Aus Natur und Geisteswelt

526

R. Neuendorff

Praktische Mathematik

II. Teil: Geometrisches Zeichnen
Projektionslehre · Flächenmessung
Körpermessung

B. G. Teubner · Leipzig · Berlin

Die Sammlung
„Aus Natur und Geisteswelt"

nunmehr über 800 Bändchen umfassend, bietet wirkliche „Einführungen" in die Hauptwissensgebiete für den Unterricht oder Selbstunterricht des Laien nach den heutigen methodischen Anforderungen, seit ihrem Entstehen (1898) den Gedanken dienend, auf denen die heute so mächtig entwickelte Volkshochschulbewegung beruht. Sie will jedem geistig Mündigen die Möglichkeit schaffen, sich ohne besondere Vorkenntnisse an sicherster Quelle, wie sie die Darstellung durch berufene Vertreter der Wissenschaft bietet, über jedes Gebiet der Wissenschaft, Kunst und Technik zu unterrichten. Sie will ihn dabei zugleich unmittelbar im Beruf fördern, den Gesichtskreis erweiternd, die Einsicht in die Bedingungen der Berufsarbeit vertiefend. Diesem Bedürfnis können Skizzen im Charakter von „Auszügen" aus großen Lehrbüchern nie entsprechen, denn solche setzen eine Vertrautheit mit dem Stoffe schon voraus.

Die Sammlung bietet aber auch dem Fachmann eine rasche zuverlässige Übersicht über die sich heute von Tag zu Tag weitenden Gebiete des geistigen Lebens in weitestem Umfang und vermag so vor allem auch dem immer stärker werdenden Bedürfnis des Forschers zu dienen, sich auf den Nachbargebieten auf dem laufenden zu erhalten.

In den Dienst dieser Aufgabe haben sich darum auch in dankenswerter Weise von Anfang an die besten Namen gestellt, gern die Gelegenheit benutzend, sich an weiteste Kreise zu wenden.

So konnte der Sammlung auch der Erfolg nicht fehlen. Mehr als die Hälfte der Bändchen liegen, bei jeder Auflage durchaus neu bearbeitet, bereits in 2. bis 8. Auflage vor, insgesamt hat die Sammlung bis jetzt eine Verbreitung von fast 5 Millionen Exemplaren gefunden.

Alles in allem sind die schmucken, gehaltvollen Bände besonders geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden.

Wenn eine Verteuerung der Sammlung infolge der außerordentlichen Steigerung der Herstellungskosten – sind doch die Löhne auf das Achtzehnfache, die Materialien auf das Fünfundzwanzig- bis Fünfunddreißigfache (teilweise noch weit darüber) gestiegen – auch unvermeidbar gewesen ist, wie bei anderen „billigen" Büchern, z.B. den Reclamheften, so ist der Preis doch entfernt nicht in dem gleichen Verhältnis gestiegen, und auch jetzt ist ein Bändchen „Aus Natur und Geisteswelt" wohlfeil, im Gegensatz zu den meisten Gebrauchsgegenständen.

<u>Jedes der meist reich illustrierten Bändchen</u>
<u>ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich</u>

Leipzig, im März 1922. **B. G. Teubner**

Ein vollständiges, nach Wissensgebieten geordnetes Verzeichnis versendet auf Wunsch kostenlos und postfrei der Verlag, Leipzig, Poststr. 3/5

Zur Mathematik und Astronomie
sind bisher erschienen:

Einführung in die Mathematik.

Einführung in die Mathematik. Von Studienrat W. Mendelsohn. Mit 42 Figuren im Text. (Bd. 503.)

***Mathematische Formelsammlung.** Ein Wiederholungsbuch der Elementarmathematik. Von Prof. Dr. S. Jakobi. I. Arithmetik und Algebra. II. Geometrie. (Bd. 646/47.)

Arithmetik, Algebra und Analysis.

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat P. Crantz. 2 Bände. I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 7. Aufl. Mit 9 Figuren im Text. (Bd. 120.) II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 5. Aufl. Mit 21 Textfiguren. (Bd. 205.)

Lehrbuch der Rechenvorteile. Schnellrechnen und Rechenkunst. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Von Ing. Dr. phil. J. Bojko. (Bd. 739.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 3., verbesserte Aufl. Mit 18 Figuren. (Bd. 197.)

Differentialrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 3. Aufl. Mit 45 Figuren und 161 Aufgaben. (Bd. 387.)

Integralrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit 43 Figuren im Text und 200 Aufgaben. (Bd. 673.)

Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. Mit 38 Figuren im Text und 160 Aufgaben. (Bd. 589.)

***Einführung in die Vektorrechnung.** Von Prof. Dr. F. Jung. (Bd. 668.)

Kaufmännisches Rechnen zum Selbstunterricht. Von Studienrat K. Dröll. (Bd. 724.)

Geometrie.

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 3. Aufl. Mit 94 Figuren im Text. (Bd. 340.)

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 3. Aufl. Mit 50 Figuren im Text. (Bd. 431.)

Sphärische Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. Mit 27 Figuren im Text. (Bd. 605.)

Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 2. Aufl. Mit 55 Figuren im Text. (Bd. 504.)

