen Modell tritt außer den Tangenten selbst in der scharfen Schneide der Fläche die Punktcurve deutlich hervor, während die durch je zwei aufeinanderfolgende (unendlich nahe gedachte) Tangenten gelegten Ebenen, die Schmiegungeebenen angeben und so die Raumkurve als Hüllkurve ihrer Schmiegungeebenen erscheinen lassen.

*) Nach v. STAUDT, Geometrie der Lage S. 110. Die umgekehrte Bezeichnung hat CHR. WIENER, Lehrbuch der darst. Geom. I. Band S. 214 gewählt, jedoch spricht für die erstere, daß — 1 die Charakteristik der Spiegelung ist, auf die es, wie im folgenden gezeigt wird, hier ankommt.

**) In der Sammlung des Lehrstuhles der darstellenden Geometrie zu Karlsruhe finden sich außer den bekannten Drahtmodellen der Singularitäten von Raumkurven eine zugehörige Reihe von Fadenmodellen, die CHR. WIENER durch seine Schüler hat herstellen lassen. Ferner hat BJÖRLING in Lund eine Reihe solcher Modelle veröffentlicht. Beide Reihen beschränken sich auf Darstellung einer endlich gelegenen Stelle und weichen auch in der Ausführung wesentlich von den hier gegebenen ab.

Dieser Vorteil aber tritt weit mehr als bei den im Endlichen verlaufenden Kurventeilen bei solchen hervor, die sich ins Unendliche erstrecken. Denn rückt (Gruppe B) der Punkt ohne seine Tangente und Schmiegungebene ins Unendliche, so ist seine Tangente (Asymptote) eine Erzeugende der im Endlichen zu verfolgenden abwickelbaren Fläche und nur die Schneide der Fläche geht, jener Erzeugenden sich asymptotisch nähernd, ins Unendliche. Rückt aber auch die Tangente ins Unendliche, während die Schmiegungebene im Endlichen bleibt, so kann an dieser der Verlauf der Fläche ohne weiteres verfolgt werden und der der Kurve insofern, als jene Schmiegungebene aus der abwickelbaren Fläche eine Parabel (zweiter oder höherer Ordnung) ausschneidet, der sich die Kurve asymptotisch nähert*), während sich die Schmiegungebene des hinausrückenden Punktes in die des unendlich fernen Punktes hineindreht.

Am schwierigsten ist es (Gruppe A, Stelle II), sich von dem Verlauf einer Raumkurve Rechenschaft zu geben, wenn an der betrachteten Stelle außer dem Punkte und der Tangente auch die Schmiegungebene ins Unendliche rückt. Da die in dieser Ebene sich anschmiegende Kurve selbst ins Unendliche fällt, muß man zur Untersuchung des Verlaufes durch weitere der unendlich fernen Stelle benachbarte Elemente eine anschmiegende Kurve legen; dies wird dann eine Raumkurve sein. Die Modelle der Gruppe A enthalten Kurven, die als solche anschmiegende Raumkurven einfachster Art aufzufassen sind, und es ist zu zeigen, wie an ihnen der Verlauf ins Unendliche verfolgt werden kann: Man bringe zuerst die Richtung des unendlich fernen Punktes und die Stellung seiner unendlich fernen Tangente in eine bequem zu verfolgende Lage, erstere etwa vertikal aufsteigend, letztere sich vertikal von vorn nach hinten erstreckend (vgl. die Figur Nr. 321). Hierauf denke man sich durch die Raumkurve einen Zylinder (zweiter oder höherer Ordnung) gelegt, dessen Erzeugende nach dem unendlich fernen Punkte der Raumkurve, also vertikal gerichtet sind. Diesen Erzeugenden nähern sich die nach beiden Seiten hinauswandernden Tangenten asymptotisch, wie man im Modell an den beiden äußersten Teilen der abwickelbaren Fläche leicht verfolgen kann, und vereinigen sich im Unendlichen in der durch jene vertikale Ebene angegebenen Stellung, also in der unendlich fernen Erzeugenden des Zylinders.

Die in den Modellen wiedergegebenen Raumkurven können als einfachste ihrer Art bezeichnet werden, weil sie rationale Kurven niedrigster Ordnung sind, die an einer Stelle eine vorgeschriebene Singularität und an einer zweiten die dazu duale enthalten, zwischen beiden aber völlig singularitätenfrei verlaufen, und weil sie ferner ein größtes Maß von Symmetrie besitzen.

Durch die Art der Symmetrie erhält man aber ein einfaches, und wie es scheint, bisher nicht beachtetes Merkmal zur Unterscheidung der

*) In den Modellen ist als parabolische Asymptote eine andere gewählt (vgl. oben), die bei der Besonderheit der gewählten Raumkurven dasselbe leistet, wie die hier erwähnte.

acht Fälle. Man gehe zunächst, wie dies auch sonst geschieht, von drei Ebenen aus, von denen die eine die Schmiegungeebene der betrachteten Stelle ist, während die zweite durch die Tangente und die dritte durch den Punkt hindurchgeht. Diese drei Ebenen, die man, um nicht auf schiefe Symmetrien geführt zu werden, paarweise zueinander senkrecht annehme, teilen den Raum in Oktanten, aus deren einem kommend die Kurve in die Stelle einläuft, während ihr Fortschreiten aus der Stelle heraus gleichfalls in irgendeinem der Oktanten erfolgen kann. Dieser letztere Oktant kann achterlei Lagen gegen den ersten haben, und damit erhält man die 8 Fälle. Nun geht aber der erste Oktant, wenn er nicht gerade mit dem zweiten identisch ist, in ihn über durch eine Spiegelung entweder an einer der drei Ebenen, oder an einer der drei Schnittgeraden, oder an ihrem Schnittpunkt. Von diesen sieben Spiegelungen sind die an Punkt, Tangente und Schmiegungeebene ausgezeichnet, und die anderen vier lassen sich als Folge von je zwei dieser drei Spiegelungen oder von allen dreien darstellen. Indem man z. B. an Punkt, Tangente und Schmiegungeebene spiegelt (gleichviel in welcher Reihenfolge) erhält man die Lage des zweiten Oktanten zum ersten, die einer singularitätenfreien (gewöhnlichen) Stelle entspricht. Allgemein gilt der Satz, daß an der betrachteten Stelle dasjenige der drei Elemente Punkt, Tangente, Schmiegungeebene eine Rückkehr hat, das in dieser Spiegelfolge nicht benützt ist, und dasjenige ein Fortschreiten, das benützt ist.*)

In den Modellen sind die Raumkurven so gewählt, daß nicht nur die Oktanten, sondern auch die beiden Teile der Raumkurve selbst in der verlangten Weise ineinander gespiegelt werden, beim achten Fall (Nr. 328), in dem die Kurve an der betrachteten Stelle eine Rückkehr des Punktes, der Tangente und der Schmiegungeebene vereinigt zeigt, läuft die Kurve in denselben Oktanten zurück, aus dem sie kommt.

Da im projektiven Sinne die Spiegelung an einem Punkt oder an einer Ebene oder an einer Geraden eine harmonische Spiegelung an diesem Element und an der unendlich fernen Ebene oder an dem zur Ebene in senkrechter Richtung unendlich fern gelegenen Punkte oder an der zur Geraden in senkrechter Stellung unendlich fern gelegenen Geraden bedeutet, so folgt aus der gewählten Lage der dreierlei Elemente beider Stellen, daß an II die duale Singularität herrschen muß zu der an I.

In der Gruppe A bilden die Punkte der Stellen I und II Ecken, die Tangenten Gegenkanten, die Schmiegungeebenen Seiten eines Tetraeders, von dem eine Seite unendlich fern liegt. Bildet man dieses Tetraeder kollinear in sich ab, so daß die Punkte der Stellen I und II ins Unendliche fallen, so erhält man aus den 8 Fällen der Gruppe A die der Gruppe B. Auch diese zeigt, abgesehen vom letzten Fall, die Kurven in symmetrischen Gestalten.

*) Vgl. H. WIENER in den Verh. des III. Int. Math. Kongr. a. a. O. Zusatz II.

Die Kurvengleichungen für die Gruppe A, bezogen auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, das den Punkt I zum Nullpunkt, seine Tangente zur x-Achse, seine Schmiegungeebene zur Ebene $z = 0$ und 1 cm als Längeneinheit auf jeder Achse hat, wobei $t = 0$ die Stelle I bedeutet, lauten:

Nr. 321:	$x = 12t,$	$y = 12t^2,$	$z = 12t^3$
„ 322:	$x = 12t,$	$y = 12t^2,$	$z = 12t^4$
„ 323:	$x = 12t,$	$y = 12t^3,$	$z = 12t^4$
„ 324:	$x = 12t^2,$	$y = 12t^3,$	$z = 12t^4$
„ 325:	$x = 12t,$	$y = 12t^3,$	$z = 12t^5$
„ 326:	$x = 12t^2,$	$y = 12t^3,$	$z = 12t^5$
„ 327:	$x = 12t^2,$	$y = 12t^4,$	$z = 12t^5$
„ 328:	$x = 12t^2,$	$y = 8t^4 + 2t^5 + 2t^6,$	$z = 9t^6 + \frac{3}{2}t^7 + \frac{3}{2}t^8.$

Durch eine räumliche Kollineation gehen diese Kurven, wie oben erwähnt, in die der Gruppe B über.

IX. Reihe: Raumkurven dritter Ordnung.

14 Modelle zusammen *M* 600,—.

Eine zugehörige Abhandlung wird nach ihrem Erscheinen den Abnehmern der Modelle frei zugestellt.

- Gruppe A: Die Kurve mit ihren Asymptoten.** 4 Drahtmodelle zusammen *M* 45,—
- Nr. 337. Räumliche Ellipse *M* 12,—
Nr. 338. Räumliche Hyperbel „ 16,—
Nr. 339. Räumliche hyperbolische Parabel „ 16,—
Nr. 340. Räumliche Parabel „ 6,—
- Gruppe B: Die abwickelbare Tangentenfläche.** 4 Fadenmodelle zusammen „ 225,—
- Nr. 341. Räumliche Ellipse *M* 60,—
Nr. 342. Räumliche Hyperbel „ 60,—
Nr. 343. Räumliche hyperbolische Parabel „ 60,—
Nr. 344. Räumliche Parabel „ 50,—
- Gruppe C: Die Kurve als teilweiser Schnitt von Kegeln** (bzw. Zylindern). 4 Fadenmodelle mit Drahtkurven zusammen . . „ 235,—
- Nr. 345. Räumliche Ellipse: Ellipt. Zylinder und Kegel . *M* 60,—
Nr. 346. Räumliche Hyperbel: Drei hyperbol. Zylinder . „ 60,—
Nr. 347. Räumliche hyperbolische Parabel: Hyperbolischer und parabolischer Zylinder „ 60,—
Nr. 348. Räumliche Parabel: Parabol. Zylinder u. Kegel „ 60,—
- Gruppe D: Die beiden dualen Erzeugungen der Kurve** (ihre abwickelbare Fläche und ein Schmiegunstetraeder). 2 Fadenmodelle mit Drähten zusammen „ 120,—
- Nr. 349. Schnitt zweier Kegel mit gemeins. Erzeugender. *M* 65,—
Nr. 350. Eingehüllte d. Ebenen, die 2 Kegelschnitte mit gemeinsamer Tangente berühren „ 60,—

Die Raumkurven 3. Ordnung stehen als Raumkurven der niedrigsten Ordnung den ebenen Kegelschnitten an Wichtigkeit und in mancherlei Eigenschaften nahe. In drei von den vier Gruppen dieser Reihe werden die vier Kurvenarten behandelt, die durch das Verhalten gegen das Unendliche zu unterscheiden sind: die (kubische räumliche) Ellipse, die Hyperbel, die hyperbolische Parabel und die Parabel. Während die Gestalt der Kurve an und für sich, wie auch in ihren Projektionen am deutlichsten in Drahtkurven hervortritt (Gruppe A), die sich im ersten und zweiten Fall an eine bzw. drei geradlinige Asymptoten, im dritten Fall an eine geradlinige und

an eine parabolische Asymptote annähert, geben die in Fadenmodellen dargestellten abwickelbaren Tangentenflächen Aufschluß über die Lagen der Tangenten und Schmiegungebenen (Gruppe B). Außerdem ist es von Wert, die Kurve, die ja aus jedem ihrer Punkte durch einen Kegel zweiter Ordnung projiziert wird, als Schnitt wenigstens zweier solcher Kegel entstehen zu sehen (Gruppe C), und als solche sind jeweils die mit unendlich ferner Spitze, d. h. die projizierenden Zylinder gewählt, denen im ersten und letzten Fall ein solcher mit im Endlichen gelegener Spitze hinzuzufügen war.

Dienen diese 12 Modelle im wesentlichen der Darstellung der gestaltlichen Verhältnisse, so führen die beiden letzten (Gruppe D) in die Theorie der Raumkurven 3. Ordnung ein. Hier ist die Kurve in der zuletzt erwähnten Art als Schnitt zweier Kegel erzeugt, die eine Gerade gemein haben, und dieser Erzeugung ist die andere dual gegenübergestellt, nämlich durch zwei Kegelschnitte (Drahtellipsen), die eine Tangente gemein haben, und deren gemeinsam berührende Ebenen die Raumkurve einhüllen. In beiden Modellen ist die Tangentenfläche und das durch die zwei Kegelspitzen bzw. die Ebenen der beiden Ellipsen bestimmte Schmiegungetetraeder (aus Draht gefertigt) hinzugefügt, d. i. ein Tetraeder, von dem zwei Kurvenpunkte mit ihren Tangenten und Schmiegungebenen sechs Stücke bilden, nämlich zwei Ecken, zwei Kanten und zwei Seiten. Dadurch tritt die Lage jener beiden Kegel bzw. der beiden Ellipsen (die man auch als Oskulanten der Raumkurve bezeichnet) zu den beiden gewählten Punkten, ihren Tangenten und Schmiegungebenen deutlich hervor. Weiterhin bilden die beiden Tangenten ein Paar von Gegenkanten des Tetraeders; die Sehne, die die beiden Punkte verbindet, und die Achse, in der sich die beiden Schmiegungebenen schneiden, bilden ein zweites Paar; die beiden letzten Kanten aber sind ein Spiegelachsenpaar der Raumkurve, d. h. die Achsen einer windschiefen Spiegelung (einer geschart-perspektiven involutorischen Kollineation), die die Raumkurve in sich überführt. Solche Spiegelachsenpaare zeigen ein vollständiges Entsprechen mit den als Pol und Polaren einander zugeordneten Elementen eines ebenen Kegelschnittes, mit denen sie auch die Mannigfaltigkeit (∞^2) gemein haben.

In den Gruppen A bis C sind für die entsprechenden Modelle übereinstimmende Kurven gewählt, und zwar solche mit einer und im zweiten Fall sogar mit drei achsigen Symmetrien, so daß diese Kurve (die Hyperbel) durch sechs Drehungen einer Doppelpyramidengruppe in sich übergeht.

Die kubische Hyperbel läßt in diesem speziellen Fall eine besonders einfache Erzeugung zu, die zu einer elementaren Konstruktion auch der drei übrigen Gestalten der Raumkurve 3. Ord. hinüberführt. Bekanntlich hat J. STEINER von derjenigen ebenen Kurve 3. Ord., die als eine gespitzte Hypozykloide entstehen kann, eine große Anzahl wichtiger Eigenschaften zusammengestellt. Unsere kubische Hyperbel bildet nun in vielen Beziehungen ein räumliches Gegenstück zu der STEINERSCHEN Kurve, wie man aus der folgenden Erzeugung dieser Kurve ersieht, die an eine Eigenschaft

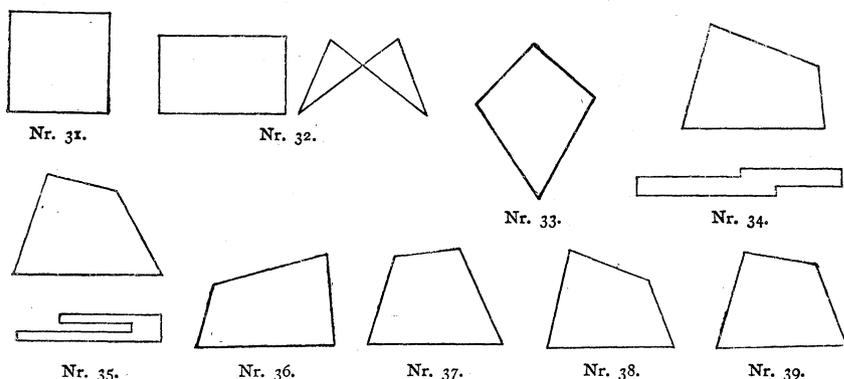
der Hypozykloide erinnert: Um die Achse einer Drehregelfläche (eines einschaligen Drehhyperboloids) drehe sich eine Gerade der einen Schar mit gleichförmiger Drehgeschwindigkeit und gleichzeitig eine entsprechende Gerade der anderen Schar im entgegengesetzten Sinn mit der doppelten Drehgeschwindigkeit, dann schneiden sich je zwei entsprechende Geraden in den Punkten einer kubischen Hyperbel. Da die Kurve nicht nur von der dritten Ordnung sondern auch von der dritten Klasse ist, so läßt sie gleichzeitig die dual entsprechende Erzeugung zu. Es gehen nämlich ihre Schmiegungebenen durch je zwei entsprechende Geraden einer zweiten Drehregelfläche, die auf die gleiche Weise aufeinander bezogen sind. Durch affine Abbildung gelangt man von der Sonderkurve zur allgemeinen kubischen Hyperbel.

Diese Konstruktionen weisen überhaupt auf eine nicht projektive Erzeugung der Raumkurven 3. Or.1. hin, und in der Tat findet man auch für die drei anderen Gestalten entsprechende Konstruktionen; dabei ergeben sich ähnliche Unterschiede, wie bei den nicht projektiven Konstruktionen der ebenen Ellipse, Hyperbel und Parabel aus ihren konjugierten Durchmessern (s. „Abhandlungen“ 1. Heft S. 62 ff.).

Gelenksysteme.

X. Reihe: Gelenkvierecke.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 10 Modelle \mathcal{M} 60,—.



Schema der Gelenkvierecke (Maßstab der Stablängen 1 : 25).

Einzelpreise: Modell Nr. 31 \mathcal{M} 6,—; Nr. 32—39 jedes Modell \mathcal{M} 5,50. Der Halter mit Klammern, Führungsstift und Kurvenzeichner \mathcal{M} 12,—. Nr. 40 \mathcal{M} 7,—.

Die Modelle 31—39 sind aus Birnbaumholz gefertigt. Nr. 40 aus Metallstäben mit eingespannten Fäden.

Eine zugehörige Abhandlung wird nach ihrem Erscheinen den Abnehmern der Modelle frei zugestellt.

A. Die Gelenkvierecke.

I. $D = 0$, $D' = 0$, $D'' = 0$. Gelenkviereck mit gleichzeitigem Durchschlag aller vier Gelenke auf drei Weisen (vgl. unten).

31. **Rhombus.** Die eine Weise geknickt in allen vier Gelenken (alle vier Stäbe lassen sich aufeinanderklappen), die beiden anderen Weisen gemischt.

II. $D = 0$, $D' = 0$, $D'' \neq 0$. Gelenkvierecke mit gleichzeitigem Durchschlag aller vier Gelenke auf zwei Weisen.

32. **Parallelogramm und Zwillings.** Beide Weisen gemischt.

33. **Gleichschenkliges Viereck.** Die eine Weise geknickt in allen vier Gelenken, die andere gemischt.

III. $D = 0$, $D' \neq 0$, $D'' \neq 0$. Gelenkvierecke mit gleichzeitigem Durchschlag aller vier Gelenke auf nur eine Weise.

34. **Kreistangentenviereck** mit gemischtem gleichzeitigem Durchschlag.

35. **Kreistangentenviereck** mit gleichzeitigem geknicktem Durchschlag.

IV. $D < 0$.

- 36 u. 37. **REULEAUX Fall.** Die an der kürzesten Seite anliegenden Gelenke bilden Kurbeln, die beiden anderen Schwingen.

V. $D > 0$.

- 38 u. 39. **GRASHOFS Fall.** Alle vier Gelenke sind Schwingen, die an der längsten Seite anliegenden haben einen geknickten, die beiden anderen einen [gestreckten] Durchschlag.