Einführung in die darstellende Geometrie. Von Prof. P. B. Fischer. Mit 59 Fig. im Text. (Bd. 541.)

Angewandte Mathematik.

Praktische Mathematik. Von Prof. Dr. R. Neuendorff. 2 Bde. I. Teil: Graphische Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufm. Rechnen im tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verbesserte Auflage. Mit 29 Figuren und 1 Tafel. (Bd. 341.) II. Teil: Geometrisches Zeichnen, Projektionslehre, Flächenmessung, Körpermessung. Mit 133 Figuren. (Bd. 526.)

Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. Von Regierungsrat Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abbildungen. (Bd. 490.)

Geometrisches Zeichnen. Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeisky. Mit 172 Abb. im Text und auf 12 Tafeln. (Bd. 568.)

Projektionslehre. Die rechtwinklige Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung technischer Gebilde nebst einem Anhang über die schiefwinklige Parallelprojektion in kurzer leichtfaßlicher Darstellung für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeisky. Mit 208 Abbildungen im Text. (Bd. 564.)

Die Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Prof. Dr. K. Doehlemann. 2. Aufl. Mit 91 Figuren und 11 Abbildungen. (Bd. 510.)

Angewandte Mathematik.

Graphisches Rechnen. Von Prof. O. Prölß. Mit 164 Fig. im Text. (Bd. 708.)

Die graphische Darstellung. Eine allgemeinverständliche, durch zahlreiche Beispiele aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis erläuterte Einführung in den Sinn und Gebrauch der Methode. Von Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 2. Aufl. Mit 139 Fig. im Text. (Bd. 437.)

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abbildungen. (Bd. 385.)

Nautik. Von Direktor Dr. J. Möller. 2. Aufl. Mit 64 Figuren im Text und 1 Seekarte. (Bd. 255.)

Vermessungs- und Kartenkunde. 6 Bände. Jeder Band mit Abbildungen. *I. Bd. Geographische Ortsbestimmung. Von Prof. Schnauder. (Bd. 606.) *II. Bd. Erdmessung. Von Prof. Dr. Osw. Eggert. (Bd. 607.) III. Bd. Die Landmessung. Von Geh. Finanzrat F. Suckow. Mit 69 Zeichnungen im Text. (Bd. 608.) IV. Bd. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Geh. Reg.-Rat Prof. E. Hegemann. Mit 11 Figuren im Text. (Bd. 609.) V. Bd. Photogrammetrie (Einfache Stereo- und Luftphotogrammetrie). Von Dipl.-Ing. Hermann Lüscher. Mit 78 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. (Bd. 612) VI. Bd. Kartenkunde. Von Finanzrat Dr. Ing. A. Egerer. I. Einführung in das Kartenverständnis. Mit 49 Abbildungen im Text. (Bd. 610.)

Mathematische Spiele.

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 4., verbesserte Aufl. Mit 1 Titelbild und 78 Figuren. (Bd. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. Mit den Bildn. E. Laskers u. P. Morphys, 1 Schachbrettafel u. 43 Diagrammen. 3. Aufl. (Bd. 281.)

Geschichte.

Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. 2. Aufl. Mit 2 Figuren. (Bd. 370.)

***Die Naturwissenschaften im Mittelalter und im Zeitalter des Wiedererwachens der Wissenschaften.** Von Direktor Dr. F. Dannemann. (Bd. 695.)

***Die Naturwissenschaften in der Neuzeit.** Von Direktor Dr. F. Dannemann. (Bd. 696.)

Astronomie und Astrologie.

Der Bau des Weltalls. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 5. Aufl. Bearbeitet von Prof. Dr. P. Guthnick. Mit 28 Figuren im Text. (Bd. 24.)

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Geh. Regierungsrat Prof. Dr. M. B. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)

Weltuntergang in Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. K. Ziegler. und Prof. Dr. S. Oppenheim (Bd. 720.)

Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. I. Teil: Vom Altertum bis zur Neuzeit. 3. Auflage. Mit 18 Abbildungen. (Bd. 444.) II. Teil. Moderne Astronomie. 2. Auflage. Mit 9 Figuren im Text und 1 Tafel. (Bd. 445.)

Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Von Professor Dr. A. Marcuse. 2. Aufl. Mit 26 Abbildungen. (Bd. 378.)

Die Sonne. Von Dr. A. Krause. Mit 64 Abbildungen. (Bd. 357.)

Die Planeten. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 16 Figuren. 2. Aufl. von Observ. Dr. H. Naumann. (Bd. 240.)

Der Kalender. Von Prof. Dr. W. F. Wislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)

Sternglaube und Sterndeutung. Die Geschichte und das Wesen der Astrologie. Unter Mitwirkung von Geh. Rat Prof. Dr. C. Bezold dargestellt von Geh. Hofrat Prof. Dr. Franz Boll. 2. Aufl. Mit 1 Sternkarte und 20 Abbildungen. (Bd. 638.)

Meteorologie.

Einführung in die Wetterkunde. Von Prof. Dr. L. Weber. 3. Aufl. Mit 28 Abbildungen im Text und 3 Tafeln. (Bd. 55.)