In Nr. 36 und 38 liegen die längste und eine mittlere Seite einander gegenüber und sind als Steg zu benutzen, in Nr. 37 und 39 die längste und die kürzeste Seite.

HALTER UND KURVENZEICHNER. Zur Verdeutlichung der verschiedenartigen Vorgänge an „Kurbeln“ und „Schwingen“, bei „gestrecktem“ und „geknicktem Durchschlag“ (s. u.), sowie des gleichzeitigen Durchschlagens aller vier Gelenke wird ein Stab des Gelenkvierecks als „Steg“ festgehalten, und mit dem gegenüberliegenden, der „Koppel“, werden die möglichen Bewegungen ausgeführt. Dazu dient der am Tisch oder an der Wandtafel festzuschraubende Halter, der an einem Querbalken zwei Federn trägt, in die jedes der neun Gelenkvierecke eingespannt werden kann. Damit die Bewegung ungehindert vor sich gehen kann, müssen die drei übrigen Glieder des Gelenkvierecks vor dem eingespannten Gelenk liegen; dies ist bei jedem auf zwei Arten möglich. Der Kurvenzeichner dient dazu, Koppelkurven mit Kreide auf die Wandtafel zu zeichnen. Die Kreide steckt in einer Hülse, die an dem Gelenk zweier gelenkig verbundener Stäbe befestigt ist, während diese an die Endpunkte der Koppel eines jeden der neun Modelle angeschraubt werden können.

B. Anhang.

40. **Gelenkrhombus**, parallel den Seiten mit roten und gelben Fäden gespannt. Dieses Modell gehört in den Unterricht der Darstellenden Geometrie und dient zur Darstellung der Ebene im Grund- und Aufrißverfahren. Zwei Seiten des Rhombus werden in die beiden miteinander senkrecht verbundenen Tafeln hineingelegt, dann zeigen die Fäden die Hauptlinien (Spurparallelen, Tafelparallelen) erster und zweiter Art, und zwar in den beiden Fällen, wo man im Grund- und Aufriß auf dieselbe oder auf verschiedene Seiten der Ebene sieht. Unter Festhalten der einen Spur kann die Ebene stetig aus der Lage des ersten Falles in die des zweiten übergeführt werden.

Zur Theorie der Gelenkvierecke.

Das Gelenkviereck, das eines der einfachsten zwangsläufigen Gelenksysteme ist, wird von REULEAUX als „das wichtigste Getriebe“ bezeichnet. Über seine Wirkungsweisen lassen sich einige bemerkenswerte aber auf ganz elementaren Überlegungen beruhende Sätze aufstellen, die zur Unterscheidung der in der obigen Übersicht angegebenen Fälle führen. Wenn die beiden in einem Gelenk zusammenstoßenden Stäbe (Glieder) in eine Gerade fallen, so sei dies als ein Durchschlag dieses Gelenkes bezeichnet, und zwar als gestreckter oder geknickter Durchschlag, je nachdem die beiden Stäbe einen gestreckten Winkel oder den Winkel null miteinander bilden. Kommen nun an einem Gelenk des Gelenkvierecks beiderlei Durchschläge vor, so nennt man das Gelenk eine Kurbel, im anderen Fall eine

Schwinge. Dem von REULEAUX allein betrachteten Fall, daß ein Gelenkviereck an zwei Nachbargliedern eine Kurbel, an den beiden anderen eine Schwinge besitzt (Nr. 36 u. 37), stellt GRASHOF einen zweiten Fall gegenüber, bei dem alle vier Gelenke Schwingen bilden (Nr. 38 u. 39). Der erste Fall tritt nach GRASHOF ein, wenn die Summe der Längen des längsten und kürzesten Gliedes kleiner, der zweite Fall, wenn sie größer ist als die Summe der beiden mittleren Gliedlängen. GRASHOF hat einen für den REULEAUXschen Fall geltenden Satz aufgestellt, der ergänzt und auf den GRASHOFschen Fall erweitert hier so ausgesprochen werden soll, daß er eine Übersicht über alle möglichen Lagen von beiderlei Gelenkvierecken gewährt:

1. Im REULEAUXschen Fall sind die beiden Gelenke, die dem kürzesten Glied anliegen, Kurbeln, die beiden anderen Schwingen ohne Durchschlag.
2. Im GRASHOFschen Fall sind die beiden Gelenke, die dem längsten Glied anliegen, Schwingen mit geknicktem Durchschlag, die beiden anderen Schwingen mit gestrecktem Durchschlag.

Außerdem unterscheiden sich die Fälle dadurch, daß im ersten zu jeder einmal erreichten Lage des Gelenkvierecks auch die symmetrische Lage vorkommt, im zweiten Fall aber nicht.

Die erwähnten Sätze enthalten weder etwas über die Reihenfolge, in der die Glieder ihrer Größe nach geordnet sind, noch auch etwas darüber, welches von den Gliedern festgehalten werden soll, welche Glieder an dieses anschließen, und welches ihm gegenüberliegt, während für die Maschinenlehre eine solche Festsetzung wichtig ist und in der Benennung dieser Glieder als „Steg“, „Arme“ und „Koppel“ ihren Ausdruck findet.

Die Unterscheidung der beiden Fälle weist auf den Sonderfall hin, in dem die Summe zweier Gliedlängen gleich der Summe der beiden andern ist. Das Viereck erhält dann einen gleichzeitigen Durchschlag aller vier Gelenke¹⁾, und man hat dabei zwei Unterfälle zu unterscheiden, weil der gleichzeitige Durchschlag aller vier Gelenke entweder an allen vieren geknickt oder bei zweien (und zwar gegenüberliegenden) geknickt, bei den anderen gestreckt sein kann (gemischter gleichzeitiger Durchschlag). Die hierbei entstehenden Vierecke, mit deren gelenkiger Veränderung sich schon J. STEINER beschäftigt hat (Gesammelte Werke, 2. Bd., S. 383), sind Kreistangentenvierecke. STEINER unterscheidet drei Fälle, von denen aber zwei in allen ihren Lagen und Übergängen übereinstimmen, also nicht zu unterscheiden sind, und außerdem fehlt bei ihm ein allgemein geltendes Verfahren für die Bestimmung des Mittelpunktes des den vier Seiten eingeschriebenen Kreises. Ein solches liefert der Satz: Je nachdem ein Gelenk in der Lage des gleichzeitigen Durchschlags einen geknickten oder gestreckten Durchschlag hat, halbiere man in beliebiger Lage den Winkel zwischen den Gliedern des Gelenkes oder den Nebenwinkel, um eine durch den gesuchten Kreismittelpunkt gehende Gerade zu erhalten.

1) BURMESTER nennt dieses Vorkommnis einen Durchschlag, da er das Wort auf das ganze Gelenkviereck, nicht auf ein einzelnes Gelenk bezieht.

Weitere Sonderfälle treten auf, wenn zweimal oder dreimal die Summe zweier Gliedlängen gleich der Summe der beiden andern ist, wenn also auf zwei oder drei Weisen alle vier Gelenke gleichzeitig durchschlagen. Dann werden zwei Paare Seiten bzw. alle vier Seiten einander gleich.

Sind zweimal zwei Nachbarseiten einander gleich¹⁾, so erhält man das gleichschenklige Viereck (Nr. 33), sind es zweimal zwei Gegenseiten, das Parallelogramm, das auch zum Zwillings, d. h. zu einem überschlagenen Viereck durchgeschlagen werden kann (Nr. 32). Für das letztere und für das gleichschenklige Viereck sieht man ohne weiteres ein, daß ihm (entsprechend dem gleichzeitigen Durchschlag auf zwei Weisen) zwei Kreise eingeschrieben werden können, deren Mittelpunkte man nach der angegebenen Regel findet. Wendet man die Regel auch auf das Parallelogramm an, so findet man, daß die berührenden Kreise der Viereckseiten in ein und dasselbe Punktepaar zerfallen, das auf der unendlich fernen Geraden durch die beiden Paare paralleler Seiten ausgeschnitten wird, während die Mittelpunkte beider Kreise verschiedene unendlich ferne Punkte sind, die nämlich auf den Winkelhalbierenden der spitzen oder stumpfen Winkel des Parallelogramms liegen.

Bei gleicher Länge aller Seiten (Rhombus Nr. 31) gibt es drei Weisen des gleichzeitigen Durchschlags aller vier Gelenke, die eine mit vier geknickten Durchschlägen, zwei andere mit gemischten Durchschlägen; eine besondere Anordnung des Modells 31 gestattet es, alle drei Weisen zu verwirklichen. Von den drei Kreisen, die diesen Weisen entsprechen, verläuft der eine im Innern des Rhombus, die beiden anderen zerfallen wie vorhin in ein unendlich fernes Punktepaar.

Wenn man nach DARBOUX, der schon vor REULEAUX und GRASHOF die Theorie des Gelenkvierecks in einer umfassenden Arbeit entwickelt hat, von den aufgezählten Fällen alle diejenigen in eine Klasse zusammenfaßt, die durch Umstecken der Stäbe aus einander hervorgehen, so erhält man im allgemeinen Fall zwei Klassen (die REULEAUXS und GRASHOFS), IV und V der obigen Aufzählung, und für die Sonderfälle die drei Klassen I, II und III. Bezeichnet man mit D die Summe der größten und kleinsten Gliedlänge weniger der Summe der beiden mittleren Gliedlängen, so kann man aus den vier Gliedlängen noch zwei weitere solche Differenzen D' und D'' bilden und erhält so die obenangegebenen Kennzeichen für die Fälle I—V. Die Fälle I—III sind daher durch das Verschwinden dreier, zweier oder einer der drei „Invarianten“ D, D', D'' des Gelenkvierecks gekennzeichnet, während die Unterscheidung der weiteren Unterfälle der Fälle I—III auf den verschiedenen Arten des gleichzeitigen Durchschlags aller vier Gelenke beruht, also nicht mehr wie die DARBOUXSche Unterscheidung von der Anordnung der Stäbe unabhängig ist.

1) Wird in diesem Fall eine der kürzeren Seiten zum Steg gemacht, so erhält man einen „Tourenverdoppler“, d. h. der kürzere Arm beschreibt einen vollen Winkel, wenn der längere einen gestreckten beschreibt.

XI. Reihe: Gelenkvielfache.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 13 Modelle *M* 200,—.

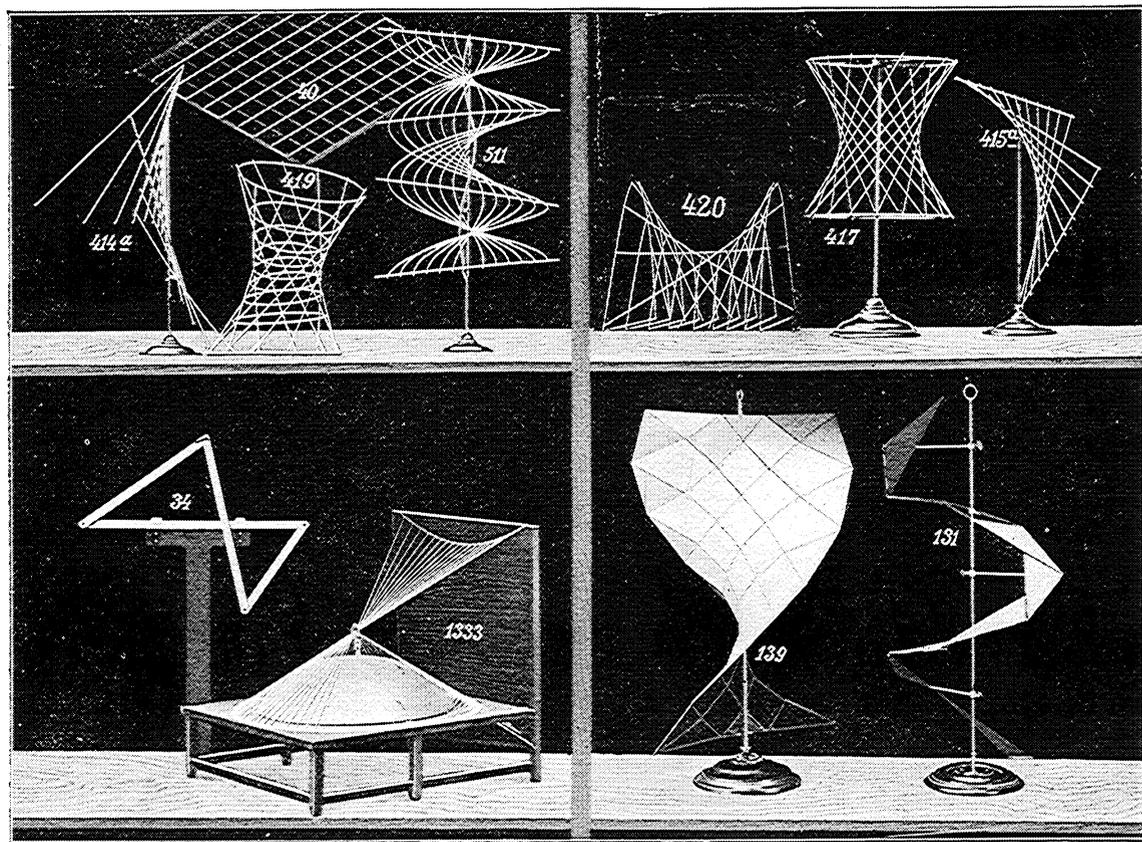
Eine zugehörige Abhandlung wird nach ihrem Erscheinen den Abnehmern der Modelle frei zugesteilt.

A. Vielfache zur Theorie der abwickelbaren Flächen.

131. **Abwickelbare Fläche einer Raumkurve** (Schraubenlinie), dargestellt durch einen Linien- und Flächenzug von neun Dreiecken. Bewegliches Blechmodell mit Gestell (Fuß, Achse und Armen) . . . *M* 30,—
- 131a. **Zwei Dreiecke** um eine gemeinsame Seite in Scharnier drehbar zur Darstellung der Torsion einer Raumkurve (Ausschnitt des vorigen) „ 3,—
- 132 u. 133. **Nicht-geradlinige abwickelbare Flächen** (nach CHR. WIENER), Papiermodelle verbiegbare und ohne Faltung und Bruch in die Ebene ausbreitbar; Vielfache mit geschlossenen ebenen Seiten.
132. **Zickzackfläche**, zwangsläufig beweglich, in Parallelogrammen gefaltetes Papierblatt „ 1,50
133. **Nicht-geradlinige abwickelbare Fläche**, in höherem Grad beweglich. An den Ecken stoßen abwechselnd vier oder sechs Flächen mit der Winkelsumme von vier Rechten zusammen . . . „ 2,—

B. Vielfache zur Theorie der Biegung der Flächen.

134. **Zwei ebene Flächenstücke**, um ihre Schnittkante in einem Scharnier drehbar mit eingespanntem Faden, der in einer kürzesten Linie über die Kante hinwegläuft *M* 3,—
135. **Achsenspiegeliges Vierkant**. Bewegliches Blechmodell:
 a) kuppenförmig „ 6,—
 b) sattelförmig „ 5,—
136. **Sechsfach**. Bewegliches Blechmodell:
 a) kuppenförmig, b) sattelförmig, jedes Modell . . . „ 8,—
137. **Neunfach**. Bewegliches Blechmodell:
 a) kuppenförmig, b) sattelförmig, jedes Modell . . . „ 12,—
- [138.] **Neunfach, starr**. Blechmodell, das durch Herausnahme eines Scharnierstiftes beweglich wird.
139. **Kuppe**. Bewegliches Blechmodell aus 25 Flächen. Durch endliche ebene Flächenstücke versinnbildlichte VOSSsche Fläche, in zwei konjugierten Systemen geodätischer Linien biegbare. Bewegliches Blechmodell „ 40,—
140. **Wendelfläche**. Bewegliches Blechmodell aus 45 Flächen. Vosssche Fläche wie das vorige Modell, mit Fuß und Achse. Höhe zwischen den äußersten Erzeugenden etwa 60 cm. „ 80,—



Maßstab etwa 1:14.

H. Wieners Sammlung, Reihe X, XI, XII.

Zur Theorie der abwickelbaren Regelflächen.

(Modelle 131 und 131a.)

Zu Nr. 131. Mit jeder Raumkurve, mag sie als „Bahnkurve“ durch eine stetige Folge von Punkten oder als „Hüllkurve“ durch eine stetige Folge von Schmiegungebenen entstanden gedacht sein, ist eine abwickelbare Fläche verknüpft, die durch die Folge ihrer Tangenten erzeugt wird, wobei diese wieder in doppelter Bedeutung auftreten, nämlich als Grenze der Sehnen oder der Schmiegungsachsen. Diese Beziehungen werden in Nr. 131 an dem einfachsten Beispiel einer Schraubenlinie dargelegt, indem auf ihr in gleichen Abständen Punkte angenommen sind, durch deren drei aufeinanderfolgende jedesmal ein Dreieck gelegt ist, und diese Dreiecke bilden einen Flächenzug, der sich nach beiden Seiten hin beliebig fortsetzen läßt, und dessen Ecken Punkte einer Schraubenlinie sind, während die Kanten und Seiten des Flächenzugs in der Grenze in Tangenten und Schmiegungebenen der Schraubenlinie übergehen. Die Höhenlinien der gleichschenkeligen Dreiecke (dargestellt durch die Arme, die den Flächenzug der Dreiecke mit der Achse verbinden) treffen die Achsen senkrecht, woraus folgt, daß die Schmiegungebene eines Punktes auch seinen Radius enthält.

Das Modell ist in verschiedener Weise verstellbar gemacht: Zwei benachbarte Dreiecke können sich um ihre gemeinsame Kante in einem Scharnier drehen, außerdem können die Arme, die jene Dreiecke mit der Achse verbinden, verlängert und verkürzt und auf der Achse verschoben werden. Auf diese Weise entstehen nicht nur beliebig viele Schraubenlinien, sondern auch noch andere Kurven, aber alle diese haben das eine gemeinsam, daß sie an jeder Stelle dieselbe Krümmung $d\tau : ds$ haben, da sie sowohl das Bogenelement ds , nämlich die Schenkellänge der gleichschenkeligen Dreiecke, wie auch den Kontingenzwinkel $d\tau$, d. h. den Nebenwinkel des Winkels an der Spitze gemein haben. Nimmt man das Modell aus seinem Gestell heraus und klappt es in die Ebene, indem man den Schmiegunswinkel $d\sigma$ zweier benachbarter Schmiegungebenen (Dreiecke) zu 0 werden läßt, so stellt es den gemeinsamen Krümmungskreis aller jener Raumkurven von konstanter Krümmung dar.

Dagegen kann die Torsion $d\sigma : ds$ für das System der Schraubenlinien gleichzeitig an allen Stellen um den gleichen Betrag und für eine der übrigen dargestellten Raumkurven um verschiedene Beträge geändert werden, da das Bogenelement ds konstant ist, aber der Winkel $d\sigma$ durch Drehung im Scharnier geändert werden kann.

Die beiden besonders beigegebenen durch Scharnier verbundenen Dreiecke Nr. 131a machen die Veränderung der Torsion anschaulich, auch kann durch Umklappen des einen Dreiecks um die gemeinsame Kante der Sinn der Schraubung umgekehrt werden.

Zur Theorie der nicht-geradlinigen abwickelbaren Flächen.

(Modell 132 und 133.)

CHR. WIENER hat darauf aufmerksam gemacht, daß außer den bei Raumkurven vorkommenden abwickelbaren Flächen, deren Elemente die zwischen den Schenkeln eines unendlich kleinen Winkels eingeschlossenen, sich ins Unendliche erstreckenden Flächen sind, noch eine zweite Art von abwickelbaren Flächen möglich ist, bei denen ein jedes Flächenelement ein geschlossenes Vieleck bildet. Sind diese Elemente von endlicher Größe, so bilden sie ein Vielfach, in dem an jeder Ecke die Summe der Flächenwinkel vier Rechte betragen muß; denn unter dieser Bedingung kann es ohne Faltung oder Bruch in die Ebene ausgebreitet werden. Durch Grenzübergang findet man daraus auch solche Flächen mit unendlich kleinen, aus geschlossenen ebenen Vielecken bestehenden Flächenelementen. Es sei auf die Ausführungen in CHR. WIENERS „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“, 2. Bd., S. 28 ff., verwiesen, wo von der „Zickzackfläche“ (Nr. 132) eine analytische Darstellung durch FOURIERSche Reihen gegeben ist. Da bei dieser Fläche in jeder Ecke vier Seiten zusammenstoßen, ist sie zwangsläufig veränderlich; die Ecken bleiben dann (wenn jede ebene Seite als starr vorausgesetzt wird) stets in zwei parallelen Ebenen, die in der Grenze im Papierblatt zusammenfallen. Nr. 133 zeigt ein weiteres Beispiel einer solchen Fläche, deren Bewegungen nicht zwangsläufig sind (vgl. weiter unten), und die deshalb eine viel größere gestaltliche Mannigfaltigkeit aufweist.

Flächenbiegung und Gelenkvielfache.

(Modelle 134 bis 140.)

In den folgenden Modellen dürfte zum erstenmal der Versuch gemacht sein, die Biegung einer nicht abwickelbaren Fläche dadurch unmittelbar zur Anschauung zu bringen, daß anstelle der stetigen Fläche ein durch endliche starre Vielecke begrenztes Vielfach gesetzt wird. Dabei werden die Seiten als eben vorausgesetzt und je zwei Nachbarseiten um ihre gemeinsame Kante drehbar gemacht. Ferner ist die Anordnung so getroffen, daß das Vielfach stetig und zwangsläufig aus einer ursprünglichen in eine neue Lage übergehen kann. Denkt man sich diejenigen Flächen aus dem ganzen Vielfach herausgegriffen, die an einer Ecke zusammenstoßen, so erhält man ein Vielkant. Ein solches ist starr, zwangsläufig beweglich oder in höherem Grade beweglich, je nachdem es aus drei, vier oder mehr Flächen besteht. Man wird daher die krumme Fläche, die durch ein Vielfach ersetzt werden soll, dadurch in Elemente zerlegen, daß man über die Fläche ein aus zwei einander schneidenden Liniensystemen bestehendes Netz legt; das Vielfach, das anstelle der stetigen Fläche tritt, muß dann aus lauter Vierecken bestehen, von denen an jeder Ecke vier zusammenstoßen. Fordert man, daß diese Vielecke eben seien, so wird dadurch freilich die Wahl jener Liniensysteme auf konjugierte Systeme beschränkt; da

es sich hier jedoch um erstmalige Aufstellung eines Beispielen handelt, so darf dieser (leicht zu umgehende) Sonderfall vorausgesetzt werden.

Nun liegt aber die Schwierigkeit, solche zwangläufig bewegliche Flächen zu finden darin, daß ein Vielflach der geschilderten Art, schon wenn es, wie dies in dem beigegebenen Schema angedeutet ist, aus neun in drei Reihen angeordneten Flächen besteht, nur in ganz besonderen Fällen beweglich ist. Dies erkennt man, wenn man das Vielflach aus seiften Teilen zusammensetzt. Die Flächen I und II für sich betrachtet lassen eine Drehung um ihre gemeinsame Kante zu, wobei die beiden Kanten, an denen die Flächen III und IV nachher angegliedert werden, einen in gewissen Grenzen beliebigen Winkel einschließen. Die Flächen III und IV für sich gestatten an den beiden Kanten, die sich im fertigen Vielflach mit jenen Kanten von I und II decken, in gewissen Grenzen den gleichen Winkel, also bilden die vier Flächen, zum Vierkant zusammengefügt, ein zwangläufiges System. An III und IV lassen sich ebenso die beiden folgenden Flächen V und VI des Schemas beweglich anfügen, so daß eine zwangläufige Kette von drei Flächenpaaren entsteht, die durch Anfügung weiterer solcher Paare vorwärts und rückwärts beliebig fortgesetzt werden könnte. Statt dessen ist in der anderen Richtung an das Paar V, III ein Paar VII, VIII angefügt, das aus demselben Grund wie die vorigen in gewissen Grenzen an der Bewegung des Vierflachs IV, VI, V, III teilnimmt. Faßt man aber jetzt den Winkel der beiden Kanten ins Auge, an denen im Schema die Fläche IX an I und VIII angesetzt ist, so wird sich dieser bei der zwangläufigen Bewegung der acht ersten Flächen im allgemeinen verändern, so daß es im allgemeinen nicht möglich ist, eine neunte Fläche einzusetzen, ohne daß dadurch das Gelenksystem erstarbt (Modell 138). Die Aufgabe ist also, für das Achtfach I bis VIII eine Bedingung zwischen den 15 Winkeln zu finden, die um die vier Ecken der Fläche III herumliegen, derart, daß der 16. Winkel bei gelenkiger Veränderung des Achtfachs beständig bleibt. Ist die Bedingung erfüllt, so läßt sich die neunte starre Fläche einspannen, ohne die Bewegung aufzuheben.

VII	VIII	IX
V	III	I
VI	IV	II

Durch eine einfache Rechnung läßt sich zeigen, daß ein sehr spezielles Vielflach dieser Bedingung genügt; wenn nämlich alle vier um III herumliegenden Vierkante achsenspiegeln gewählt werden, so ergibt sich, daß das Vielflach beweglich ist, vorausgesetzt, daß nicht die erwähnten Grenzen der Beweglichkeit bis zur Hemmung eingeengt werden.

Nach demselben Gesetz kann man dann nach allen Seiten hin beliebige weitere Vierecke angliedern und erhält so ein beliebig ausgedehntes Vielflach, das an jeder Ecke ein achsenspiegeln bewegliches Vierkant besitzt.

Geht man von einem solchen beliebig ausgedehnten Vielflach zu einer stetigen Fläche über, indem man die Flächen der Zahl nach ins Unendliche steigert und zugleich bis ins Unendliche verkleinert und dabei die Nebenwinkel je zweier an einer Ecke eines Vierkants aneinander grenzenden

Gegenkanten sowie die Winkel je zweier in einem der ebenen Vierecke gegenüberliegender Kanten unendlich klein im allgemeinen von der 1. Ord. werden läßt, so erhält man als Entsprechendes zu dem vorigen Vielfach eine von zwei Scharen von Linien überzogene Fläche, die stets in diesen Linien gebogen werden kann. Dabei sind die beiden Scharen (wegen der Ebenheit der Maschen) konjugiert und (wegen der Achsenspiegelung) geodätische Linien. Die nach der angegebenen Regel hergestellten Modelle veranschaulichen also im Endlichen die Biegung einer mit zwei Scharen von konjugierten geodätischen Linien behafteten Fläche, und diese Linien bleiben auch für endliche Biegungen zwei Systeme einander zugeordneter Biegungslinien.

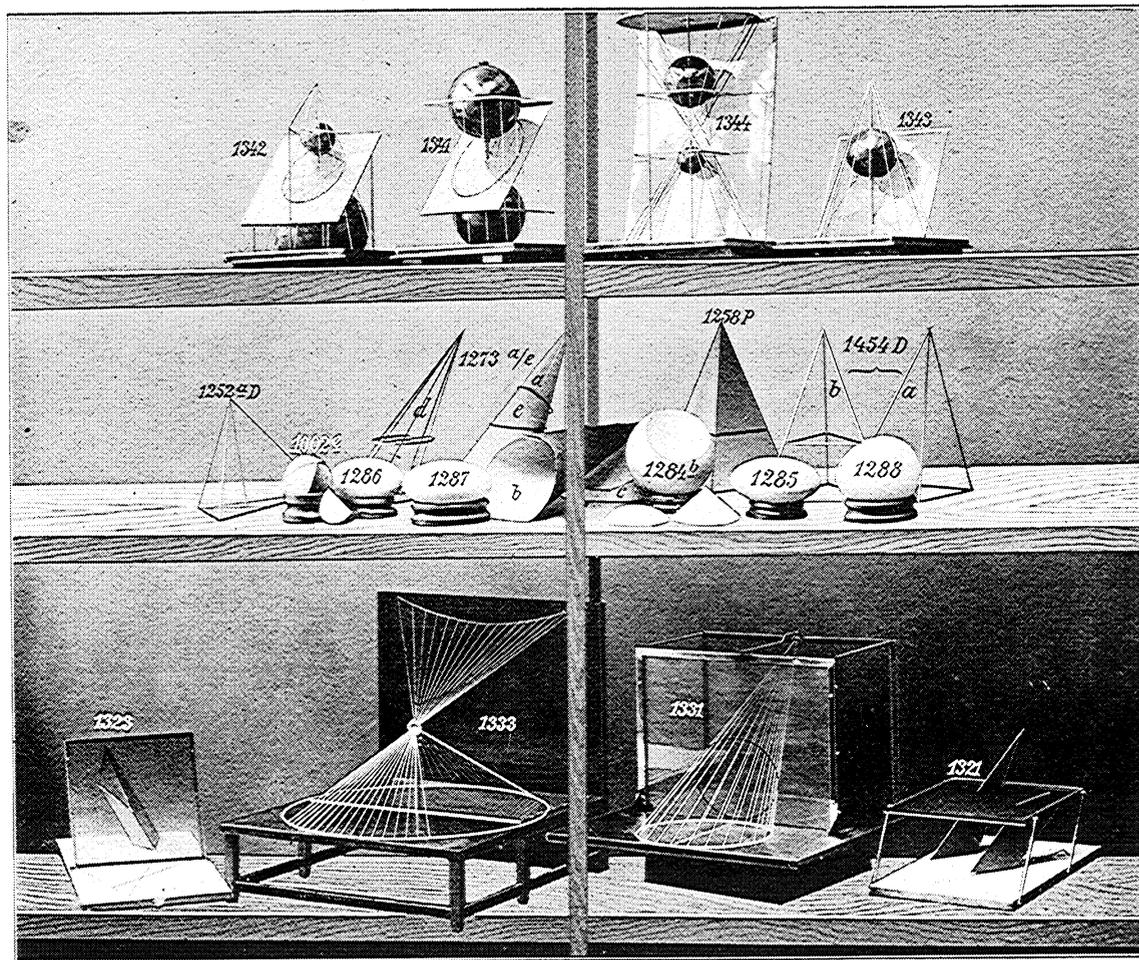
Diese Flächen, die nach ihrem ersten Bearbeiter Voss'sche Flächen heißen, haben schon zu einer ganzen Reihe von Untersuchungen geführt¹⁾, die sich zum Teil auch auf ihre Biegung beziehen, während ihr Zusammenhang mit der Biegung endlicher Vielfache zum erstenmal von H. WIENER im Anschluß an die hier ausgeführten Modelle gezeigt worden ist. Nr. 135 bis 137 wurden auf der Naturforscherversammlung in Kassel²⁾ (1903) und auf dem Mathematikerkongreß in Heidelberg (1904) in einer Ausführung aus Pappflächen mit Leinwandkanten vorgezeigt.

Ein einfaches Beispiel der Voss'schen Flächen bildet die Wendelfläche, die in dem Modell 140 durch ein ihr eingeschriebenes Vielfach ersetzt ist. Dieses besteht aus gleichschenkligen Vierecken (am Rand aus ihren Teildreiecken), von denen die einen Diagonalen auf einer regelmäßigen Reihe von Erzeugenden der Wendelfläche liegen, während die anderen als Sehnen von Schraubenlinien angeordnet sind. Zur Konstruktion des Vielfachs ist von diesen Vierecken ein einziges, nämlich ein Quadrat, mit der einen Diagonale in der Achse liegend, gewählt; daraus bestimmt sich durch regelmäßige Wiederholung längs der Achse eine ganze Reihe solcher Quadrate und aus diesen können nach der obigen Regel die übrigen Vierecke der angegebenen Art auf eine einzige Weise eingefügt werden.

Das in seinen Kanten drehbare achsenspiegliche Vierkant Nr. 135 a) und b), das die Beweglichkeit dieser Vielfache ermöglicht, hat auch noch eine andere wichtige Eigenschaft, die mit den Biegungseigenschaften stetiger Flächen zusammenhängt. Wenn man nämlich auf dem einen Paar von Gegenkanten zwei Punkte festlegt, die gleichen Abstand vom Scheitel haben, und ebenso auf dem zweiten Paar, so haben die beiden durch ein solches Punktepaar und den Scheitel gelegten Kreise bei den Veränderungen des Vierkants zwar veränderliche Radien, aber das Produkt der für irgend ein Vierkant genommenen Radien ist dasselbe wie bei allen übrigen, die aus ihm durch die gelenkige Veränderung entstehen.

1) *Enz. d. math. W.* III D. 5. 39 und III D. 6. 25.

2) *Verhandlungen der Ges. D. Nat. u. Ä.* 75. Vers. zu Kassel II, 1. S. 29.



XII. Reihe: Gelenkflächen.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 11 Modelle *M* 400,—.

Eine zugehörige Abhandlung wird nach ihrem Erscheinen den Abnehmern der Modelle frei zugestellt.

A. Gelenkige Verbindung zwischen starren Geraden.

413. Das geschränkte Gelenk.

- a) Zwei 1 cm starke, 50 und 60 cm lange Messingstäbe gelenkig verbunden;
- b) das Gelenk für sich: zwei aneinander genietetete Hülsen;
- c) dasselbe: die Platten der Hülsen ungebogen.

Zusammen *M* 4,50

414 a, 414 b, 415 a, 415 b. Vier Stabmodelle:

Kegelschnitte und Regelflächen 2. Ord. erzeugt durch ähnliche und projektive Punktreihen . . . „ 90,—

Preis der vier beweglichen Modelle mit Ständer einzeln:

414 a *M* 24,—; 414 b *M* 27,—; 415 a *M* 18,—; 415 b *M* 22,—.

Auf zwei Stäben sind a) ähnliche und b) projektive Punktreihen durch 11 bzw. 15 Stäbe von veränderlicher (Nr. 414) und beständiger Länge (Nr. 415) gelenkig verbunden. Sämtliche Stäbe hüllen in der Ebene a) Parabeln und b) Ellipsen und Hyperbeln ein, die bei Nr. 414 sich stetig verändern lassen und bei Nr. 415 die Grenzlagen der HENRICISCHEN Regelflächen (vgl. Nr. 421 ff.) sind. Im Raum bilden die Verbindungsstäbe eine veränderliche Regelschar einer Fläche 2. Ord.

416. Der Planigraph (nach DARBOUX) „ 24,—

An einem festen Stab ist ein beweglicher durch drei Verbindungsstäbe gelenkig verbunden. Der feste Stab ist in der Mitte einer matten Glastafel von 40 cm² aufgestellt. Der untere Endpunkt des beweglichen Stabes beschreibt die ganze Ebene der Glastafel, ein daran angebrachter Schreibstift zeichnet auf dieser beliebige Kurven auf. Die Glastafel ist auf eine Holzplatte aufgelegt. Höhe von der Glastafel bis zum obersten Drehpunkt 42 cm.

B. Gelenk-Regelflächen zwischen zwei starren Kurven oder mit einer Schar gelenkig eingefügter starren Kurven.

417. Drehregelfläche. Stabmodell mit einer Schar von Erzeugenden; zugleich Drehkegel, Dreh- und elliptischer Zylinder und Regelfläche 4. Ord. Höhe des Drehzylinders zwischen den Grenzkreisen 30 cm. Mit Ständer und Steg *M* 60,—

418. **Einschaliges Hyperboloid.** Stabmodell mit einer Schar von Erzeugenden. Zugleich Regelfläche 4. Ord. Höhe zwischen den parallel gestellten Grenzellipsen 32 cm. Mit Ständer *M* 42,—

Zwischen den Teilpunkten zweier gleichgetheilten Drahtkreise (Nr. 417) bzw. zweier durch projektive Teilungen aufeinander bezogener Drahtellipsen (Nr. 418) sind 18 (20) Stäbe beiderseits gelenkig eingefügt und so eine Regelfläche 2. Ord. hergestellt, die auf dem Ständer festgehalten wird, und zwar bei Nr. 417 in verschiedenen Lagen im Übergang vom Drehzylinder bis zum Drehkegel. Hebt man die Modelle vom Ständer ab, so können die beiden Grenzkurven trotz der Überzahl der eingefügten Stäbe noch eine zwangsläufige endliche Bewegung gegeneinander ausführen und gehen so in ein einfach unendliches System von Flächen 4. Ord. über, nämlich in die von CREMONA untersuchten Regelflächen, die durch Verbindung entsprechender Punkte zweier projektiv aufeinander bezogener Kegelschnitte entstehen.

Das Modell 417 kann daneben noch unendlich viele Bewegungen anderer Art ausführen, bei denen eine Schar elliptischer Zylinder von wechselndem Achsenverhältnis affin ineinander übergeführt werden, und zwar, bei Einsetzen des H-förmigen Steges, zwangsläufig. Durch Anziehen einer Schraube am Steg wird ein jeder Zylinder festgestellt, um ihn auf der Wandtafel abrollen und seinen Grundkreis in der Abwicklung nachzeichnen zu können. Man gewinnt so auf dem Weg des Versuchs die verschiedenen Gestalten der Kurve, in die der Grundkreis des Zylinders durch die Abwicklung verwandelt wird.

419. **Gelenkiges Hyperboloid.** Drahtmodell mit einer Schar gerader Erzeugenden und einer Schar von Parallelschnitten in Ellipsen . . „ 42,—
420. **Gelenkiges Paraboloid.** Drahtmodell mit einer Schar gerader Erzeugenden und einer Schar von Parallelschnitten in Parabeln . . „ 42,—

Diese beiden Modelle lassen theoretisch eine unendlich kleine Bewegung zu und gehen dabei in eine benachbarte Regelfläche 4. Ord. über, die eine Schar von Kegelschnitten, nämlich jene Schnittellipsen, bzw. Parabeln, enthält. Durch unmerkliches Nachgeben der Drähte und Gelenke zeigt Nr. 419 einen sehr erheblichen rundläufigen Ausschlag und stellt somit in großer Annäherung unendlich viele von den Flächen 4. Ord. dar, die schon die Modelle 417 und 418 zeigten, diesmal aber mit einer Schar eingesetzter Kegelschnitte. Nr. 420 zeigt außerdem eine endliche Bewegung, da Parabeln und gerade Erzeugende in je einer Schar starrer paralleler Ebenen bleiben, die sich um ihre gedachten parallelen Schnittlinien wie in Scharnieren drehen (wie die Modelle 412 und 424 bis 430).

511. **Wendelfläche.** Bewegliches Drahtmodell mit Erzeugenden und Schraubenlinien, beide gelenkig verbunden. Höhe zwischen den äußersten Erzeugenden 45 cm. Mit Holzfuß „ 100,—

Die Fläche ist in $1\frac{1}{2}$ Schraubenwindungen beiderseits der Achse durchgeführt. Auch sie hat theoretisch eine unendlich kleine, praktisch aber eine kräftig hin und hergehende Bewegung.

Zu den Modellen 413 bis 416.

Die voranstehenden Modelle bilden die Fortsetzung der in der V. Reihe begonnenen Darstellung von Gelenkflächen, deren Beweglichkeit durch das „geschränkte Gelenk“ ermöglicht wird. Dieses dient zur Verbindung zweier Stäbe oder Drahtkurven und kommt in seinem Freiheitsgrad dem Cardanischen oder Kugelgelenk gleich, übertrifft diese jedoch durch das Fehlen von toten Stellen. Zwei durch das Gelenk verbundene Stäbe, die in größerem Maßstab hergestellt sind, zeigen seine Wirkungsweise (Nr. 413 a); erfaßt man den längeren Stab, so läßt sich der andere nach allen Richtungen um den ersten herumschleudern. Die Anfertigung des Gelenks wird in zwei Stufen verdeutlicht (413 b und c).