Unser Wetter. Einführung in die Klimatologie Deutschlands an der Hand von Wetterkarten. Von Dr. R. Hennig. 2. Aufl. Mit 48 Abb. im Text. (Bd. 349.)

Die mit * bezeichneten u. weitere Bände befinden sich in Vorb.

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

526. Bändchen

Praktische Mathematik

II. Teil

Geometrisches Zeichnen · Projektionslehre
Flächenmessung · Körpermessung

Von

Prof. Dr. R. Neuendorff

Mit 133 Figuren

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1918

Druck von B. G. Teubner, Dresden

Vorwort.

Der zweite Teil ist der Geometrie gewidmet. Die übergroße Fülle des Stoffes zwang zu kürzester Darstellungsform, die aber hoffentlich genügt, um von den behandelten Gegenständen eine klare Vorstellung zu geben. Die Abschnitte über Flächen- und Körperberechnung sind aus dem ersten Teil der ersten Auflage herübergenommen, um alles Geometrische in einem Bande zu vereinigen.

Jeder Abschnitt ist wieder für sich abgeschlossen. Mathematische Vorkenntnisse sind nicht erforderlich.

Der geringe Umfang des Bändchens gestattete nur, wenige Anwendungsbeispiele zu geben. Auch dieses Bändchen soll natürlich kein Lehrbuch sein. Einige Literaturnachweise sind hinzugefügt für solche Leser, die irgendeinen Abschnitt eingehender durcharbeiten wollen.

Herrn Vizefeldwebel cand. math. Freund, der die Korrektur mitlas, danke ich auch an dieser Stelle.

R. Neuendorff.

Inhaltsverzeichnis.

1. Abschnitt.

Geometrisches Zeichnen.[1])

1. Das Zeichenmaterial. Es dürfte nützlich sein, als Einleitung zu dem Gegenstande dieses Abschnitts einige Bemerkungen über das Zeichenmaterial vorauszuschicken. Es ist zu bekannt, daß viele Mißerfolge bei Verwendung graphischer Methoden auf mangelhafte Hilfsmittel oder ungeschickte Auswahl derselben zurückzuführen sind.

Gezeichnet wird, sobald man konstruiert, auf besonderem, nicht zu glattem und nicht zu rauhem Zeichenpapier, auf Millimeterpapier[2]) oder auf Pauspapier bezw. Pausleinen. Das letzte nimmt man gewöhnlich nur, wenn die Zeichnungen mit Hilfe des Lichtpausverfahrens vervielfältigt werden sollen.

Die Linien werden mit hartem Blei (3 H oder Nr. 4) gezogen; wobei man sich wohl zu hüten hat, in das Papier einzukratzen. Man muß immer noch jede Linie gut wegradieren können. Meist wird es sich empfehlen, alle wichtigen Ergebnisse mit Tusche nachzuziehen. Aber nicht etwa mit gewöhnlicher Stahlfeder und Tinte. Man nimmt vielmehr dazu eine besondere Ziehfeder, wie sie z. B. jeder Zirkelkasten enthält, und gute schwarze Ausziehtusche. Zur Unterscheidung ist es oft gut, neben der schwarzen farbige Ausziehtuschen zu gebrauchen. Aber auch darin soll man maßhalten: zu große Buntheit verwirrt leicht und kann den Gesamteindruck des Bildes stören.

Für gerade Strecken soll man als Lineale nur die Reißschiene und die Zeichendreiecke benutzen.

Für krumme Linien hat man zunächst den Zirkel mit hartem Bleieinsatz oder mit Ziehfeder. Er wird auch gern bei beliebigen Kurven, besonders wenn sie stark gekrümmt sind, benutzt, indem man durch Ausprobieren einen Kreis sucht, der wenigstens mit einem Stück der Kurve zusammenfällt. So setzt man die Kurve teilweise oder ganz aus Kreisbögen zusammen. Am häufigsten wird man indessen bei

1) Vgl. Schudeisky, Geometrisches Zeichnen (ANuG Bd. 568).

2) Für besondere Zwecke wird Papier hergestellt, das mit Winkelteilung, logarithmischer Teilung, Teilung nach Polarkoordinaten usw. bedruckt ist.

beliebigen Kurven zu den Kurvenlinealen greifen. Bei einiger Übung läßt sich mit ihnen ebensogut zeichnen wie mit dem gewöhnlichen Lineal. In erster Linie ist der sogenannte Burmestersche Satz (Fig. 1) zu empfehlen. Das sind drei Lineale, von denen eins aus Ellipsenbögen, eins aus Parabelbögen und eins aus Hyperbelbögen zusammengesetzt ist. Auch mit diesen Linealen muß man eine Kurve stückweise zeichnen, indem man durch Ausprobieren ein Stück der Kurve sucht, das mit einem Teil des Lineals zusammenfällt. Dabei muß man wohl darauf achten, daß der neue Teil immer glatt und ohne Ecken in den schon fertig gezeichneten übergeht; d. h. also, daß an der Übergangsstelle beide Stücke sicher dieselbe Tangente und nahezu gleiche Krümmung haben.

Fig. 1.