Eine von vornherein vorgesehene Abänderung des Gelenkes ermöglicht eine Darstellung der Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive gerade Punktreihen, neben der Erzeugung von Regelflächen 2. Ord. bei windschiefer Lage beider Geraden (Nr. 414 a und b). Zwischen entsprechenden Punkten zweier projektiv aufeinander bezogener Stäbe ist eine Anzahl von Stäben gelegt, die mit jenen beiden gelenkig verbunden sind, aber mit dem einen so, daß jeder Angriffspunkt auf dem Verbindungsstab verschiebbar und dieser daher in seiner Länge veränderlich ist. Die Modelle 415 a und b unterscheiden sich von den beiden vorigen nur dadurch, daß die Angriffspunkte der Verbindungsstäbe beiderseits fest sind, und zeigen, obwohl bei ihnen nur zwei Geraden der einen Schar der Regelfläche 2. Ord. mit den Geraden der anderen Schar gelenkig verbunden sind, doch schon die gleiche, von HENRICI erkannte zwangsläufige Veränderung wie die Modelle 421/424. Eine unmittelbare Anwendung dieses Gelenksystems ist die weiter unten näher zu beschreibende Einrichtung des DARBOUXSchen Planigraphen (Nr. 416), die von der von G. KOENIGS herrührenden völlig verschieden ist. Bei der Ausführung des Apparats ist auf einen möglichst großen Ausschlag Wert gelegt, und so kommt der Stift bis an die Achse heran und beschreibt eine volle Kreisscheibe, die mit einem Durchmesser von 64 cm noch über die Glastafel hinausgreift.

Zur Theorie der Gelenkflächen.

(Modelle 417 bis 420 und 511.)

Ganz neue Aufgaben werden in den folgenden Modellen behandelt, die sich aus der Absicht ergeben, dem geschränkten Gelenk dadurch eine möglichst weitgehende Anwendbarkeit zu sichern, daß neue Gelenkflächen hergestellt werden; darunter sollen Flächen verstanden werden, bei denen zwei oder mehr ebene oder räumliche Kurven durch eine beliebige Anzahl von Stäben oder Drahtkurven gelenkig so verbunden werden, daß immer noch eine (wenn auch unendlich kleine) Veränderung des Systems möglich ist.

Aus der Theorie der Fachwerke ist bekannt, daß, wenn zwei starre Körper — und als ein solcher wird hier jede Drahtkurve angesehen — durch sechs Stäbe gelenkig verbunden werden, das System im allgemeinen erstarrt. Es soll nun im folgenden durch einige ganz einfache kinematische Betrachtungen gezeigt werden, wie man zu Gelenkflächen kommt.

Denkt man sich einen starren Körper gegen einen zweiten im Raum festgehaltenen einer unendlich kleinen Bewegung unterworfen, also im allgemeinen Fall einer unendlich kleinen Schraubung, so beschreibt irgend einer seiner Punkte ein Element einer Schraubenlinie. Verbindet man nun den Punkt durch einen Stab (eine starre Gerade) mit irgend einem Punkt des festen Körpers gelenkig, so wird dieser die unendlich kleine Bewegung nicht hindern, wenn er zum Bahnelement des Punktes senkrecht ist. Da aber die Normalen aller Bahnelemente einer unendlich kleinen Schraubung in einem Strahlengewinde (linearen Komplex) liegen, so folgt, daß beliebig viele Geraden zwischen beiden Körpern gelenkig eingefügt werden können, ohne jene gedachte unendlich kleine Schraubung zu hindern, wenn sie nur in dem durch diese Bewegung bestimmten Gewinde liegen. Umgekehrt aber ist durch fünf Geraden (die nicht in einem Strahlennetz liegen) ein Strahlengewinde eindeutig bestimmt und mit diesem eine unendlich kleine Schraubung (d. h. ihre Achse und reduzierte Ganghöhe). Wählt man daher zur Verbindung der beiden Körper fünf solche Stäbe, so ist noch eine unendlich kleine Bewegung möglich, und das aus beiden Körpern und den fünf Stäben gebildete System ist zwangsläufig (d. h. es kann durch Einfügen eines weiteren Stabes zum Erstarren gebracht werden).

Die Bewegung eines Stabes gegen einen starren Körper kann hier übergangen werden, dagegen bleibt noch der Fall zu betrachten, daß eine Gerade durch gelenkig eingespannte Stäbe mit einer anderen Geraden verbunden ist. Jede Überführung eines Stabes in eine andere Lage kann durch eine Drehung um eine im Raum festliegende Achse ersetzt werden, daher ist bei einer unendlich kleinen Bewegung einer Geraden jedes Bahnelement ein unendlich kleiner Kreisbogen, und die auf dem Bahnelement senkrechten Geraden sind solche, die die Drehachse treffen. Soll also ein Stab mit einem im Raum fest liegenden durch weitere Stäbe gelenkig verbunden werden, ohne daß jene unendlich kleine Bewegung gehemmt wird, so müssen die Verbindungsstäbe den festen und den beweglichen Stab und außerdem noch die im Raum fest liegende Drehachse schneiden und somit einer Regelschar angehören, die diese drei Geraden zu Leitlinien hat. Sind aber umgekehrt drei solcher Verbindungsstäbe zwischen einem festen Stab und einem beweglichen beliebig gewählt, so ist dadurch eine Regelfläche 2. Ord. bestimmt, und es kann der bewegliche Stab im festen Raum jede unendlich kleine Drehung ausführen, deren Achse die drei Verbindungsstäbe trifft. Dann wird ein weiterer Verbindungsstab die Bewegung zulassen oder hemmen, je nachdem er der Regelschar der drei ersten angehört oder nicht. Da also das System dieser fünf gelenkig verbundenen Stäbe durch

einen hinzugefügten Stab zum Erstarren gebracht werden kann, so ist es zwangsläufig.

Auf den angeführten Sätzen beruht nun die Beweglichkeit des HENRICISCHEN Hyperboloids mit Einschluß des DARBOUXSCHEN Planigraphen sowie der anderen in dieser Reihe angeführten, von H. WIENER herrührenden Gelenkflächen. Während im übrigen auf eine später erscheinende zugehörige „Abhandlung“ verwiesen werden mag, sei im einzelnen nur noch folgendes angeführt.

Betrachtet man an HENRICISCHEN gelenkigem Hyperboloid zwei parallele Erzeugende f und u , so sollen für einen Punkt U , in dem u von einer Erzeugenden b der anderen Schar getroffen wird, die möglichen Bewegungen gegen f untersucht werden. Unterwirft man das Hyperboloid unter Festhalten der Geraden f irgend einer unendlich kleinen Veränderung, so erfährt nach dem oben Gesagten der Stab b im festen Raum eine unendlich kleine Drehung um eine Achse a , die derselben Schar wie f und b angehört und deshalb mit der Geraden u in einer Ebene liegt. An dieser Bewegung nimmt der Punkt U , weil er auf b liegt, teil und beschreibt dabei ein Bahnelement, das auf der durch ihn selbst und die Drehachse a gelegten Ebene (ua), also auch auf der zu u parallelen Geraden f senkrecht steht. Damit ist gezeigt, was DARBOUX auf andere Art bewiesen hat, daß auf jeder Erzeugenden b derjenigen Schar, der f angehört, ein Punkt U liegt, der sich bei allen unendlich kleinen und dann auch bei allen endlichen gelenkigen Veränderungen des Hyperboloids, die f im Raum festlassen, auf einer zu f senkrechten Ebene bewegt.

Die ebene Führung des Punktes U durch eine aus Geraden (und nicht aus Ebenen) zusammengesetzte Vorrichtung ist von theoretischem Wert. Praktisch läßt sich freilich eine ebene Führung viel einfacher durch zwei mit Scharnier verbundene Ebenen herstellen.

Folgerungen, die sich aus der Bewegung des Planigraphen auf die Veränderungen der HENRICISCHEN Regelflächen beziehen lassen, seien hier übergangen.

Eine wichtige Anwendung der oben entwickelten Sätze erhält man in der CREMONASCHEN Regelfläche 4. Ord., die durch Verbindung entsprechender Punkte zweier projektiv bezogener Kegelschnitte entsteht (vgl. REYE, Geometrie der Lage 2. Abt., 15. Vortrag). Da die beiden begrenzenden Kegelschnitte als starre Körper betrachtet werden, die durch die Erzeugenden der Fläche gelenkig verbunden sind, so folgt die endliche Beweglichkeit der Modelle Nr. 417 und 418 sofort aus dem von CLEBSCH aufgestellten Satz (Math. Annalen Bd. 2, S. 447), daß die Geraden dieser Fläche einem Strahlengewinde angehören. Denn durch jede unendlich kleine gelenkige Veränderung des Modells geht die Fläche in eine neue über, die wiederum dieser Bedingung genügt.

Einer genaueren Untersuchung bedarf die Beweglichkeit der Modelle 419 und 420, bei denen noch eine Schar von Kegelschnitten in die Er-

zeugenden eingesetzt wurde. Die allgemeine Regelfläche 4. Ord. der oben betrachteten Art besitzt einfach unendlich viele Kegelschnitte, deren Ebenen eine Raumkurve 3. Klasse einhüllen, die auf sämtlichen Erzeugenden projektive Punktreihen hervorrufen. Dadurch ist eine Bedingung der Beweglichkeit zweier durch eine Schar gelenkig eingefügter Stäbe verbundener Geraden erfüllt, nämlich daß diese Stäbe (an deren Stelle hier die Sehnen der starren Kegelschnitte zu setzen sind) eine Regelschar 2. Ord. bilden. Aber infolge des Umstandes, daß die Bewegung der zwei durch die Erzeugenden der Fläche 4. Ord. gelenkig verbundenen Grenzkegelschnitte zwangsläufig ist, tritt noch die weitere Bedingung hinzu, daß die zwischen zwei Stäbe neu eingefügten Verbindungsstücke (jene Sehnen) die bereits vorgeschriebene unendlich kleine Bewegung mitmachen, also in dem durch diese Bewegung bestimmten Strahlengewinde liegen. Diese neue Bedingung läßt sich (man vgl. die Abhandlung) so aussprechen, daß diese weiteren Sehnen in einer Regelschar 2. Ord. liegen müssen, die außer den beiden Sehnen der Grenzkurven noch die beiden Geraden enthalten, die diesen Sehnen in dem Nullsystem des erwähnten Strahlengewindes zugeordnet sind. Diese Bedingung ist, wie sich zeigen läßt, in dem Fall, daß jene Kegelschnitte eine nichtzerfallende Raumkurve 3. Klasse einhüllen, nicht für alle Erzeugende der Regelfläche 4. Ord. erfüllbar, dagegen ist sie erfüllt, wenn die Ebenen der Kegelschnitte einem Büschel angehören, und dies trifft für die Modelle 419 und 420 in der Anfangslage zu, in der die Kegelschnitte aus einer Fläche 2. Ord. durch parallele Ebenen ausgeschnitten werden. Damit ist eine Bewegungsfähigkeit dieser Modelle mit unendlich kleinem Ausschlag bewiesen; dagegen wird nach Ausführung dieser Bewegung die zuletzt genannte Bedingung nicht mehr erfüllt, und deshalb ist theoretisch eine Bewegung mit endlichem Ausschlag ausgeschlossen.

Bei der Wendelfläche (Modell 511) gehören die geraden Erzeugenden einem Strahlengewinde an und werden durch die Schraubenlinie projektiv (nämlich kongruent) aufeinander bezogen, und auch die letzte der oben ausgesprochenen Bedingungen wird erfüllt, und daher ist eine Bewegung von unendlich kleinem Ausschlag möglich; nach ihrer Ausführung aber ist schon die erstgenannte Bedingung nicht mehr erfüllt, also ist auch hier eine Bewegung von endlichem Ausschlag theoretisch ausgeschlossen.

P. TREUTLEINS SAMMLUNG MATHEMATISCHER SCHULMODELLE.

Behufs näherer Erläuterung sei hier auf die zugehörige „Abhandlung“ verwiesen, in welcher die methodische Behandlung und Verwertung der nachfolgend verzeichneten Modelle im allgemeinen und für jede Gruppe dieser Modelle im einzelnen dargelegt ist. Die mit einem * bezeichneten Modelle werden in der Serie nicht geliefert, weil an jedem Orte leicht zu beschaffen sind.

A) MODELLE FÜR DEN RECHENUNTERRICHT. XXXI. Reihe: Für Verdeutlichung des Zehnergesezes und für das Bruchrechnen.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 104,—.

- Nr.
1001. **Rechenstäbchen** zur Verdeutlichung des Zehnergesezes (in Schachtel mit aufklappbarem Deckel). *M* 11,—

Die Stäbchen sind 15 cm lang und 2 mm dick. Die Schachtel enthält 15 Einzelstäbchen, ferner 11 Bündel von je 10 Stäbchen, 11 Bündel von je 100 Stäbchen (davon 1 Bündel mit unterscheidbaren 10 Zehnern) sowie 2 Bündel von 1000 Stäbchen (davon 1 Bündel mit unterscheidbaren 10 Hunderten).

1002. **Holzkugeln** für das Bruchrechnen, 10 Stück von 9 cm Durchmesser (mit Untersätzen in Pappschachtel) „ 44,—

Die 10 Holzkugeln sind die folgenden:

- | | | |
|--|--|--|
| a) eine Vollkugel,
b) eine Kugel, zerschnitten in Hälften,
c) eine Kugel, zerschnitten in Drittel,
d) eine Kugel, zerschnitten in Viertel,
e) eine Kugel, zerschnitten in Fünftel, | | f) eine Kugel, zerschnitten in Sechstel,
g) eine Kugel, zerschnitten in $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3})$,
h) eine Kugel, zerschnitten in $(\frac{1}{4} + \frac{3}{4})$
i) eine Kugel, zerschnitten in $(\frac{1}{5} + \frac{4}{5})$,
k) eine Kugel, zerschnitten in $(\frac{2}{5} + \frac{3}{5})$. |
|--|--|--|

1003. **Hölzerne Kreisscheiben** für das Bruchrechnen, 13 Stück von 22 cm Durchmesser (in Pappkasten mit seitlichen Schlitzten und mit stark übergreifendem Deckel) *M* 22,—

Die 13 Holzscheiben sind die folgenden:

- | | | |
|--|--|---|
| a) eine ungeteilte Scheibe,
b) eine Scheibe, zerschnitten in Hälften,
c) 2 Scheiben, zerschnitten je in $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3})$,
d) 3 Scheiben, zerschnitten je in $(\frac{1}{4} + \frac{3}{4})$, | | e) 4 Scheiben, zerschnitten je in $(\frac{1}{5} + \frac{4}{5})$,
f) 1 Scheibe, zerschnitten in $(\frac{2}{5} + \frac{3}{5})$,
g) 1 Scheibe, zerschnitten in $(\frac{1}{6} + \frac{5}{6})$. |
|--|--|---|

- Nr.
1004. **Holzstäbe** für das Bruchrechnen, 16 Stück von 36 cm Länge, verschiebbar auf Eisenstäbchen von 42 cm Länge (in Pappschachtel mit Deckel) *M* 32,—

Die 16 Holzstäbe sind die folgenden:

a) 1 ganzer Vollstab,	m) 2 Stäbe aneinander, zerteilt
b) 1 „ „ durchbohrt,	in $(\frac{1}{8} + \frac{2}{8})$,
c) 1 Stab, zerteilt in Hälften,	n) 3 Stäbe aneinander, zerteilt
d) 1 „ „ „ Drittel,	in $(\frac{1}{4} + \frac{3}{4})$,
e) 1 „ „ „ Viertel,	o) 2 Stäbe aneinander, zerteilt
f) 1 „ „ „ Fünftel,	in $(\frac{1}{5} + \frac{4}{5})$,
g) 1 „ „ „ Sechstel,	p) 3 Stäbe aneinander, zerteilt
h) 1 „ „ „ Achtel,	in $(\frac{1}{6} + \frac{4}{6})$,
i) 1 „ „ „ Neuntel,	q) 4 Stäbe aneinander, zerteilt
k) 1 „ „ „ Zehntel,	in $(\frac{1}{5} + \frac{4}{5})$.
l) 1 „ „ „ $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3})$,	

Von diesen Modellen sind die unter a) und b) lose Stäbe, die Stabteile unter c) bis l) sind je auf einem Eisenstab verschiebbar, die übrigen m) bis q) sind auf jeweils fest miteinander verbundenen zwei bis vier Stäben verschiebbar.

XXXII. Reihe: Maße, Gewichte und Münzen.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 52,—.

- *1011. **Metermaßstab** mitrechteckigem Querschnitt von 40/20 mm, in Dezimeter geteilt und diese abwechselnd zweifarbig.
- *1012. **Metermaßstab** als glattes Lineal (7,5/0,5 cm) mit Griff, in Zentimeter geteilt und diese abwechselnd zweifarbig.
- *1013. Kleinere **Zeichenmaßstäbe**, 20 und 30 cm lang, einerseits dicker, andererseits abgeschrägt und hier (nicht in halbe, sondern nur) in ganze Millimeter geteilt.
- *1014. Zusammenlegbarer **Werkmaßstab** (1 m lang).
- *1015. **Bandmaß** in Rolle (20 oder 50 m lang).
- *1021. Ein **Quadratmeter** aus Pappdeckel. *M* 3,80
1022. Ein **Quadratmeter**, umschlossen von vier durch Scharniere verbundenen 1,5 cm dicken Stäben von quadratischem Querschnitt; das Ganze in ein bequemes tragbares Bündel zusammenlegbar „ 8,50
- *1023. Ein **Quadratdezimeter** aus Pappdeckel.
1031. Ein **Kubikmeter**, dargestellt durch seine Kanten in 1,5 cm dicken Holzstäben, die durch alle zwölf Scharniere verbunden sind; das Ganze ist in ein bequemes tragbares Bündel zusammenlegbar „ 34,—

- Nr.
- * 1032. Ein **Kubikdezimeter** aus Pappdeckel, dazu 2 Platten von je $\frac{1}{10}$ cdm und 2 Stäbe von je $\frac{1}{100}$ cdm, sowie 2 einzelne Kubikzentimeter.
 - 1033. Ein **Kubikdezimeter** aus verzinktem Eisenblech, einseitig offen (als Gefäß) *M* 3,60
 - * 1034. Eine Zusammenstellung von **Maßgefäßen** (in Pappschachtel) und zwar:
 - a) **Blechgefäße**, lang zylindrisch mit Eichstempel, Inhalt = 1 l; $\frac{1}{2}$ l; $\frac{1}{4}$ l; $\frac{1}{10}$ l.
 - b) **Glasgefäße**, lang zylindrisch mit Eichstrich, Inhalt = 1 l; 0,5 l; 0,3 l; $\frac{1}{4}$ l; $\frac{1}{10}$ l.
 - * 1035. Ein **Literglasgefäß** in verschiedenartiger Form, nämlich als: a) Flasche; b) Kanne; c) Krug.
 - * 1036. Gläserne **Standzylinder** mit Einteilung bis a) 1000 ccm, b) 100 ccm.
 - * 1037. Hölzerne geeichte **Maße für Trockenfrüchte**, nämlich: 1 l; 2 l; 5 l; 10 l; 20 l.
 - * 1041. Eine Stand- oder **Tafelwage** (kleinere Form).
 - * 1042. **Gewichte**:
 - a) 11 Stücke von 1 g | d) 1 Stück von 100 g | g) 1 Stück von 1 kg
 - b) 6 „ „ 2 g | e) 2 Stücke von 200 g | h) 1 „ „ 5 kg
 - c) 11 „ „ 10 g | f) 2 „ „ 500 g | i) 1 „ „ 10 kg
 - * 1043. Mehrere Zusammenstellungen **fremdländischer Münzen**, je die verschiedenen Münzstücke eines Landes (Frankreich, England, Vereinigte Staaten, Rußland) in Vorder- und Rückseite nebeneinander, unter Glas, zum Aufhängen eingerichtet.

B) MODELLE

FÜR DEN GEOMETRISCHEN UNTERRICHT.

I. MODELLE FÜR DIE EBENE GEOMETRIE.

XXXIII. Reihe: Meßinstrumente.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 116,—.

- 1101. **Zifferblatt einer Uhr** (37,5 cm Durchmesser) mit 2 Zeigern *M* 13,50
Die Zeiger sind durch eine Schraube feststellbar, auch umsteckbar für Vorder- und Rückseite; die Vorderseite trägt die Stundenzahlen, die Rückseite trägt nur entsprechend Punkte.
- 1102. Modell eines **Theodolits** (ohne Gläser) samt Zubehör:
 - a) **Theodolitmodell** selbst „ 64,—
 - b) **Verschlußkästchen** dazu (21/21/38 cm) mit Handgriff „ 18,—

- Nr.
1102. c) **Dreifußgestell** mit Stellschrauben für die Füße und mit Schraubenmutter zum Festhalten des Theodolits (mit Spiralfeder) samt Haken für die Senkelschnur *M* 26,—

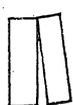
Das Theodolitmodell ist bei wagerechtem Rohr 26 cm hoch, das Rohr 24 cm lang; der Durchmesser des von 5 zu 5 Grad geteilten Grundkreises ist 16,5 cm; der Durchmesser des leicht abnehmbaren auch von 5 zu 5 Grad geteilten Höhenkreises beträgt 12 cm. — Das Theodolit kann am Boden des Verschlußkastens festgeschraubt werden. — Das Gestell ist auch für ein wahres Theodolit verwendbar.

XXXIV. Reihe:

Verwandlung von Rechteck und schiefem Parallelogramm.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 21,50.

1111. **Rechteck**, nach der Länge halbiert *M* 1,50
1112. **Rechteck**, „ „ Breite „ „ 1,50
1113. **Rechteck**, „ „ Eckenlinie durchgeschnitten „ 1,50



Nr. 1111.



Nr. 1112.



Nr. 1113.



Nr. 1114.

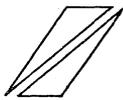


Nr. 1115.

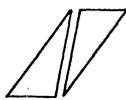
1114. **Rechteck**, durch eine Gerade vom Eck nach der Schmalseite hin durchgeschnitten „ 1,50
1115. **Rechteck**, zweimal schräg durchgeschnitten „ 2,50

Diese Rechtecke sind aus 8 mm dickem Birnbaumholz gefertigt; sie sind 27 cm lang und 15 cm breit. Ihre Teile sind, soweit möglich, durch Scharniere aneinander gehängt, andernfalls durch eingelassene Stifte aneinander festzustecken.

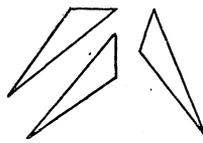
1116. **Schiefes Parallelogramm**, längs der längeren Eckenlinie durchgeschnitten „ 1,50



Nr. 1116.



Nr. 1117.



Nr. 1118.

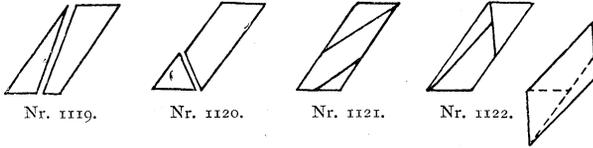
1117. **Schiefes Parallelogramm**, längs der kürzeren Eckenlinie durchgeschnitten „ 1,50
1118. **Drei ungleichseitige Dreiecke** zum Nachweis der Deckungsfähigkeit (Seiten = 20, 29, 32 cm) „ 2,50

Bei den Parallelogrammen 1116 und 1117 ist $g = 15$, $h = 27$, Schiefseite = 29 cm; sonst sind sie gefertigt wie die Rechtecke der

Nr.

vorigen fünf Nummern. — Von den Dreiecken 1118 sind Vorder- und Rückseite verschiedenfarbig, und zwar bei zweien gleichartig, dagegen beim dritten Dreieck sind die Farben vertauscht.

- 1119. **Schiefes Parallelogramm**, durch eine Gerade vom Eck nach der Schmalseite hin durchgeschnitten *M* 1,50
- 1120. **Schiefes Parallelogramm**, durch eine Gerade vom Eck nach der Langseite hin durchgeschnitten „ 1,50



- 1121. **Schiefes Parallelogramm**, zweimal durchgeschnitten (behufs Änderung einer Seitenlänge) „ 2,50
- 1122. **Schiefes Parallelogramm**, zweimal durchgeschnitten (behufs Änderung zweier Seitenlängen) „ 2,50

Diese Modelle Nr. 1119—1122 von Parallelogrammen haben dieselbe Größe wie die unter Nr. 1116 und 1117 und sind auch aus 8 mm dickem Birnbaumholz gefertigt.

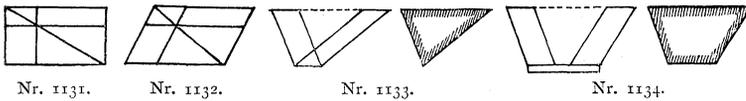
XXXV. Reihe:

Inhalt von Rechteck und schiefem Parallelogramm.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 13,20.

- 1131. Modell zum Satz von den sog. **Ergänzungsrechtecken** *M* 4,—
- 1132. „ „ „ „ „ „ **schiefen Ergänzungsparallelogrammen** „ 4,—

Bei Nr. 1131 und 1132 ist $g = 27$, $h = 18$ cm und bei Nr. 1132 ist die Schiefeite = 20 cm.



- 1133. **Gleichheit von Parallelogrammen** auf gemeinsamer Grundseite (mit beigegebenem schwarzen Pappdreieck zum Auflegen und Verschieben). „ 3,—
- 1134. **Gleichheit von Parallelogrammen** auf getrennt liegenden Grundseiten (mit beigegebenem schwarzen Papptrapez zum Auflegen und Verschieben). „ 3,—

Bei Nr. 1133 ist $g = 6$, $h = 21$, die Schiefeite = 28 cm.

Bei Nr. 1134 ist $g = 6 + 3 + 6$, $h = 21$ cm.

Die Modelle sind aus 8 mm dickem Birnbaumholz gefertigt; ihre Teilstücke sind durch eingelassene Stifte aneinander zu befestigen.

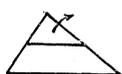
XXXVI. Reihe: Dreieck.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug \mathcal{M} 29,—.

Die Modelle sind aus 8 mm dickem Birnbaumholz gefertigt; ihre Teilstücke sind durch Scharniere aneinander befestigt, also drehbar. Die Seiten der Dreiecke dieser Reihe haben die Länge von 26 und 31 und 32 cm.

Nr.

1141. Dreieck, einmal parallel der Grundseite durchgeschnitten (die Höhe halbiert) \mathcal{M} 2,—
 1142. Dreieck, zweimal parallel der Grundseite durchgeschnitten (die Höhe gedrittelt) „ 3,—
 1143. Dreieck, dreimal parallel der Grundseite durchgeschnitten (die Höhe geviertelt) „ 4,20



Nr. 1141.



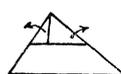
Nr. 1142.



Nr. 1143.

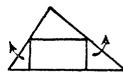


Nr. 1144.

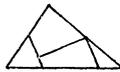


Nr. 1145.

1144. Dreieck, verwandelbar in ein Rechteck „ 3,—
 1145. Dreieck, „ „ „ „ „ 3,—
 1146. Dreieck, „ „ „ „ „ 3,—
 1147. Dreieck, „ „ „ „ „ 4,20



Nr. 1146.



Nr. 1147.



Nr. 1148.



Nr. 1149.



Nr. 1150.

1148. Dreieck, verwandelbar in ein anderes Dreieck „ 3,—
 1149. Dreieck, „ „ „ Trapez „ 2,—
 1150. Dreieck, „ „ „ „ „ 3,—

XXXVII. Reihe: Trapez und beliebiges Viereck.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug \mathcal{M} 15,—.

Für die Modelle dieser Reihe gilt i. a., was zu denen der 36. Reihe bemerkt ist. — Bei den Trapezen sind die Paralleelseiten = 32 und 5 cm, deren Abstand = 23,5 cm; bei den Vierecken sind die Seiten 30, 24, 17, 16 cm lang.

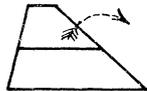
1161. Trapez, verwandelbar in ein schiefes Parallelogramm . . . \mathcal{M} 2,40
 1162. Trapez, „ „ „ „ „ 3,—
 1163. Trapez, „ „ „ „ „ 2,40



Nr. 1161.



Nr. 1162.



Nr. 1163.



Nr. 1164.



Nr. 1165.

- Nr.
 1164. **Beliebiges Viereck**, verwandelbar in ein Rechteck . . . *M* 4,—
 1165. **Beliebiges Viereck**, „ „ „ schiefes Parallelogramm . . . „ 4,—

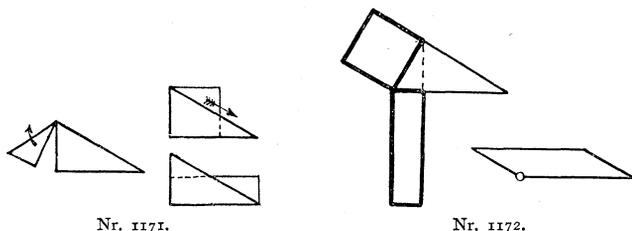
XXXVIII. Reihe:

Flächensätze beim rechtwinkligen Dreieck.

(Pythagoreischer Lehrsatz.)

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 33,50.

1171. Zum **Höhensatz** beim rechtwinkligen Dreieck (Seiten = 21, 28, 35 cm): a) Hauptdreieck; b) Verschiebbares Dreieck *M* 5,50

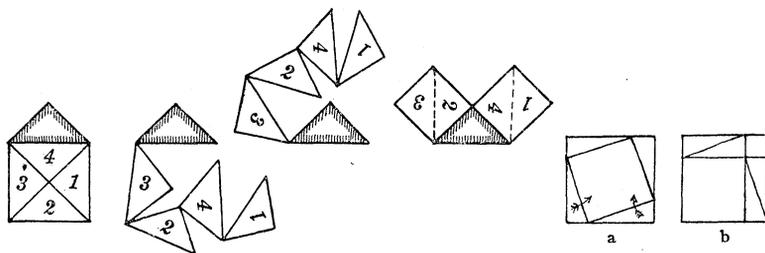


Nr. 1171.

Nr. 1172.

1172. Zum **Kathetensatz** beim rechtwinkligen Dreieck (Seiten = 10,2; 13,6; 17 cm): a) Hauptdreieck; b) Drehbares Parallelogramm „ 5,50

1173. Zum **Pythagoreischen Lehrsatz** (beim gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck). „ 5,40



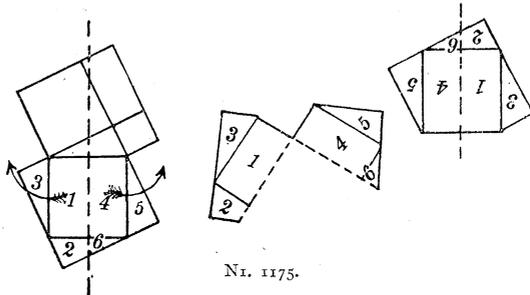
Nr. 1173.

Nr. 1174.

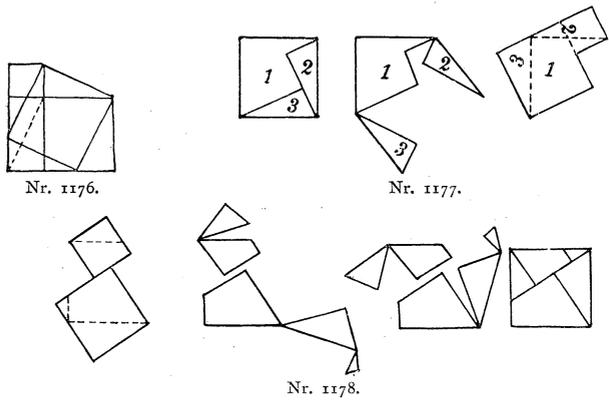
1174. Zum **Pythagoreischen Lehrsatz** (beim beliebigen rechtwinkligen Dreieck). *M* 2,50

Nr. 1174 besteht aus einem mit niederen Randleisten versehenen farbigen Brettchen und vier gleichen rechtwinkligen Dreiecken. Werden die letzteren nach Art der Figur a) eingelegt, so bleibt das Hypotenusenquadrat frei; werden sie aber nach Art von Figur b) eingelegt, so tritt auf dem farbigen Grund die Summe der Kathetenquadrate hervor.

- Nr.
 1175. Zum **Pythagoreischen Lehrsatz** (bei beliebigem rechtwinkeligem Dreieck) *M* 2,50



1176. Zum **Pythagoreischen Lehrsatz** (ebenso) „ 4,60
 1177. Zum **Pythagoreischen Lehrsatz** (ebenso) „ 3,20



1178. Zum **Pythagoreischen Lehrsatz** (ebenso) „ 6,—

Die sämtlichen Modelle der XXXVIII. Reihe (außer 1174) sind aus 8 mm dickem Birnbaumholz gefertigt; ihre Teilstücke sind, soweit zugänglich, durch Scharniere miteinander verbunden, also nach der Darstellung der vorstehenden Figuren drehbar und aus einer Anfangslage in die den Satz beweisende Endlage überführbar.

II. MODELLE FÜR DIE KÖRPERLICHE GEOMETRIE.

XXXIX. Reihe: Parallelfächner.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug P: *M* 26,—; D: *M* 80,—.

Die Modelle sind sowohl in Pappdeckel (P) ausgeführt (mit graublauem Überzug und roten Kanten), als auch, wo Preise angegeben sind, in gleicher Größe in $3\frac{1}{2}$ bis 4 mm starkem Messingdraht (D).

Nr.		P	D
1201.	a) Würfel = 1 cdm	<i>M</i> —,80	4,60
	b) Größerer Würfel, dessen Flächeneckenlinie = 32 cm „	2,40	—,—
102.	Derselbe (vgl. II. Reihe)	—,—	11,—
1202.	a) Höhere quadratische Säule (10/10/30 cm Kantenlänge)	1,20	6,—
	b) Niedere quadratische Säule (10/10/2 cm Kantenlänge)	1,50	3,60
	c) Niedere quadratische Säule (30/30/5 cm Kantenlänge)	2,—	—,—
1203.	a) Höherer Quader (10/20/30 cm Kantenlänge)	1,50	7,20
	b) Niederer „ (10/20/2 „ „)	1,50	—,—
1204.	a) Höherer (30 cm) aufrechter Parallelfächner auf schieferem Parallelogramm als Grundfläche (70^0) „	1,50	8,—
	b) Dasselbe wie a), jedoch niederer (nur 2 cm hoch) „	1,50	—,—
1205.	a) Höherer schiefer Parallelfächner auf Rechteckgrundfläche (10/20 cm), geneigt in der Richtung der größeren Grundkante (30 cm hoch)	1,50	9,—
	b) Dasselbe wie a) jedoch niederer (2 cm hoch), auf dessen kleinste Seitenfläche passend	1,50	—,—
1206.	a) Wie 1205 a), jedoch in der Richtung der kleineren Grundkante geneigt	1,50	9,—
	b) Dasselbe wie a), jedoch niederer (2 cm hoch), auf dessen kleinste Seitenfläche passend	1,50	—,—
1207.	a) Doppelt schiefer Parallelfächner auf Rechteckgrundfläche (10/20 cm, 30 cm hoch)	1,60	9,—
	b) Dasselbe wie a), jedoch niederer (2 cm hoch), auf dessen kleinste Seitenfläche passend	1,50	—,—
1208.	a) Schiefer Parallelfächner auf schieferem Parallelogramm, geneigt in der Richtung der kürzeren Grundkante (Höhe = 30 cm)	1,60	9,—
	b) Dasselbe wie a) (nieder)	1,50	—,—
1209.	Doppeltschiefer Parallelfächner auf schieferem Parallelogramm als Grundfläche (10/20/30 cm und Winkel der längsten Kante gegen die Ebene der beiden anderen Kanten = 100^0)	1,50	9,—

XL. Reihe: Prismen.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug P: \mathcal{M} 19,—; D: \mathcal{M} 65,—.

Die Modelle haben, soweit nicht anders angegeben, eine Höhe von 30 cm, und sind sowohl in Pappdeckel (P) (mit graublauem Überzug und roten Kanten) ausgeführt als auch (abgesehen von Nr. 1230) in gleicher Größe in $3\frac{1}{2}$ bis 4 mm starkem Messingdraht (D).

Nr.		P	D
1221.	a) Hohes aufrechtes Prisma auf gleichseitigem Dreieck ($s = 18$ cm) als Grundfläche \mathcal{M}	1,50	5,50
	b) Dasselbe wie a), jedoch nieder (2 cm hoch) „	1,50	3,—
1222.	Aufrechtes Prisma auf gleichschenkelig-rechtwinkligem Dreieck als Grundfläche (10/10/14,2 cm) = Hälfte von 1202 a) „	1,50	5,—
1223.	Aufrechtes Prisma auf rechtwinkligem Dreieck als Grundfläche (10/20/14,2 cm) = Hälfte von Nr. 1203 a) „	1,50	6,—
1224.	Aufrechtes Prisma auf spitzwinkligem Dreieck als Grundfläche = Hälfte von Nr. 1204 a, längs der kürzeren Eckenlinie durchgeschnitten „	1,50	6,—
1225.	Aufrechtes Prisma auf stumpfwinkligem Dreieck als Grundfläche = Hälfte von Nr. 1204 a, längs der längeren Eckenlinie durchgeschnitten „	1,50	6,—
1226.	Aufrechtes Prisma auf ungleichseitigem Dreieck als Grundfläche (16/19/22 cm) „	1,50	6,—
1227.	Schiefes dreiseitiges Prisma auf Grundfläche wie Nr. 1225 „	2,50	7,40
1228.	a) Aufrechtes regelmäßiges sechsseitiges Prisma ($s = 8$ cm) „	1,60	8,—
	b) Dasselbe wie a), jedoch nur 2 cm hoch „	1,50	5,—
1229.	Aufrechtes Prisma auf unregelmäßigem Sechseck (5/9/7/10/8/13 cm) als Grundfläche „	1,60	8,—
1230.	Aufrechtes Prisma auf ungleichschenkligen Trapez (20/11/6/15 cm) als Grundfläche (Dammbau) „	2,50	2,50

XLI. Reihe: Zylinder.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug \mathcal{M} 30,—.

Die Modelle sind 30 cm hoch und sind zum Teil in Pappdeckel (P) (mit graublauem Überzug und roten Kanten) ausgeführt, zum Teil auch in $3\frac{1}{2}$ bis 4 mm starkem Messingdraht (D). Die Netze sind in Wachstuch ausgeführt.

		P	D
1241.	a) Aufrechter Kreiszyylinder ($r = 8,5$ cm) \mathcal{M}	2,50	—,—
	b) Netz zu a) „	1,—	—,—
1242.	a) Aufrechter Kreiszyylinder ($r = 8,5$ cm), durchgeschnitten längs einer Ellipse ($2a = 26$, $2b = 17$ cm),		

Nr.	P zugleich verwendbar als schiefer elliptischer Zylinder.	P	D
	Zylinder	<i>M</i>	4,— —,—
	b) Netz zu a).	„	1,— —,—
1243.	a) Schiefer Kreiszyylinder	„	3,— —,—
	b) Netz zu a).	„	1,— —,—
1244.	Beliebiger aufrechter Zylinder auf \sim -förmiger Grundkurve	„	—,— 8,50
1245.	Beliebiger schiefer Zylinder auf \sim -förmiger Grundkurve	„	—,— 10,—

XLII. Reihe: Pyramiden und Pyramidenstumpfe.

Bei gleichzeitigem Bezug der ganzen Reihe 5% Ermäßigung.

Die Vollpyramiden sind (außer Nr. 1251—1253) 30 cm hoch und sind sowohl in Pappdeckel (P) (mit graublauem Überzug und roten Kanten) ausgeführt als auch, wo Preise angegeben sind, in 3½ bis 4 mm starkem Messingdraht (D).