Noch würde man in Verlegenheit kommen, wenn man langgestreckte Kurven, wie sie gerade bei praktischen Aufgaben so häufig auftreten, zeichnen müßte. Dazu nimmt man die sogenannten Latten zu Hilfe Das sind dünne, biegsame Lineale, die man an die zu zeichnende Kurve entlang legt, indem man die schmale Kante mit besonderen Gewichten, welche mit einer vorspringenden Nase versehen sind, beschwert (Fig. 2). Auf diese Weise kann man eine lange und beliebig gekrümmte Kurve ihrer ganzen Länge nach auf einmal durch das Lineal darstellen. Das ergibt noch einen großen Vorteil: man kann prüfen, ob auch der Verlauf der Kurve so glatt und gleichmäßig ist, wie es die jeweilige Aufgabe verlangt. Kleinere und größere Unebenheiten lernt man bald sicher erkennen und ausgleichen. Die Elastizität der Latte hilft dabei gut mit.

Von den Zirkeln seien noch als notwendig der Stechzirkel und als nützlich der Nullenzirkel genannt; jener dient zum Abmessen und Abtragen von Strecken, dieser zum Zeichnen sehr kleiner Kreise. Hierbei mag darauf hingewiesen werden, daß man bei sorgfältigen Zeichnungen, die einige Genauigkeit erfordern, Punkte dadurch festlegt, daß man mit einer feinen Zirkelspitze ins Papier leicht hineinsticht. Durch solchen Punkt soll weder mit Bleistift noch mit Tusche hindurchgezogen werden. Deshalb markiert man ihn, indem man um ihn herum einen

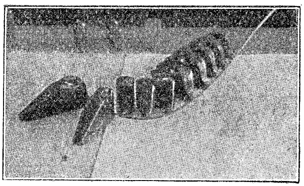


Fig. 2.

Kreis mit sehr kleinem Radius zieht. Die Linien, die durch den Punkt hindurchlaufen sollen, zieht man nur bis an den Umfang jenes kleinen Kreises, Nullkreis genannt, heran.

Endlich sorge man noch für einen guten Maßstab mit Millimeterteilung, vielleicht auch noch für einen Winkelmesser, den man allerdings häufig wird entbehren können.

Ohne natürlich erschöpfend zu sein, dürften hiermit doch die wichtigsten Zeichenhilfsmittel genannt sein.

2. Die Grundkonstruktionen. a) Strecken und Winkel. Bei den folgenden Betrachtungen ist es nötig, wohl auseinanderzuhalten: eine geometrische Konstruktion, deren Richtigkeit sich nach den Lehrsätzen der Planimetrie beweisen läßt, und die praktische Ausführung irgendeiner geometrischen Aufgabe. Das zweite soll hier besprochen werden; dabei wird wohl die Aufgabe mathematisch, dagegen werden die Lösungen ein gut Teil nur Regeln für das Zeichnen sein.

Eine Strecke, also das begrenzte Stück einer geraden Linie, z. B. 7,38 cm soll auf dem Zeichenblatt an irgendeiner Stelle abgetragen werden. Man zieht an jener Stelle eine beliebig lange gerade Linie. Dann nimmt man den Stechzirkel, setzt die eine Spitze auf einem Maßstab am Anfangspunkte ein und spreizt ihn so weit auseinander, bis die andere Spitze auf 7,38 zeigt. Den achten Teil des Millimeters schätzt man bei einiger Übung noch sicher ab. Jetzt markiert man mit dem Stechzirkel auf der Bleistiftgeraden die Endpunkte der gesuchten Strecke durch zwei feine Löcher, indem man die Zirkelspitzen leicht in das Papier hineindrückt.

Ist geringere Genauigkeit erforderlich, so kann man einfach den Maßstab an die Gerade anlegen und die gesuchte Strecke durch Bleistiftstriche abtragen. Dann bekommt man freilich $^1/_{10}$ mm nicht mehr genau.

AB in Fig. 3 sei etwa die eben abgetragene Strecke. Sie soll noch halbiert werden. Dazu setzt man den Stechzirkel am einen Ende A ein, schätzt nach Augenmaß die Mitte der Strecke ab und öffnet den Zirkel, bis seine zweite Spitze auf diese abgeschätzte Mitte C zeigt. Den Punkt C markiert man mit dem Zirkel. Dieselbe Strecke AC trägt man von B aus ab bis zum Punkte D. Hätte man nach Augenmaß die Mitte richtig gefunden, so müßte ja C mit D zusammenfallen. Im allgemeinen bleibt eine kurze Strecke CD, deren Mitte M aber ohne Mühe so genau abgeschätzt wer-

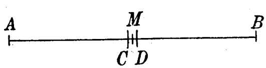


Fig. 3.

den kann, wie sie sich zeichnerisch überhaupt ermitteln läßt. Zur Probe kann man mit dem Stechzirkel nachprüfen, ob wirklich AM = BM geworden ist. (In der Figur sind die Punkte durch kurze Striche angedeutet; in der Zeichnung sind sie natürlich kleine Löcher.)