		P	D
1251.	Regelmäßiger Vierflächner (Tetraeder) ($k = 25$ cm)	<i>M</i>	1,60 —,—
1252. a)	Regelmäßiger Vierflächner ($k = 25$ cm) mit einer Seitenflächenhöhe und mit der zugehörigen Körperhöhe	„	—,— 6,60
b)	Regelmäßiger Vierflächner ($k = 25$ cm) mit zwei in einer Kantenmitte zusammentreffenden Seitenhöhen und mit dem Abstand dieser Kante von der Gegenkante	„	—,— 8,—
c)	Regelmäßiger Vierflächner ($k = 25$ cm) mit zwei in einer Kantenmitte zusammenstoßenden Seitenflächenhöhen und mit den zwei zugehörigen Körperhöhen	„	—,— 7,30
d)	Unregelmäßiger Vierflächner mit zwei Seitenhöhen und zwei windschiefen Körperhöhen	„	—,— 8,—
1253. a) b) und c)	Drei unregelmäßige Vierflächner (Grundkanten = 22/34/42 cm; Seitenkanten = 32.2/21,3 13,8 cm; Höhe = 12 cm): zwei derselben (rotlackiert) sind deckungsfähig, das dritte (blau) ist deren Spiegelbild. Je 3 Modelle zusammen.	„	5,— 15,—
1254. a)	Aufrechte Pyramide auf regelmäßigem Dreieck ($s = 22$ cm) als Grundfläche	„	1,50 5,—
b)	Wie a), jedoch parallel der Grundfläche durchgeschnitten	„	3,— 7,—
c)	Wie a) mit Höhe	„	—,— 8,—
1255.	Aufrechte quadratische Pyramide (Grundkante = 18, Höhe = 30 cm)	„	1,60 5,60

Nr.		P	D
1256.	Aufrechte quadratische Pyramide (Grundkante = 18, Höhe = 13 cm)	\mathcal{M} 1,60	5,—
1257.	Aufrechte quadratische Pyramide (Grundkante = 18, Höhe = 7,5 cm)	„ 1,60	5,—
1258.	Dasselbe wie 1255, jedoch parallel der Grundfläche durchgeschnitten	„ 3,—	—,—
1259.	Aufrechte Pyramide auf regelmäßigem Fünfeck ($s = 11$ cm) als Grundfläche, parallel der Grundfläche durchgeschnitten	„ 3,20	—,—
1260.	a) Aufrechte unregelmäßig fünfseitige Pyramide mit der Spitze über dem Innern des Kreisfünfecks ($r = 11$; Grundkanten = 19/10/11/15/7,5 cm) als Grundfläche	„ 1,70	7,50
	b) Das Drahtmodell mit dem der Grundfläche umgeschriebenen Kreis	„ —,—	9,—
1261.	a) Überhängende fünfseitige Pyramide mit der Grundfläche wie in Nr. 1260.	„ 1,70	8,—
	b) Das Drahtmodell mit dem der Grundfläche umgeschriebenen Kreis	„ —,—	9,50
1262.	Aufrechte regelmäßige sechsseitige Pyramide (Grundkante = 11, Höhe = 30 cm)	„ 1,70	7,50
1263.	Dasselbe wie 1262, jedoch parallel der Grundfläche durchgeschnitten	„ 3,20	—,—

XLIII. Reihe: Kegel und Kegelstumpfe.

Bei gleichzeitigem Bezug der ganzen Reihe 5% Ermäßigung.

Die Modelle sind 30 cm hoch und sind in Pappdeckel (P) (mit graublauem Überzug und roten Kanten) ausgeführt, zum Teil auch in $3\frac{1}{2}$ bis 4 mm starkem Messingdraht (D).

		P	D
1271.	a) Aufrechter Kreiskegel ($r = 8,5$ cm)	\mathcal{M} 1,70	—,—
	b) Netz dazu	„ 1,—	—,—
1272.	a) Dasselbe wie 1271 a), jedoch parallel der Grundfläche durchgeschnitten	„ 3,—	9,20
	b) Netz dazu	„ 1,—	—,—
1273.	a) Schiefer Kreiskegel ($r = 8,5$ cm)	„ 2,—	—,—
	b) Netz dazu	„ 1,—	—,—
	c) Ansatz zu a) behufs Ergänzung des schiefen Kreiskegels zu einem aufrechten elliptischen Kegel	„ 1,60	—,—
	d) Wie a) mit Schnittkreis parallel der Grundfläche	„ —,—	21,—
	e) Zwei Drahtkreise ($r = 4$ und $r = 6$ cm) als Wechselschnittkreise auflegbar auf a)	„ 1,60	—,—

XLIV. Reihe: Kugel und ihre Teile sowie Ellipsoide.Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 93,—.

Die Modelle sind sämtlich aus schönem Holz angefertigt und ruhen auf schwarzgebeizten hölzernen Untersätzen. Der Durchmesser der Kugeln ist = 16 cm.

Nr.		
1281.	Kugeln in zwei Halbkugeln zerlegbar	<i>M</i> 9,—
1282.	Kugel mit ausgeschnittenem Kugelschnitt (körperl. Zweieck), dessen Winkel = 43^0 ist	„ 11,—
1283.	Kugel mit abtrennbarer körperlicher Haube ($h = 3$ cm) und mit abtrennbarer körperlicher Zone ($h = 3$ cm). . .	„ 13,—
1284.	a) Kugel mit aushebbarem Ausschnitt (Sektor), dessen Mittelpunktswinkel = 37^0 ist	„ 11,—
	b) Kugel mit aushebbarem Ausschnitt (Sektor), dessen Mittelpunktswinkel = 100^0 ist	„ 11,—
	c) Kugel mit aushebbarem Ausschnitt (Sektor), dessen Mittelpunktswinkel = 166^0 ist	„ 11,—
1285.	Umdrehungsellipsoid (Sphäroid) mit der kleinen Achse (= 8 cm) als Drehachse	„ 5,60
1286.	Umdrehungsellipsoid (Sphäroid) mit der großen Achse (16 cm) als Drehachse.	„ 5,60
1287.	Dreiaxsiges Ellipsoid (Achsen = 16, 12, 8 cm)	„ 14,50
1288.	Eiförmiger Körper (Längsachse = 16 cm, größte Dicke = 12 cm)	„ 6,—

XLV. Reihe: Kugelzweiecke und Kugeldreiecke.Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 44,50.

Die Modelle sind aus starkem Zinkblech gefertigte Teile einer Kugelfläche, deren Durchmesser = 34 cm beträgt; bei jedem Modell sind die nach den Ecken gehenden Halbmesser in Draht beigefügt und sind schwarz gefärbt, während die Außenseite der Kugelflächenteile hellgrau und deren Innenseite rot gehalten ist.

1301.	Kugelzweieck (90^0) = ein Viertel der Kugelfläche . . .	<i>M</i> 6,—
1302.	a) Kugelzweieck (40^0) = ein Neuntel der Kugelfläche . .	„ 4,—
	b) Dasselbe wie a), nur in Draht	„ 3,20
1303.	Dreimal rechtwinkeliges Kugeldreieck = ein Achtel der Kugelfläche	„ 4,—
1304.	Zweimal rechtwinkeliges Kugeldreieck (50^0) [vom Pol bis zum Äquator reichend]	„ 2,—
1305.	Einmal rechtwinkeliges Kugeldreieck	„ 2,—
1306.	Spitzwinkeliges Kugeldreieck	„ 2,—

Nr.		<i>M</i>	
1307.	Stumpfwinkeliges Kugeldreieck	<i>M</i>	2,—
1308.	Gleichseitiges Kugeldreieck	„	2,—
1309.	a) Zwei festverbundene ungleichseitige Gegendreiecke der Kugelfläche; dazu ein mit deren einem deckungsfähiges loses Dreieck	„	7,50
	b) Dazu die entsprechenden Scheiteldreikante (in Draht)	„	6,—
	c) Dazu die in die Drahtmodelle b) einsteckbaren Dreikante (in Pappdeckel).	„	2,—
	d) Dazu ein umklappbares Dreikant aus Blech, das in beide spiegelgleichen Dreikante eingesteckt werden kann, je nachdem es auf die eine oder andere Seite geklappt wird.	„	5,—
1310.	Kugel, durch drei ungleichmäßig liegende Hauptkreise dargestellt (in Draht) mit den verschiedenen Dreiecken).	„	1,25
1311.	Kugelhaube (Durchmesser des Grundkreises = 20,3 cm) [Kugelspiegel!]	„	1,25
1312.	Kugelhaube (Durchmesser des Grundkreises = 10,2 cm) [Kugelspiegel!]	„	1,50

XLVI. Reihe: Geometrische Verwandtschaften.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 112,—.

Auf einem rechteckigen weiß gestrichenen Holzboden (46,5 · 25,5 cm) steht auf Stiften, doch wegnehmbar, ein hölzernes dreiseitiges Prisma, das (sowie eine hölzerne dreiseitige Pyramide, die) mittels einer Glasplatte durchschnitten erscheint. Nach Wegnahme des Holzkörpers läßt sich die in Führungsstangen bewegliche Glasplatte und die auf ihr abgebildete Schnittfigur in die Holzbodenebene der Grundfigur bringen, um die Verwandtschaftslage der beiden Dreiecke in der Ebene herzustellen.

Jedes Modell liegt in einem 67 cm langen, 27 cm breiten und 3,5 cm hohen Pappkasten mit Deckel.

1321.	Verwandtschaft der Deckungsfähigkeit (Kongruenz) und der Ähnlichkeit	<i>M</i>	45,—
1322.	Verwandtschaft der Affingleichheit	„	36,—
1323.	Verwandtschaft der Affinität	„	36,—

XLVII. Reihe: Perspektive Abbildungen des Kreises

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 250,—.

Auf einer wagerechten Ebene ist ein Kreis in weißer Farbe aufgetragen und dieser wird aus einem Augenpunkt auf eine aufrechte Tafel in eine mit roter Farbe aufgetragenen Ellipse, Parabel oder Hyperbel projiziert: Der Augenpunkt erscheint als Öffnung

Nr.

in einem Rahmen vor der Tafel und durch ihn, sowie durch eine Anzahl Punkte des Kreises und der Bildkurve sind Fäden zur Darstellung des Sehstrahlenkegels gezogen. Im Ellipsen- und Parabelmodell ist als Tafel eine in Messingrahmen eingespannte Glas- oder Zelluloidplatte gewählt, im Hyperbelmodell ein schwarz gebeiztes Brett, während hier die Kreisebene zum Teil aus Glas oder Zelluloid besteht, so daß man in allen drei Modellen durch die Öffnung den weißen Kreis mit dem roten Kegelschnitt zur Deckung bringen kann. Im Hyperbelmodell ist eine Kugelhaube herausnehmbar so angebracht, daß sie durch den Sehstrahlkegel in einem wagerechten Kreis berührt wird. So stellt dieses Modell z. B. einen Kuppelbau dar, auf dem sich der Beschauer stehend denkt, und zeigt anschaulich den Fall, wo der Kugelumriß als Hyperbelstück gezeichnet werden muß. — Jedes Modell ist durch einen Überdeckkasten aus Pappdeckel geschützt.

1331. Perspektive Abbildung des Kreises in eine Ellipse. . . . *M* 90,—
 1332. Perspektive Abbildung des Kreises in eine Parabel . . . „ 90,—
 1333. Perspektive Abbildung des Kreises in eine Hyperbel und zugleich des Kugelumrisses als Hyperbelstück „ 90,—

XLVIII. Reihe: Kegelschnitte.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug *M* 290,—.

A) Ebene Schnitte des Kreiszyinders und des Kreiskegels.

Auf einem Holzbrett sind Zylinder und Kegel durch starke farbige Seidenfäden dargestellt und die schneidende Ebene durch eine Glas- oder Zelluloidplatte; eingeschoben sind (gemäß der Beweisführung von Quetelet-Dandelin) rotgefärbte Holzkugeln. — Jedes Modell ist durch einen Überdeckkasten aus Pappdeckel geschützt.

1341. Ellipsenschnitt beim Zylinder (Gesamthöhe = 37,5 cm) . *M* 63,—
 1342. Ellipsenschnitt beim Kegel (Gesamthöhe = 35 cm) . . . „ 58,—
 1343. Parabelschnitt beim Kegel (Gesamthöhe = 32 cm) . . . „ 46,—
 1344. Hyperbelschnitt beim Kegel (Gesamthöhe = 45 cm). . . „ 68,—

B) Kegelschnittschablonen zum Wandtafelzeichnen.

Die Schablonen sind aus drei Lagen von Furnierholz verleimt, zur Erzielung geringeren Gewichtes durchbrochen und mit bequemen Handgriffen versehen. Die Brennpunkt- und Mittelpunktstellen sind durchlöchert.

1351. Ellipsenschablone ($2a = 50$, $2b = 36$ cm) *M* 20,—
 1352. Parabelschablone (Abstand des Brennpunktes vom Scheitel = 7,5 cm); Gesamtlänge = 59, Breite = 86 cm . . . „ 20,—
 1353. Hyperbelschablone (Abstand der Brennpunkte vom Scheitel = 10 cm); Gesamtlänge = 67, Breite = 64 cm. . . . „ 30,—

Auch die Asymptotenlagen sind durch Randeinschnitte angegeben.

SACHÜBERSICHT.

Abkürzungen: bew., dr. bedeuten bewegliche bzw. drehbare Modelle. Die großen Buchstaben beziehen sich auf den Stoff der Herstellung, und es bedeuten B = Blech, D = Draht, F = Faden, H = Holz, P = Pappe (Papier), S = Stab, Z = Zelluloidtafeln. Sind zwei dieser Buchstaben ohne Komma nebeneinandergestellt, so sind beiderlei Stoffe zur Herstellung eines und desselben Modells verwandt, steht ein Komma dazwischen, so ist das Modell in dem einen oder anderen Stoff zu haben.

Die Zahlen bedeuten die Seiten des Verzeichnisses.

- Abwickelbare Flächen FD 24/27, B, P 36/38; — der Raumkurven 3. Ord. 29, 30.
- Abwicklung des Zylinders D 42, vgl. auch „Netz“.
- Affinität ebener Figuren bew. Z 60.
- Ähnlichkeit ebener Figuren bew. Z 60.
- Biegung der Flächen B 36.
- Bruchrechnen H 47.
- Burmesters System ähnlicher und ähnlich liegender Flächen 2. Ord., die sich affin verändern 16, 17.
- Clebschs Satz über CREMONAS Regelflächen 45.
- Cremonas Regelflächen 4. Ord. 42, 45.
- Dandelin, ebene Schnitte der Drehkegel FZH 61.
- Darboux, Gelenkvierecke 35; —, Planigraph S 41, 43, 45.
- Dodekaeder D 7; — mit 5 Würfeln FD 8; — im Ikosaeder FD 8; — mit Ikosaeder FD 8.
- Drehflächen dr. D 19.
- Drehkegel bew. F 12, S 41, P, D 58; — mit Ebene geschnitten nebst berührenden Kugeln FZH 61.
- Drehregelfläche bew. F 12; — bew. S 13, 41, 42.
- Dreiecke, deckungsfähige H 50; —, Flächenverwandlung bew. H 52, 53.
- Eiförmiger Körper H 59.
- Ellipse als Kreisbild D 6, FZH 60, 61; — Schablone H 61; —, räumliche F, D 29.
- Ellipsoid mit 3 Hauptschnitten D 10; — mit Kreisschnitten bew. D 15; — H 59.
- Flächen, abwickelbare, geradlinige und nicht-geradlinige bew. B, P 36; —, gelenkige bew. D, S 41/45; —sätze (rechtwinklige Dreiecke) bew. H 53; —verwandlung bew. H 50; — 2. Ord. 10/18, 41/46.
- Fünfeck, regelm. D 5.
- Fünfehnstrahl, regelm. räuml. FD 8, 9.
- Gelenk, geschränktes 14, S 41; —flächen bew. D 41/46; —vielfache bew. B 36; —vierecke bew. H 32, SF 32.
- Grashofs Gelenkviereck 32/35.
- Gruppen der regelm. Vielfache 9.
- Halbflächner des Oktaeders FD 8.
- Harmonisch zugeordnete Flächen 2. Ord. D 10, 11.
- Hauptlinien zur Darstellung einer Ebene in Grund- und Aufriß SF 32, 33.
- Haupttangentialkurven der Schraubflächen 22, 23.
- Helligkeitsstufen der Kugel D 21.
- Hemiedrie des Oktaeders FD 8.
- Henricis bew. Regelflächen 2. Ord. S 13, 14, 41/44.
- Holzscheiben für das Bruchrechnen H 47.
- Holzstäbe für das Bruchrechnen SH 48.
- Hyperbel, rechth. dr. D 5; — als Kreisbild und als scheinbarer Kugelumriß FZH 60, 61; — Schablone H 61; —, räumliche D, F 29/31.

- Hyperboloid mit Hauptschnitten D 10;
— mit Kreisschnitten bew. D 15; —, gelenkiges bew. 41, 42; —, vgl. auch „Drehregelfläche“.
- Ikosaeder D 7; — im Dodekaeder FD 8; mit Dodekaeder FD 8.
- Kegel mit Kreisschnitten, bew. D 15;
— als Drehregelfläche bew. F 12, S 41;
— P, D 58; — in Ellipse, Parabel und Hyperbel geschnitten FZH 60, 61.
- Kegelschnitte zum Projizieren D 5, 6;
— projektiv und ähnlich erzeugt bew. S 41, 43; — als perspektive Bilder des Kreises FZH 60, 61; — als Schnitte des Kreiskegels ZHF 61; — Schablonen H 61.
- Keplers regelm. Vielfache FD 8, 9.
Kongruenz ebener Figuren bew. Z 60.
- Kreis mit Quadrat dr. D 5; —, perspektiv abgebildet FZH 61.
- Kreiskegel als Drehregelfläche bew. F 12, S 41; — mit Ebene geschnitten nebst berührenden Kugeln FZH 61.
- Kreisring mit Kreisschnitten dr. D 19.
- Kreisscheiben in Sektoren geteilt H 47.
- Kreisschnitte der Flächen 2. Ord. bew. D 15; — des Kegels D 58.
- Kreistangentenvierecke bew. H 32/35.
- Kreiszylinder bew. F 12, bew. S 41;
— mit Ebene geschnitten nebst berührenden Kugeln FZH 61.
- Kubikdezimeter B 49.
- Kubikmeter S 48.
- Kugel mit 3 senkrechten Großkreisen und 3 Durchmesser DF 10; — mit 3 beliebigen Großkreisen D 60; — mit Parallelkreisen D 19; —, geteilt in Sektoren H 47; — und ihre Teile H 58.
- Kugelhaube B 60.
- Kugelzweiecke und -dreiecke B D 59, 60.
- Kuppe bew. B 36.
- Kurvenzeichner H 33.
- Kürzeste Linie B, F 36.
- Maße 48, 49.
- Meßinstrumente 49, 50.
- Netz des geraden und schiefen Kreiszylinders 56; — des Kegels 58.
- Neunflach bew. B 36.
- Oktaeder D 7; — im Würfel FD 8.
- Parabel D 5; — als Kreisbild FZH 60, 61;
— Schablone H 61; —, räumliche D, F 29/31; —, hyperbol. (räuml.) D, F 29/31.
- Paraboloid mit 2 Hauptschnitten D 10;
— mit 2 Scharen Erzeugender bew. F 12, 13, S 13, 14, 41, 42; — mit Kreisschnitten bew. D 15/18; — mit je einer Schar von Erzeugenden und von Parabeln bew. D 41/46.
- Parallelfächner D, P 54, 55.
- Parallelogramm, Gelenk-, bew. H 32;
—, Flächenverwandlung bew. H 50, 51.
- Parallelprojektion ebener Figuren 5, 6.
- Perspektive Abbildung des Kreises FZH 60, 61.
- Planigraph nach DARBOUX, bew. S 41.
- Platons regelmäßige Vielfache D 7.
- Poinsots regelmäßige Vielfache DF 8, 9.
- Prismen P, D 55, 56.
- Pyramiden und Pyramidenstumpfe P, D 57.
- Pythagoras' Lehrsatz bew. H 53, 54.
- Quadrat D 5.
- Quadratmeter P, D 48.
- Quetelet, ebene Schnitte der Drehkegel FZH 61.
- Raumkurven, Singularitäten für endliche und unendlich ferne Elemente FD 24;
— 3. Ord. FD 29/31; — abwickelbare Flächen bew. B 36; — mit konstanter Krümmung B 36, 37.
- Rechenstäbchen zum Zehnergesetz H 47.
- Rechtecke, Flächenverwandlung bew. H 50, 51.
- Regelflächen 2. Ord. bew. F 12, S 13, 14, 41, 42; —, abwickelbare B 36, 37;
—, Schraubenfl. dr. D 19, 20, bew. D 42, 46.
- Reuleauxs Gelenkviereck bew. H 32/35;
— Tourenverdoppler bew. H 35.
- Rhombus, gelenkig bew. H 32, 33, SF 32, 33.
- Schmiegungebenen der Raumkurven 24/27, 36/38.
- Schmiegungstetraeder der Raumkurven 3. Ord. 30.
- Schraubenflächen, geradlinige mit Haupttangentialkurven D 20; — Röhrenfl.