Ganz ähnlich verfährt man, wenn die Strecke AB in drei oder vier gleiche Stücke geteilt werden soll. Man probiert mit dem Stechzirkel aus, bis die Zirkelöffnung gerade so groß ist, daß man die Strecke, die sie faßt, drei- bzw. viermal hintereinander abtragen kann.

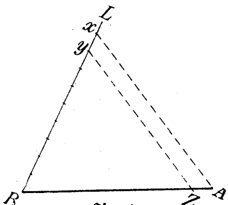


Fig. 4.

Soll dagegen eine Strecke in eine größere Anzahl, z. B. 9 gleiche Stücke zerlegt werden, so nimmt man besser eine bekannte geometrische Konstruktion zu Hilfe (s. Fig. 4). Man zieht von einem Endpunkt etwa B aus unter einem Winkel nahe 90^0 einen beliebigen Strahl BL. Auf ihm trägt man eine beliebige, kurze Strecke von B aus neunmal hintereinander ab. Den letzten Teilpunkt x verbindet man mit A und zieht durch den vorletzten y die Parallele yZ zu Ax. Dann ist AZ der neunte Teil von AB.[1]) Diesen neunten Teil AZ trägt man mit dem Stechzirkel[2]) auf AB neunmal ab. Wenn der letzte Teilpunkt nicht genau auf B fällt, verbessert man AZ nach Augenmaß, indem man den Fehler zwischen dem letzten Teilpunkt und B in neun gleiche Teile zerlegt.

Das Abtragen und Teilen von Winkeln kommt zwar nicht so oft vor, bietet dafür leicht größere Schwierigkeiten, weil mit dem gewöhnlichen kleinen Winkelmesser, der meist allein zur Verfügung steht, eine hinreichende Genauigkeit nicht zu erreichen ist.

Man bekommt im Handel freilich größere recht gute Winkelmesser; nur schreckt der nicht unbeträchtliche Preis von der Anschaffung leicht zurück, solange es sich eben um eine gelegentliche, nicht dauernd wiederkehrende Aufgabe handelt. Überdies bleibt die Genauigkeit der Zeichnung immer mäßig, zumal wenn der Schenkel des abgetragenen Winkels wesentlich länger als der Radius des Winkelmessers werden soll.

1) Nach bekannten Sätzen der Proportionslehre ist nämlich $\frac{AZ}{AB} = \frac{xy}{Bx}$. Weil aber so gezeichnet wurde, daß $\frac{xy}{AB} = \frac{1}{9}$ ist, so ist auch $\frac{AZ}{AB} = \frac{1}{9}$; d. h. $AZ = \frac{1}{9} AB$.

2) Zum fortlaufenden Abtragen derselben kurzen Strecke hat man einen besonderen Teilzirkel, dessen Zirkelöffnung durch eine Schraube sehr genau eingestellt werden kann und zugleich durch sie festgehalten wird.

Es ist daher am besten, einige Kenntnis der Trigonometrie zu benutzen. Was dazu nötig ist, werde zunächst erklärt.

In Fig. 5 sei der Winkel α gegeben. Auf seinem einen Schenkel mögen beliebig viele Punkte B_1, B_2, B_3 usw. liegen. Von diesen Punkten fälle man auf den anderen Schenkel von α die Lote B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 usw. Wer aus der Geometrie noch nicht die Proportionssätze kennt, der mag sich wenigstens durch Nachmessen der Strecken B_1C_1, B_2C_2, ... und AC_1, AC_2, ... davon überzeugen, daß immer $\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} \cdots$ ist. Dieser Bruch gehört also gewissermaßen unveränderlich zum Winkel α. Umgekehrt kann man auch nur einen ganz bestimmten Winkel α zeichnen, der zu jenem Bruch gehört.[1]) Das heißt doch aber, wie in einem früheren Abschnitt erklärt wurde: der Bruch ist eine Funktion des Winkels α. Diese häufig vorkommende Funktion hat den Namen Tangens von α, kurz $\operatorname{tg}\alpha$ geschrieben, erhalten. Es ist also der Tangens eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck gleich dem Quotienten aus der gegenüberliegenden Kathete dieses Winkels zur anliegenden.[2]) Die Zahlenwerte dieser Funktion findet man in Tabellen.

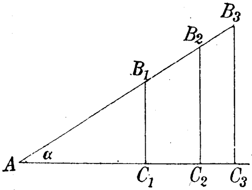


Fig. 5.

Es sei jetzt z. B. $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$. Wie zeichnet man den zugehörigen Winkel α? Vergleicht man mit Fig. 5, so muß also $B_1C_1 : AC_1 = 1{,}5$ sein. Praktisch einfach verfährt man daher so (s. Fig. 7): Auf der gegebenen wagerechten Geraden trägt man von A aus die Strecke $AC = 10$ cm ab,

1) Wäre z. B. der Bruch $\frac{2}{3}$, so hätte man eine Strecke $AC = 3$ cm zu zeichnen, in C das Lot $BC = 2$ cm zu errichten und A mit B zu verbinden. Dann wäre $\sphericalangle BAC$ der gesuchte. Statt 3 cm und 2 cm könnte man ebensogut 6 und 4 oder 9 und 6 usw. abtragen, da ja $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ ist.