- mit Kreisschnitten D 20; vgl. auch „Wendelfläche“.
- Sechseck regelmäßiges D 5.
- Sechseck bew. B 36.
- Sechsstahl regelm. räuml. FD 8.
- Singularitäten der Raumkurven für endliche und unendlich ferne Elemente FD 24.
- Sinuslinie D 5; —, Drehfläche der affin veränderten dr. D 19.
- Spiegelachsen der Gruppen der regelm. Vielfache FD 9; — der Raumkurven 3. Ord. 30.
- Spiegelungen und Singularitäten der Raumkurven 26, 27.
- Staudt, v. Kennzeichen der Singularitäten der Raumkurven 25/27.
- Steiners Konstruktion der dreigespitzten Zyklode auf Raumkurven 3. Ord. übertragen 30, 31; — Sätze über Kreistangentenvierecke vervollständigt 34.
- Tangentenfläche der Raumkurven FD 24/27; — der Raumkurven 3. Ord. FD 29, 30, 36, 37.
- Tetraeder, regelm. D 7, P 57; — im Würfel FD 8, 9; — mit Höhen D 57; —, unregelm. mit Höhen D 57.
- Torsion B 36, 37.
- Trapez, Flächenverwandlung bew. H 52.
- Urne, dr. D 19.
- Verwandtschaften, geometrische bew. ZH 60.
- Vielfache, regelm. Platons D 7, Keplers und Poinots FD 8, 9, zerfallende FD 8, 9; —, Gelenk- B 36.
- Vierecke, Gelenk- bew. H 32; — Flächenverwandlung bew. H 53.
- Vierfläche, Vierflächner vgl. Tetraeder.
- Vierkante, achsenspiegelig bew. B 36.
- Voßsche Flächen B 36, 38/40.
- Wendelfläche mit Erzeugenden und Schraubenlinien dr. D 19, als Gelenkfläche bew. D 42; — als Gelenkvielfach bew. B 36.
- Wiener, Chr. Kennzeichen der Singularitäten der Raumkurven 25; — nichtgeradlinige abwickelbare Flächen P 38.
- Würfel D 7, 59, P 59; — mit Oktaeder und 2 Tetraedern FD 8.
- Zentralprojektion des Kreises FZH 60, 61.
- Zifferblatt H 49.
- Zwilling (Gelenkviereck) bew. H 32, 35.
- Zylinder mit Kreisschnitten bew. D 15; — als Drehregelfläche bew. F 12, S 41; — P, D 56; — mit Ebene geschnitten nebst berührenden Kugeln FZH 61.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

- Beyel, Dr. Chr.**, Dozent am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich, darstellende Geometrie. Mit einer Sammlung von 1800 Dispositionen zu Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. Mit 1 Tafel. [XII u. 190 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. *M* 3.60.
- Bonola, R.**, Professor an der Scuola Normale zu Pavia, die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. H. Liebmann, Professor an der Universität München. Mit 76 Figuren. [VIII u. 245 S.] 8. 1908. In Leinwand geb. *M* 5.—
- Borel, Dr. E.**, Professor an der Sorbonne zu Paris, die Elemente der Mathematik. In 2 Bänden. Deutsche Ausgabe von Dr. P. Stäckel, Professor an der Techn. Hochschule in Karlsruhe i. B. In Leinw. geb.
I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] gr. 8. 1908. *M* 8.60.
II. — Geometrie. Mit 403 Figuren. [XII u. 324 S.] gr. 8. 1909. *M* 6.40.
- Brückner, Professor Dr. M.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Bautzen, Vielecke und Vielfache; Theorie und Geschichte. Mit zahlreichen Figuren und Tafeln. [VIII u. 227 S.] 4. 1900. Geb. *M* 16.—
- v. Dalwigk, Prof. Dr. F.**, Privatdozent an der Universität Marburg a. L., Vorlesungen über darstellende Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.
I. Band: Die Methoden der Parallelprojektion. Mit 184 Figuren. [XVI u. 364 S.] 1911. *M* 13.— II. Band. In Vorbereitung.
- Detle, Wilhelm**, Professor am Städt. Realgymnasium zu Elberfeld, analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit 45 Figuren. [VI u. 232 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb. *M* 4.40.
- Enriques, Dr. F.**, Professor an der Universität Bologna, Fragen der Elementargeometrie. Aufsätze von U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Caldò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali, gesammelt und zusammengestellt von Federigo Enriques. Deutsche Ausgabe. In 2 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb.
I. Teil: Die Grundlagen der Geometrie. Deutsch von Professor Dr. H. Thieme, Direktor des Realgymnasiums in Bromberg. Mit 144 Figuren. [X u. 366 S.] 1911. *M* 10.—
II. — Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Deutsche Ausgabe von Dr. Hermann Fleischer in Königsberg. Mit 135 Figuren. [XII u. 348 S.] 1907. *M* 9.—
- Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsch von Dr. Hermann Fleischer in Königsberg i. Pr. Mit einem Einführungswort von F. Klein und 187 Figuren. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. Geh. *M* 8.—, in Leinw. geb. *M* 9.—
- Erler, Dr. W.**, die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehranstalten. 7. Auflage, besorgt von Dr. M. Zacharias, Oberlehrer am Humboldt-Gymnasium zu Berlin. Mit 31 Figuren. [VI u. 66 S.] gr. 8. 1911. Kart. *M* 1.50.
- Fiedler, W.**, vorm. Professor am Polytechnikum zu Zürich, die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen und zum Selbststudium. Mit Figuren und Tafeln. In 3 Teilen. gr. 8.
I. Teil. Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektivischen Geometrie. 4. Auflage. [XXIV u. 431 S.] 1904. Geh. *M* 10.—, in Leinwand geb. *M* 11.—
II. — Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 3. Auflage. [XXXIII u. 560 S.] 1885. Geh. *M* 14.—, in Leinwand geb. *M* 15.40.
III. — Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 3. Auflage. [XXX u. 660 S.] 1888. Geh. *M* 16.—, in Leinwand geb. *M* 17.40.
- Fort, O., und O. Schlömilch**, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Teile. Mit Textfiguren. gr. 8. Geh. *M* 9.—, in Leinwand geb. *M* 10.60.
I. Teil: Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort. 7. Auflage von Dr. R. Heger, Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden. [XVII u. 268 S.] 1904. Geh. *M* 4.—, geb. *M* 4.80.
II. — Analytische Geometrie des Raumes von Dr. O. Schlömilch. 6. Auflage von Dr. R. Heger. [VIII u. 338 S.] 1898. Geh. *M* 5.—, in Leinwand geb. *M* 5.80.
- Ganter, Dr. H.**, Professor an der Kantonschule zu Aarau, und Dr. F. Rudio, Professor am Polytechnikum zu Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit vielen Figuren und Übungsbeispielen. In 2 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb. je *M* 3.—
I. Teil. Die analytische Geometrie der Ebene. 7. Auflage. Mit 53 Fig. [VIII u. 190 S.] 1910.
II. — Die analytische Geometrie des Raumes. 4. Auflage. Mit 20 Fig. [Xu. 194 S.] 1908.

- Grundlehren der Mathematik.** Für Studierende und Lehrer. In 2 Teilen.
Mit vielen Figuren. gr. 8. In Leinwand geb.
- I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Bearbeitet von E. Netto und C. Färber. 2 Bände.
- I. Band: Arithmetik. Bearbeitet von Dr. Carl Färber, Professor an der Luisenstädtischen Oberrealschule in Berlin. Mit 9 Figuren. [XV u. 410 S.] 1911. Geh. *M* 9.—
- II. — Algebra. Von E. Netto in Gießen. [In Vorbereitung.]
- II. Teil: Die Grundlehren der Geometrie. Bearbeitet von W. Frz. Meyer und H. Thieme. 2 Bände.
- I. Band: Die Elemente der Geometrie. Von Professor Dr. Hermann Thieme, Direktor des Realgymnasiums zu Bromberg. Mit 323 Figuren. [XII u. 394 S.] 1909. *M* 9.—
- II. — Die geometrischen Gebilde vom Standpunkte der Verwandtschaften. Von Frz. Meyer in Königsberg i. Pr. [In Vorbereitung.]
- Hauck, Dr. Guido,** weiland Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin, Vorlesungen über darstellende Geometrie, unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technik. Herausgegeben von Alfred Hauck, Direktor der Kgl. Realschule in Schönlanke 2 Bände. Erster Band. Mit 650 Figuren. [XII u. 339 S.] 1912. Geh. *M* 10.—, in Leinwand geb. *M* 12.—
- Heffter, Dr. L.,** Professor an der Universität Kiel, und Dr. C. Koehler, Prof. an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. In 2 Bänden.
- I. Band. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren. [XVI u. 526 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. *M* 14.—
- II. — Geometrie im Bündel und im Raume. [In Vorbereitung.]
- Henrici, Julius,** Professor am Gymnasium zu Heidelberg, u. Geheimer Hofrat P. Treutlein, Direktor der Goetheschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. In 3 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb. *M* 9.—
- I. Teil. Gleichheit der Gebilde in einer Ebene und deren Abbildung ohne Maßänderung. Nebst einer Aufgabensammlung. 4. Auflage. Mit 192 Figuren. [VIII u. 139 S.] 1910. *M* 2 40
- II. — Ähnliche und perspektive Abbildung in der Ebene (Kegelschnitte, Berechnungen der ebenen Geometrie, Trigonometrie) nebst einer Aufgabensammlung. 3. Auflage. Mit 185 Figuren und 1 Karte. [VIII u. 240 S.] 1907. *M* 3 60.
- III. — Die Gebilde des körperlichen Raumes. Abbildung von einer Ebene auf eine zweite. (Kegelschnitte.) 2. Auflage. Mit 134 Figuren. [VII u. 192 S.] 1901. *M* 3 50.
- Hesse, Dr. O.,** weil. Professor am Kgl. Polytechnikum zu München, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 4. Auflage, revidiert und ergänzt von Geh. Hofrat Dr. S. Gundelfinger, weil. Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. [VIII u. 251 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. *M* 6.—
- Hilbert, Geheimer Regierungsrat Dr. D.,** Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Dritte Auflage. Mit zahlreichen Figuren. [VI u. 279 S.] 8. 1909. In Leinwand geb. *M* 6.—
- Hochheim, Dr. Adolf,** Professor und Königl. Provinzial-Schulrat zu Berlin, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. 3 Hefte, in je 2 Teilen. gr. 8.
- Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. 4., vermehrte Auflage, bearbeitet von Dr. Frz. Hochheim in Weissenfels. 1911. In Leinwand geb.
- A. Aufgaben. [VI u. 104 S.] *M* 2 40. B. Auflösungen. [136 S.] *M* 2 60.
- Heft II. Die Kegelschnitte. Abteilung I. 3., vermehrte Auflage, bearbeitet von Oswald Jahn in Halle a. S. und Dr. Franz Hochheim in Weissenfels.
- A. Aufgaben. [IV u. 90 S.] 1906. In Leinwand geb. *M* 1 80.
- B. Auflösungen. Mit Figuren. [108 S.] 1908. Geh. *M* 1 80, in Leinwand geb. *M* 2 20.
- Heft III. Die Kegelschnitte. Abteilung II. 2., verm. Auflage, bearb. von Dr. Franz Hochheim.
- A. Aufgaben. [IV u. 69 S.] Geh. *M* 1 20, in Leinwand geb. *M* 1 80.
- B. Auflösungen. [100 S.] Geh. *M* 1 60, in Leinwand geb. *M* 2 40.
- Höfler, Dr. A.,** Professor an der Universität Wien, Didaktik des mathematischen Unterrichts. Mit 2 Tafeln und 147 Figuren. [XVIII u. 509 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. *M* 12.—
- Killing, Geheimer Regierungsrat Dr. W.,** Professor an der Universität Münster i. W., und Dr. H. Hovestadt, Professor am Realgymnasium zu Münster i. W., Handbuch des mathematischen Unterrichts. 2 Bände. gr. 8. In Leinw. geb.
- I. Band. Mit 32 Figuren. [VIII u. 456 S.] *M* 10.— [Band II erscheint Ostern 1912.]
- Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. F.,** Professor an der Universität Göttingen, autographierte Vorlesungshefte. 4. Geh.
- Höhere Geometrie. Ausgearbeitet von Fr. Schilling. Unveränderter Neudruck 1907
- Heft 1 [VI u. 566 S.] (W.-S. 1892/93) } zusammen *M* 15.—
- Heft 2 [IV u. 388 S.] (S.-S. 1893) }

- Lazzeri, G., und A. Bassani**, Professoren an der Marineakademie zu Livorno, Elemente der Geometrie (unter Verschmelzung von ebener und räumlicher Geometrie). Deutsch von P. Treutlein, Direktor der Goetheschule zu Karlsruhe. Mit 336 Figuren. [XVI u. 491 S.] gr. 8. 1911. In Leinw. geb. *M.* 14.—
- Loria, Dr. G.**, Professor an der Universität Genua, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Deutsche Ausgabe von Prof. Fritz Schütte, Oberlehrer am Städtischen Gymnasium zu Düren. In 2 Teilen. gr. 8.
I. Teil. Die Darstellungsmethoden. Mit 163 Figuren. [XI u. 219 S.] 1907. In Leinwand geb. *M.* 6.80 II Teil. [Unter der Presse.]
- Mathematische Bibliothek.** Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementar-Mathematik für Schule und Leben. Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von Dr. W. Lietzmann und Dr. A. Witting. In Kleinktavbändchen kartoniert je *M.* —.80
Zunächst sind erschienen:
1. E. Löffler, Ziffern u. Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter u. neuer Zeit.
2. H. Wielitner, der Begriff der Zahl in seiner logischen u. histor. Bedeutung. Mit 10 Figuren.
3. W. Lietzmann, der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Mit 44 Figuren.
4. O. Meißner, Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen. Mit 6 Figuren.
- Müller, C. H.**, Professor Dr., Oberlehrer am Kgl. Kaiser-Friedrichs-Gymnasium zu Frankfurt a. M., und Professor O. Presler, Oberlehrer an der städt. Oberrealschule zu Hannover, Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie.
Ausgabe A. Vorzugsweise für Realgymnasien und Oberrealschulen. Mit 233 Figuren. [VIII u. 320 S.] gr. 8. 1903. Geb. *M.* 4.—
— B. Für Gymnasien und sechsstufige Realanstalten. Mit 122 Figuren. [VI u. 138 S.] gr. 8. 1903. Geb. *M.* 2.—
- Müller, Dr. E.**, Professor an der k. k. Technischen Hochschule zu Wien, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. In 2 Bänden.
I. Band. Mit 273 Figuren und 3 Tafeln. [XIV u. 368 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. *M.* 12.—
II. — [Erscheint Ostern 1912.]
- Noodt, Professor Dr. G.**, Oberlehrer an der Hecker-Realschule zu Berlin, mathematische Experimentiermappe für den geometrischen Anfangsunterricht. 9 Tafeln mit vorgezeichneten Figuren mathematischer Modelle, Werkzeug und Material zur Herstellung sowie erläuternder Leitfaden. 1911. In geschmackvollem Karton *M.* 4.—
- Pascal, E.**, Professor an der Universität Neapel, Repertorium der höheren Mathematik Zweite, völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe. Unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker herausgegeben von P. Epstein, Prof. an der Universität Straßburg i. E., und H. E. Timerding, Prof. an der Techn. Hochschule Braunschweig. 2 Bände in 4 Teilen mit zahlr. Figuren. gr. 8. Geb.
I. Band. Analysis. Unter Mitwirkung von R. Fricke, Ph. Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnke, H. Jung, A. Loewy, E. Pascal, H. E. Timerding herausgegeben von P. Epstein. I. Hälfte. [XII u. 527 S.] 1910. *M.* 10.— [Die II. Hälfte erscheint im Frühjahr 1912.]
II. — Geometrie. Unter Mitwirkung von L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, F. Dingeldey, F. Enriques, G. Giraud, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Møllerup, J. Neuberger, U. Perazzo, O. Staudé, E. Steinitz, H. Wielitner und K. Zindler herausgegeben von H. E. Timerding. I. Hälfte. [XVI u. 534 S.] 1910. *M.* 10.— [Die II. Hälfte erscheint im Frühjahr 1912.]
- Richter, Professor Dr. O.**, Oberlehrer am König-Albert-Gymnasium zu Leipzig, Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Für den Unterricht und zum Selbststudium. Mit 147 Figuren. [X u. 188 S.] gr. 8. 1908. Geh. *M.* 4.40, in Leinwand geb. *M.* 4.80.
- Schafheitlin, Professor Dr. P.**, Oberlehrer am Sophien-Realgymnasium zu Berlin, synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Für die Primahöheren Lehranstalten bearbeitet. Mit 62 Figuren. [VI u. 96 S.] gr. 8. 1907. Geb. *M.* 1.80.
- Schilling, Dr. Friedrich**, Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig, über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. Geh. *M.* 4.60, in Leinwand geb. *M.* 5.—
- Schur, Dr. F.**, Professor an der Universität Straßburg i. E., Grundlagen der Geometrie. Mit 63 Figuren. [X u. 192 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M.* 6.—, in Leinwand geb. *M.* 7.—

- Schütte**, Professor Fritz, Oberlehrer am Stiftischen Gymnasium zu Düren, Anfangsgründe der darstellenden Geometrie für Gymnasien. Mit 54 Figuren. [42 S.] gr. 8. 1905. Steif geh. *M* —.80.
- Schwering**, Prof. Dr. K., Direktor des Gymnasiums an der Apostelkirche zu Cöln a. Rh., Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Mit 139 Figuren. [VIII u. 408 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. *M* 8.—
- Staupe**, Dr. Otto, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. *M* 14.—
- analytische Geometrie des Punktepaars, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. In 2 Teilen. gr. 8. 1910.
I. Band. Mit 181 Figuren. [X u. 548 S.] Geh. *M* 20.—, in Leinwand geb. *M* 22.—
II. — Mit 47 Figuren [IV u. S. 549—1000.] Geh. *M* 16.—, in Leinwand geb. *M* 18.—
- Sturm**, Geh. Reg.-Rat Dr. R., Professor an der Universität Breslau, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. In 4 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.
I. Band. Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. [XII u. 415 S.] 1908. *M* 16.—
II. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. [VIII u. 346 S.] 1908. *M* 16.—
III. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe. [VIII u. 574 S.] 1909. *M* 20.—
IV. — Die nichtlinearen und die mehrdeutigen Verwandtschaften zweiter und dritter Stufe. [X u. 486 S.] 1909. *M* 20.—
- Elemente der darstellenden Geometrie. 2. umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 61 Figuren und 7 lithogr. Tafeln. [V u. 157 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. *M* 5.60.
- Tannery**, J., Professor an der Universität Paris, Subdirektor der École normale supérieure zu Paris, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klauß, Gymnasiallehrer in Echternach (Luxemburg). Mit einem Einführungswort von F. Klein und 184 Figuren. [XII u. 339 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M* 7.—, in Leinw. geb. *M* 8.—
- Thomae**, Geh. Hofrat Dr. J., Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. *M* 2.80.
- Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Mit 8 Figuren. [X u. 183 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. *M* 3.60.
- Treutlein**, Geh. Hofrat F., Direktor der Goetheschule in Karlsruhe, Geometrischer Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen Unterrichts in Geometrie. Mit 87 Abbildungen und 38 Tafeln. gr. 8. 1911. Geh. *M* 5.—, in Leinwand geb. *M* 5.60.
- Volk**, K. G., Professor an der Oberrealschule zu Freiburg i. Br., die Elemente der neueren Geometrie unter besonderer Berücksichtigung des geometrischen Bewegungsprinzips. Für die oberen Klassen höherer Lehranstalten und zum Selbststudium. Mit 93 zum großen Teil zweifarbigen Figuren. [VIII u. 77 S.] gr. 8. 1907. Steif geh. *M* 2.—, in Leinwand geb. *M* 2.20.
- Weber**, Dr. H., u. Dr. J. Wellstein, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8.
I. Band: Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von Heinrich Weber. 3. Auflage. Mit 40 Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1909. In Leinwand geb. *M* 10.—
II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Walther Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren. [XII u. 596 S.] 1907. In Leinwand geb. *M* 12.—
III. — Angewandte Elementar-Mathematik. 2. Auflage. I. Teil: Mathematische Physik. Mit einem Buch über Maxima und Minima von H. Weber, und J. Wellstein. Bearb. von Rud. H. Weber, Professor in Rostock. Mit 254 Figuren. [XII u. 538 S.] 1910. *M* 12.—. II. Teil: Praktische Mathematik und Wahrscheinlichkeitsrechnung [Unter der Presse.]
- Wiener**, Chr., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8.
I. Band. Geschichte der darstellenden Geometrie, ebenflächige Gebilde, krumme Linien (I. Teil), projektive Geometrie. Mit Figuren. [XX u. 478 S.] 1884. Unveränderter anastatischer Abdruck. 1906. Geh. *M* 12.—
II. — Krumme Linien (II. Teil) und krumme Flächen. Beleuchtungslehre, Perspektive. Mit Figuren u. 4 Tafeln. [XXX u. 649 S.] 1887. Geh. *M* 18.—



BESTELL-ZETTEL.

Bei der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner in Leipzig bestellt der Unterzeichnete aus den

Sammlungen mathematischer Modelle

von

H. Wiener und P. Treutlein

I. Reihe. 7 Drahtmodelle zum Projizieren. M 65.—

Daraus einzeln:

1. Quadrat	M 6.—	12. Rechtwinkelige Hyperbel	M 16.—
2. Regelmäßiges Fünfeck.	„ 9.—	Hierzu Drehkopf	„ 2,40
3. Regelmäßiges Sechseck	„ 7.—	13. Parabel	„ 7,50
11. Kreis mit Quadrat	„ 10.—	21. Sinuslinie	„ 7,50
Hierzu Drehachse mit Drehkopf „	3,50		

II. Reihe. 5 Drahtmodelle der regelmäßigen Vielfache. M 60.—

Daraus einzeln:

101. Tetraeder	M 7.—	104. Dodekaeder	M 16.—
102. Würfel	„ 11.—	105. Ikosaeder	„ 16.—
103. Oktaeder	„ 11.—		

III. Reihe. 6 Drahtmodelle mit Fäden: Höhere regelmäßige Vielfache. Regelmäßige räumliche Vielstrahlen. M 115.—

Daraus einzeln:

111. Würfel mit 2 Tetr. und Okt.	M 16.—	114. Ikosaeder mit Dodekaeder	M 24.—
112. Dodekaeder mit 5 Würfeln.	„ 20.—	115. Regelm. räuml. Sechsstrahl	„ 12.—
113. Dodekaeder mit Ikosaeder	„ 24.—	116. Regelm. räuml. Fünfzehnstrahl. „	20.—

IV. Reihe. 6 Drahtmodelle der Flächen 2. O. in Hauptschnitten. M 90.—

Daraus einzeln:

401. Kugel (vgl. 407, VII. Reihe)	M 10.—	404. Einschaliges Hyperboloid	M 20.—
402. Ellipsoid	„ 10.—	405. Elliptisches Paraboloid	„ 8.—
403. Zweischaliges Hyperboloid	„ 20.—	406. Hyperbolisches Paraboloid	„ 28.—

V. Reihe. 6 bewegliche Modelle der Regelflächen 2. O. M 210.—

Daraus einzeln:

a) Fadenmodelle:

411. Bewegliches einschaliges Dreh-Hyperboloid	M 35.—
412. Bewegliches hyperbolisches Paraboloid	„ 45.—

b) Stabmodelle:

421. Bewegl. einschal. Hyperboloid	M 35.—
422. Dasselbe halb, zum Umstülpen	„ 25.—
423. Bew. einschal. Dreh-Hyperbol. „	35.—
424. Bewegl. hyperbol. Paraboloid „	35.—

VI. Reihe. 6 bewegliche Drahtmodelle der Fl. 2. O. in Kreisschnitten. M 255.—

Daraus einzeln:

425. Bewegl. Ellipsoid	M 42.—	429. Bewegl. Kegel (doppelt)	M 48.—
426. Bewegl. ellipt. Paraboloid	„ 42.—	430. Bewegl. ellipt. Zylinder	„ 40.—
427. Bewegl. einschal. Hyperboloid „	42.—	Nr. 427, 428, 429, gemeins. bewegl. „	125.—
428. Bewegl. zweischal. Hyperboloid „	42.—	429 a. Bewegl. Kegel (einfach).	„ 24.—

VII. Reihe. 6 Drahtmodelle von Dreh- und Schraubenflächen. M 525.—

Mit Einschluß von 512 a. M 550.—

Daraus einzeln:

407. Kugel mit Parallelkreisen	M 18.—	514. Schiefe geschlossene Regel-	
501. Kreisring	„ 50.—	schraubenfläche	M 200.—
503. Urne	„ 65.—	515. Schrauben-Röhrenfläche	„ 120.—
512. Wendelfläche	„ 100.—	Galgen für die beiden letzten Modelle „	1,50
512 a. Ausschnitt der vorigen	„ 10.—		

VIII. Reihe. 16 Fadenmodelle der Singularitäten von Raumkurven. M 660.—

Daraus je vier Modelle:

Nr. 321, 322, 323, 324	zus. M 155.—
Nr. 325, 326, 327, 328	„ „ 155.—
Nr. 329, 330, 331, 332	„ „ 175.—
Nr. 333, 334, 335, 336	„ „ 175.—

Einzeln:

Nr.	321	322	323	324	325	326	327	328	je M 40.—
Nr.	329	330	331	332	333	334	335	336	je M 45.—

IX. Reihe: Raumkurven dritter Ordnung. 14 Modelle. M 600.—

Gruppe A: Die Kurve mit ihren Asymptoten. 4 Drahtmodelle zusammen M 45.—

Daraus einzeln:

- | | |
|--|---|
| 337. Räumliche Ellipse M 12.— | 339. Räumliche hyperbol. Parabel . . . M 16.— |
| 338. Räumliche Hyperbel „ 16.— | 340. Räumliche Parabel „ 6.— |

Gruppe B: Die abwickelbare Tangentenfläche. 4 Fadenmodelle. M 225.—

Daraus einzeln:

- | | |
|--|---|
| 341. Räumliche Ellipse M 60.— | 343. Räumliche hyperbol. Parabel . . . M 60.— |
| 342. Räumliche Hyperbel „ 60.— | 344. Räumliche Parabel „ 50.— |

Gruppe C: Die Kurve als teilweiser Schnitt von Kegeln (bzw. Zylindern). 4 Fadenmodelle mit Drahtkurven. M 235.—

Daraus einzeln:

- | | |
|---|---|
| 345. Räumliche Ellipse: Ellipt. Zylinder und Kegel M 60.— | 347. Räuml. hyperbolische Parabel: Hyperbolischer u. parabol. Zylinder M 60.— |
| 346. Räumliche Hyperbel: Drei hyperbolische Zylinder „ 60.— | 348. Räumliche Parabel: Parabolisch. Zylinder und Kegel „ 60.— |

Gruppe D: Die beiden dualen Erzeugenden der Kurve. 2 Fadenmodelle mit Drähten. M 120.—

Daraus einzeln:

- | | |
|---|---|
| 349. Schnitt zweier Kegel mit gemeins. Erzeugender M 65.— | 350. Eingehüllte d. Ebenen, die 2 Kegelschnitte mit gemeinsam. Tangente berühren M 60.— |
|---|---|

X. Reihe. Gelenkvierecke. 10 Modelle. M 60.—

Daraus einzeln:

A. Die Gelenkvierecke.

- | | |
|--|--|
| 31. Rhombus M 6.— | 36 u. 37. Reuleauxs Fall je M 5.50 |
| 32. Parallelogramm und Zwilling „ 5.50 | 38 u. 39. Grashofs Fall je „ 5.50 |
| 33. Gleichschenkliges Viereck „ 5.50 | Halter und Kurvenzeichner „ 12.— |
| 34. Kreistangentenviereck „ 5.50 | |
| 35. Kreistangentenviereck „ 5.50 | |

B. Anhang.

- | |
|----------------------------------|
| 40. Gelenkrhombus. „ 7.— |
|----------------------------------|

XI. Reihe: Gelenkvielfache. 13 Modelle M 200.—

Daraus einzeln:

A. Vielfache zur Theorie der abwickelbaren Flächen. B. Vielfache zur Theorie der Biegung der Flächen.

- | | |
|--|--|
| 131. Abwickelbare Fläche einer Raumkurve M 30.— | 134. Zwei ebene Flächenstücke . . . M 3.— |
| 131a. Zwei Dreiecke „ 3.— | 135. Achsenspiegeliges Viereck. a) kuppelförm. M 6.—, b) sattelförm. „ 5.— |
| 132. Zickzackfläche „ 1.50 | 136. Sechsfach. a) kuppelförmig, b) sattelförmig je „ 8.— |
| 133. Nicht-geradlinige abwickelbare Fläche „ 2.— | 137. Neunfach. a) kuppelförmig, b) sattelförmig je „ 12.— |
| | 138. Kuppe „ 40.— |
| | 139. Wendelfläche „ 80.— |

XII. Reihe: Gelenkflächen. 11 Modelle M 400.—

Daraus einzeln:

A. Gelenkige Verbindung zwischen starren Geraden. B. Gelenk-Regelflächen zwischen zwei starren Kurven od. mit einer Schar gelenkig eingefügter starren Kurven.

- | | |
|---|--|
| 413. Das geschränkte Gelenk. 3 Tle. M 4.50 | 417. Drehregelfläche Mit Ständer. M 60.— |
| Vier Stabmodelle (414 a—415 b zus.). „ 90.— | 418. Einschäl. Hyperbol. Mit Ständ. „ 42.— |
| Modelle m. Ständer Nr. 414 a, 414 b, 415 a, 415 b einzeln: M 24.—, 27.—, 18.—, 22.— | 419. Gelenkiges Hyperboloid „ 42.— |
| 416. Der Planigraph (nach Darboux) M 24.— | 420. Gelenkiges Paraboloid „ 42.— |
| | 511. Wendelfläche. Mit Holzfuß „ 100.— |

P. Treutleins Sammlung mathematischer Schulmodelle.

A. Modelle für den Rechenunterricht.

XXXI. Reihe: Für Verdeutlichung des Zehnergesetzes und das Bruchrechnen. Gesamtpreis M 104.—

Daraus einzeln:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1001. Rechenstäbchen M 11.— | 1003. Hölzerne Kreisscheiben . . . M 22.— |
| 1002. Holzkugeln „ 44.— | 1004. Holzstäbe (a—g). „ 32.— |

XXXII. Reihe. Maße, Gewichte und Münzen. Ganze Reihe M 52.—

Daraus einzeln:

- | | |
|---|--|
| 1021. Ein Quadratmeter M 3.80 | 1031. Ein Kubikmeter, zusammenlegb. M 34.— |
| 1022. Ein Quadratmtr., zusammenlegb. „ 8.50 | 1033. Ein Kubikdezimtr., einseit. offen „ 3.60 |

B. I. Modelle für die ebene Geometrie.

XXXIII. Reihe. Meßinstrumente. Ganze Reihe *M* 116.—

Daraus einzeln:

1101. Zifferblatt einer Uhr <i>M</i> 13.50	1102. b) Verschlusskästchen dazu . . . <i>M</i> 18.—
1102. Theodolit (ohne Gläser) samt Zubeh.	c) Dreifußgestell „ 26.—
a) Theodolitmodell selbst „ 64.—	

XXXIV. Reihe. Verwandlung von Rechteck und schiefem Parallelogramm.

Ganze Reihe *M* 22.—

Daraus einzeln:

Nr.	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122
<i>M</i>	1.50	1.50	1.50	1.50	2.50	1.50	1.50	2.50	1.50	1.50	2.50	2.50

XXXV. Reihe. Inhalt von Rechteck und schiefem Parallelogramm. *M* 13.20

Daraus einzeln:

Nr.	1131	1132	1133	1134
<i>M</i>	4.—	4.—	3.—	3.—

XXXVI. Reihe. Dreieck. Gesamtpreis *M* 29.—

Daraus einzeln:

Nr.	1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150
<i>M</i>	2.—	3.—	4.20	3.—	3.—	3.—	4.20	3.—	2.—	3.—

XXXVII. Reihe. Trapez und beliebiges Viereck. Gesamtpreis *M* 15.—

Daraus einzeln:

Nr.	1161	1162	1163	1164	1165
<i>M</i>	2.40	3.—	2.40	4.—	4.—

XXXVIII. Reihe. Flächensätze beim rechtwinkligen Dreieck.

(Pythagoreischer Lehrsatz.) Ganze Reihe *M* 33.50

Daraus einzeln:

Nr.	1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178
<i>M</i>	5.50	5.50	5.40	2.50	2.50	4.60	3.20	6.—

B. II. Modelle für die körperliche Geometrie.

XXXIX. Reihe. Parallelfächner.

Ganze Reihe in Pappdeckel (P) *M* 26.—, in Draht (D) *M* 80.—

Daraus einzeln:

Nr.	1201a	1201b	1202	1202a	1202b	1202c	1203a	1203b	1204a	1204b	1205a	1205b
P. <i>M</i>	—,80	2.40	—	1.20	1.50	2.—	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50
D. <i>M</i>	4.60	—	11.—	6.—	3.60	—	7.20	—	8.—	—	9.—	—

Nr.	1206a	1206b	1207a	1207b	1208a	1208b	1209
P. <i>M</i>	1.50	1.50	1.60	1.50	1.60	1.50	1.50
D. <i>M</i>	9.—	—	9.—	—	9.—	—	9.—

XL. Reihe. Prismen. Ganze Reihe in Pappdeckel (P) *M* 19.—, in Draht (D) *M* 65.—

Daraus einzeln:

Nr.	1221a	1221b	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228a	1228b	1229	1230
P. <i>M</i>	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	2.50	1.60	1.50	1.60	2.50
D. <i>M</i>	5.50	3.—	5.—	6.—	6.—	6.—	6.—	7.40	8.—	5.—	8.—	—

XL I. Reihe. Zylinder. Ganze Reihe M. 30.—

Daraus einzeln:

Nr.	1241 a	1241 b	1242 a	1242 b	1243 a	1243 b	1244	1245
P. M	2.50	1.—	4.—	1.—	3.—	1.—	—	—
D. M	—	—	—	—	—	—	8.50	10.—

XLII. Reihe. Pyramiden und Pyramidenstumpfe.
Bei gleichzeitigem Bezug der ganzen Reihe 5% Ermäßigung.

Daraus einzeln:

Nr.	1251	1252 a	1252 b	1252 c	1252 d	1253 a-c	1254 a	1254 b	1254 c	1255	1256	1257
P. M	1.60	—	—	—	—	5.—	1.50	3.—	—	1.60	1.60	1.60
D. M	—	6.60	8.—	7.30	8.—	15.—	5.—	7.—	8.—	5.60	5.—	5.—

Nr.	1258	1259	1260 a	1260 b	1261 a	1261 b	1262	1263
P. M	3.—	3.20	1.70	—	1.70	—	1.70	3.20
D. M	—	—	7.50	9.—	8.—	9.50	7.50	—

XLIII. Reihe. Kegel und Kegelstumpfe.
Bei gleichzeitigem Bezug der ganzen Reihe 5% Ermäßigung.

Daraus einzeln:

Nr.	1271 a	1271 b	1272 a	1272 b	1273 a	1273 b	1273 c	1273 d	1273 e
P. M	1.70	1.—	3.—	1.—	2.—	1.—	1.60	—	1.60
D. M	—	—	9.20	—	—	—	—	21.—	—

XLIV. Reihe. Kugel und ihre Teile sowie Ellipsoide. M 93.—

Daraus einzeln:

Nr.	1281	1282	1283	1284 a	1284 b	1284 c	1285	1286	1287	1288
M	9.—	11.—	13.—	11.—	11.—	11.—	5.60	5.60	14.50	6.—

XLV. Reihe. Kugelzweiecke und Kugeldreiecke. M 44.50.

Daraus einzeln:

Nr.	1301	1302 a	1302 b	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309 a	1309 b	1309 c
M	6.—	4.—	3.20	4.—	2.—	2.—	2.—	2.—	2.—	7.50	6.—	2.—

Nr.	1309 d	1310	1311	1312
M	5.—	1.25	1.25	1.50

XLVI. Reihe. Geometrische Verwandtschaften. M 112.—

Daraus einzeln:

Nr.	1321	1322	1323
M	45.—	36.—	36.—

XLVII. Reihe. Perspektive Abbildungen des Kreises. M 250.—

Daraus einzeln:

Nr.	1331	1332	1333
M	90.—	90.—	90.—

XLVIII. Reihe. Kegelschnitte. Gesamtpreis M 290.—

Daraus einzeln:

A. Ebene Schnitte des Kreiszyinders und des Kreiskegels.

Nr.	1341	1342	1343	1344
M	63.—	58.—	46.—	68.—

B. Kegelschnittschablonen zum Wandtafelzeichnen.

Nr.	1351	1352	1353
M	20.—	20.—	30.—

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Das nicht Gewünschte bitte gefl. durchzustreichen.

des Verstandes) auf die Wissenschaften, und gar auf die Mathematik zu übertragen, so spricht doch viel dafür, daß es im Grunde dieselbe schöpferische Kraft des menschlichen Geistes sei, die sich in Kunst und Wissenschaft betätigt.

Das ist ja fraglos, daß in allen Anwendungen der Mathematik eine möglichst umfassende Kenntnis des Gegenstandes die Wahl der mathematischen Methode erleichtert und den Gang der Untersuchung fördert. Aber manche wollen die Anwendungen von der „reinen Mathematik“ gesondert wissen, als deren Aufgabe dann das Verknüpfen von Zeichen nach vorgegebenen Regeln zu betrachten wäre, wobei man Geometrie und Teile der Mechanik dadurch einbezieht, daß man Begriffe, wie Ebene, Punkt, Kraft, die der Erfahrung entstammen, als Zeichen mit besonderen Verknüpfungen einführt. Was nun ist „Schaffen“ in dieser abstrakten Mathematik? Soweit jene Regeln der Verknüpfung in einem vorhandenen Algorithmus festgelegt sind, bedingt ihr Gebrauch nur eine mechanische Tätigkeit. Wird aber eine weitläufige Rechnung durch einen vereinfachenden Gedanken erspart, wird für eine neue Aufgabe eine Zeichensprache (ein Algorithmus) neu erfunden oder eine vorhandene ihr angepaßt, so ist dies schöpferische Tätigkeit. Und gerade in solchen Fällen ist „die volle Auffassung und Insichaufnahme“ des ganzen in Betracht kommenden mathematischen Stoffes unentbehrlich, d. h. es betätigt sich ein unmittelbar anschauendes mathematisches Denken. Aufgabe des Unterrichts ist es, dieses Vermögen nach allen Richtungen hin auszubilden, in der Geometrie die Raumschauung, in der Mechanik die Anschauung der Bewegungsvorgänge und Kräftewirkungen, in der reinen Mathematik den Sinn für die Zeichensprachen.

In dem Gesagten sind schon die Absichten umschrieben, denen die Modelle wie die „Abhandlungen“ dienen. Die Erweiterung der Sammlung auf Schulmodelle verfolgt das Ziel, schon beim allerersten geometrischen und Rechenunterricht auf die Anschauung aufzubauen. Die Abhandlungen von P. TREUTLEIN geben über die Bedeutung und Art und reichliche Verwertung der Anschauung im mathematischen Unterricht Auskunft; sie gewähren, soweit nötig, Anleitung zur Handhabung der Modelle und zeigen die Art des methodischen Betriebes bei ihrer Verwendung. Auch die Abhandlungen des Herausgebers enthalten solche Anweisungen und Erläuterungen (soweit sie nicht schon in dem Text des „Verzeichnisses mathematischer Modelle“ gegeben sind), wollen aber darüber hinaus auf eine Umgestaltung des geometrischen Unterrichts an den Hochschulen in dem Sinne hinarbeiten, daß das allzu formalistische Verfahren durch ein inhaltsreicheres, rein anschauliches zurückgedrängt werde. Dafür bedarf es vorbildlicher Beispiele, indem an anerkannt wichtigen Stoffen gezeigt wird, wie man aus gewissen Grundanschauungen heraus Begriffe und Sätze durch einfache Überlegung gewinnen kann. Solche Beispiele liefert die Theorie der Abbildungen und ihrer Gruppen, die Erzeugung von Kurven und Flächen und die kinematische Geometrie, besonders die sonst nur wenig gepflegte des Raumes. Sie bieten dann auch eine anschauungsmäßige Grundlage mathematischer Zeichensprachen wie des Rechnens mit Abbildungsfolgen und der Behandlung des Unendlichkleinen.

Darmstadt, im September 1911.

H. Wiener.