2) Außer dem Tangens werden entsprechend wie oben noch die folgenden Winkelfunktionen eingeführt: Kotangens (ctg), Sinus (sin), Kosinus (cos), Sekans (sec), Kosekans (cosec). Es wird genügen, die Formeln für diese — s. Fig. 6 — anzugeben:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};\quad \sin\alpha = \frac{a}{c};\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a};$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c};\quad \sec\alpha = \frac{c}{b}.$$

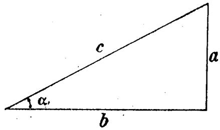


Fig. 6.

Sekans und Kosekans werden in neuerer Zeit wieder viel zur Vermeidung der Division bei der Rechenmaschine verwendet. Tabellen derselben sind z. B. enthalten in: O. Lohse, Tafeln für numerisches Rechnen mit Maschinen. Leipzig 1909.

errichtet in C das Lot und trägt auf ihm $CB = 15$ cm ab. Verbindet man B mit A, so ist $\sphericalangle BAC = \sphericalangle \alpha$, denn es ist ja wirklich $\operatorname{tg}\alpha = BC : AC = 15 : 10 = 1{,}5$.

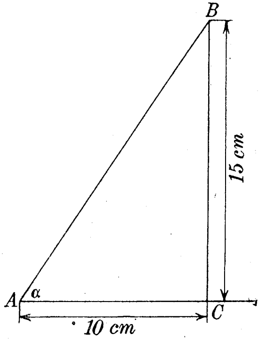


Fig. 7.

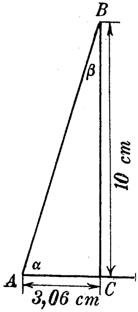


Fig. 8.

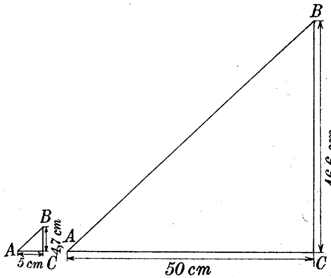


Fig. 9.

Soll ein bestimmter Winkel z. B. von 37^0 angetragen werden, so sieht man nach, wie groß $\operatorname{tg} 37^0$ ist. In der Tabelle findet man $\operatorname{tg} 37^0 = 0{,}7536$. Also trägt man entsprechend wie oben 10 cm und 7,54 cm ab.

Bei einem großen Winkel kann mit der günstigen Wahl von $AC = 10$ cm der Punkt B leicht so hoch liegen, daß er über die Zeichenfläche hinausfällt. Dann beachte man, daß in Fig. 8 $\operatorname{tg}\beta = AC : BC$ und $\beta = 90^0 - \alpha$ ist. Man kann mit Hilfe von β zeichnen genau wie vorher mit α. Ist z. B. $\alpha = 73^0$, so wird $\beta = 90^0 - 73^0 = 17^0$ und $\operatorname{tg} 17^0 = 0{,}3057$. Daher muß $AC = 3{,}06$ cm und $BC = 10$ cm gemacht werden, damit $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} 17^0 = 3{,}06 : 10 = 0{,}306$ und folglich $\alpha = 73^0$ wird.

Es mag noch erwähnt werden, daß oft besser bei kleinen Zeichnungen mit 5 cm und anderseits bei großen mit 50 cm auf der Horizontalen gezeichnet wird. Dann hat man auf der Vertikalen $10 \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ bzw. $100 \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ aufzutragen; denn es ist z. B.

$$\operatorname{tg} 43^0 = 0{,}9325 = \frac{\frac{1}{2}\,10 \cdot 0{,}9325}{\frac{1}{2}10} = \frac{10 \cdot \frac{0{,}9325}{2}}{5} = \frac{100 \cdot \frac{0{,}9325}{2}}{50}.$$
$$= \frac{4{,}7}{5} = \frac{46{,}6}{50}$$

In der Fig. 9 sind beide Fälle (verkleinert) angedeutet.

Diese Verfahren wendet man immer dann an, wenn um einen Punkt herum die Winkel von 5^0 zu 5^0 oder von 1^0 zu 1^0 usw. zu zeichnen sind. Aber auch sonst sind sie zu empfehlen. In einer Tabelle seien noch die Werte von $\operatorname{tg}\alpha$ und $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$ zusammengestellt.

α Grade	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$	α Grade	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$	α Grade	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$
1	0,0175	0,0087	31	0,6009	0,3004	61	1,8040	0,9020
2	0,0349	0,0175	32	0,6249	0,3124	62	1,8807	0,9404
3	0,0524	0,0262	33	0,6494	0,3247	63	1,9626	0,9813
4	0,0699	0,0350	34	0,6745	0,3373	64	2,0503	1,0252
5	0,0875	0,0437	35	0,7002	0,3501	65	2,1445	1,0723
6	0,1051	0,0525	36	0,7265	0,3633	66	2,2460	1,1230
7	0,1228	0,0614	37	0,7536	0,3768	67	2,3559	1,1779
8	0,1405	0,0703	38	0,7813	0,3906	68	2,4751	1,2375
9	0,1584	0,0792	39	0,8098	0,4049	69	2,6051	1,3025
10	0,1763	0,0882	40	0,8391	0,4196	70	2,7475	1,3737
11	0,1944	0,0972	41	0,8693	0,4346	71	2,9042	1,4521
12	0,2126	0,1063	42	0,9004	0,4502	72	3,0777	1,5388
13	0,2309	0,1154	43	0,9325	0,4663	73	3,2709	1,6354
14	0,2493	0,1247	44	0,9657	0,4828	74	3,4874	1,7437
15	0,2679	0,1340	45	1,0000	0,5000	75	3,7321	1,8660
16	0,2867	0,1434	46	1,0355	0,5178	76	4,0108	2,0054
17	0,3057	0,1529	47	1,0724	0,5362	77	4,3315	2,1657
18	0,3249	0,1625	48	1,1106	0,5553	78	4,7046	2,3523
19	0,3443	0,1722	49	1,1504	0,5752	79	5,1446	2,5723
20	0,3640	0,1820	50	1,1918	0,5959	80	5,6713	2,8356
21	0,3839	0,1919	51	1,2349	0,6175	81	6,3138	3,1569
22	0,4040	0,2020	52	1,2799	0,6400	82	7,1154	3,5577
23	0,4245	0,2122	53	1,3270	0,6635	83	8,1443	4,0722
24	0,4452	0,2226	54	1,3764	0,6882	84	9,5144	4,7572
25	0,4663	0,2332	55	1,4281	0,7142	85	11,430	5,715
26	0,4877	0,2439	56	1,4826	0,7413	86	14,301	7,150
27	0,5095	0,2548	57	1,5399	0,7699	87	19,081	9,541
28	0,5317	0,2659	58	1,6003	0,8002	88	28,636	14,318
29	0,5543	0,2772	59	1,6643	0,8321	89	57,290	28,645
30	0,5774	0,2887	60	1,7321	0,8660	90	∞	∞

In der Regel wird man nur die Werte bis 45^0 gebrauchen. Der Vollständigkeit wegen sind sie bis 90^0 angegeben.

Die Teilung eines Winkels in zwei, drei usw. gleiche Teile wird ganz ähnlich wie bei einer Strecke durch Ausprobieren ausgeführt. Man beschreibt um den Scheitelpunkt von α (s. Fig. 10) einen Kreis und verfährt auf dem Bogen PQ genau wie früher auf der Strecke. In der Figur ist die Halbierung des Winkels angedeutet. Man vergleiche dazu Fig. 3.

Soll der Winkel in eine größere Anzahl gleicher Teile zerlegt werden, so wird man nicht so leicht die richtige Zirkelöffnung finden. Es empfiehlt sich zuerst eine ein wenig zu kleine und darauf eine ein wenig zu große oder umgekehrt zu wählen. Zwischen beiden schätzt man die wahre ab. Wenn nicht anders wird man durch mehrfaches Probieren immer weiter den Unterschied zwischen einer zu großen und einer zu kleinen Zirkelöffnung einengen und so sicher zum Ziele kommen.

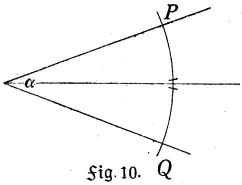


Fig. 10.

Die Teilung eines beliebigen Winkels in drei gleiche Teile mit Zirkel und Lineal allein ist streng mathematisch nicht möglich, wie seit langem bewiesen ist.[1]) Trotzdem gehört auch diese Aufgabe zu jenen, welche unverständige Leute immer wieder zu lösen versuchen, natürlich ohne jeglichen Erfolg. Falsche Lösungen — und andere sind ja, wie gesagt, gänzlich unmöglich — gibt es nachgerade genug. Der „Ruhm", noch eine falsche dazugefunden zu haben, sollte eigentlich niemand mehr verlockend sein.

b) Lote und Parallelen. In der Geometrie lernt man, wie nach bestimmten Lehrsätzen Lote zu errichten und Parallelen zu ziehen sind. Diese Konstruktionen hätte man unbedingt anzuwenden, wenn sich ideal genau zeichnen ließe. Praktisch sieht die Sache anders aus. Da kann dieselbe, zuweilen größere Genauigkeit auf einfachere Weise erreicht werden. Zwei Beispiele zeigen, wie zu verfahren ist.

Zur Geraden xy soll durch den Punkt P, der irgendwo außerhalb xy liegt, die Parallele gezogen werden.[2])

Zur Lösung gebraucht man ein Zeichendreieck und ein Lineal. Man legt das Zeichendreieck mit seiner längsten Kante ab (s. Fig. 11) an xy; dann schiebt man das Lineal genau an die Kante bc (oder ac) heran (1. Lage). Das Lineal wird von jetzt an festgehalten. Das Dreieck wird dagegen mit der Kante bc am Lineal entlanggeschoben, bis die

1) Wer den Beweis für diese Unmöglichkeit kennen lernen will, mag ihn etwa nachlesen bei F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Leipzig 1895 Sehr gute Näherungslösungen gibt es in sehr großer Menge; ebenso ist eine größere Anzahl von Instrumenten bekannt, die die Dreiteilung des Winkels leisten. Aber vielleicht außer dem Erfinder benutzt sie sicherlich kein Mensch. Auch in diesen Beziehungen kann nur nachdrücklichst von einer Beschäftigung mit dem Problem abgeraten werden.

2) Es heißt die Parallele, weil es nur eine durch den Punkt P gibt.

Kante ab durch P hindurchgeht (2. Lage). In dieser neuen Lage zieht man durch P an ab entlang eine Gerade. Das ist die gesuchte Parallele.

(Im Grunde genommen hat man nichts anderes getan, als auch die theoretische Lösung verlangt. Man hat eben durch P eine Gerade gezogen, die mit der Linealkante denselben Winkel bildet wie xy, nämlich den Dreieckswinkel bei b.)

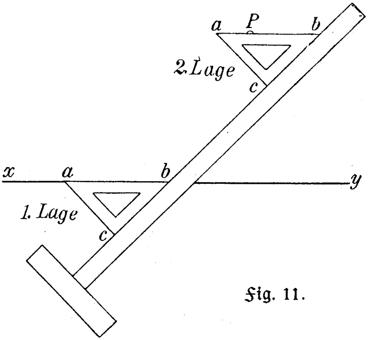


Fig. 11.

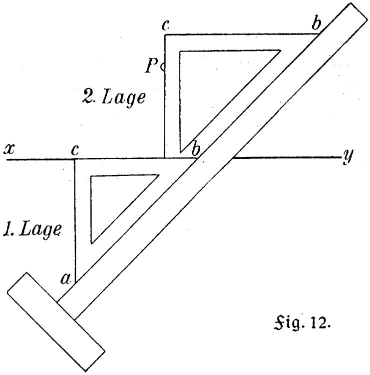


Fig. 12.

Auf die Gerade xy soll vom Punkte P aus das Lot gefällt werden (Fig. 12).

Man lege das Zeichendreieck diesmal mit einer der kleinen Kanten, z. B. bc, an xy an. Die Dreieckskante ac ist zu bc senkrecht. Verschiebt man daher das Dreieck so, daß bc stets parallel zu xy ist, so wird ac stets senkrecht zu xy bleiben, da ein Lot auf einer Geraden auch auf allen Parallelen zu dieser Geraden senkrecht steht. Man schiebt deshalb das Lineal an ab heran (1. Lage). Wieder wird das Lineal festgehalten und das Dreieck verschoben, bis die Kante ac durch P hindurchgeht (2. Lage). Eine Gerade entlang ac durch P gezogen ist das gesuchte Lot.

Die Genauigkeit der Konstruktionen hängt natürlich ganz von der Güte des Dreiecks und des Lineals ab. Wenn man nicht ein zuverlässig richtiges Stahllineal zur Verfügung hat, an das man die Reißschiene zur Prüfung nur anzulegen braucht, so hilft man sich, indem man möglichst sorgfältig an der zu prüfenden Kante entlang eine Gerade zieht. Jetzt dreht man die Reißschiene um, so daß die andere Fläche auf dem Papier aufliegt, und legt dieselbe Kante wie vorher an der Bleistiftlinie entlang. Fällt auch jetzt die Kante mit jener zusammen, so kann man sie als geradlinig betrachten.

Den rechten Winkel des Dreiecks erprobt man, indem man eine Gerade zieht, die Kante a c an die Gerade anlegt und längs b c eine Linie zieht. Jetzt schlägt man das Dreieck um b c herum, so daß wieder a c auf die Gerade fällt, aber in symmetrischer Lage wie vorher. Ist der Winkel bei c wirklich ein rechter, so muß wieder b c in der neuen Lage mit der gezogenen Linie zusammenfallen.

Die im Handel erhältlichen Dreiecke und Reißschienen sind keineswegs immer brauchbar; sie sollten deshalb stets beim Einkauf geprüft werden.

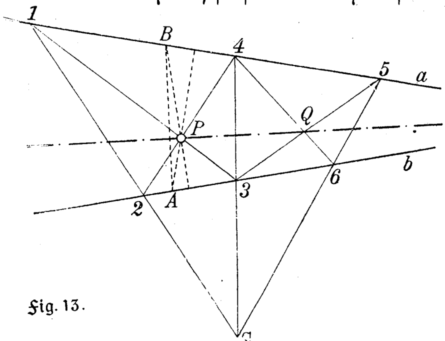


Fig. 13.

c) Konstruktionen in begrenzter Ebene. Da es vielfach vorkommt, daß zu einer Konstruktion wichtige Teile über das vorhandene Zeichenblatt hinausfallen, so ist es nötig, Methoden auszubilden, die in solchen Fällen anzuwenden sind. An einem Beispiel soll gezeigt werden, wie man verfährt.[1]) Es seien zwei sich schneidende Geraden, deren Schnittpunkt aber nicht mehr zugänglich ist, gegeben. Ein beliebiger Punkt P soll mit diesem Schnittpunkt verbunden werden. In Fig. 13 sind a und b die gegebenen Geraden. Durch P lege man zwei beliebige Strahlen, die a und b in den Punkten 1 bis 4 schneiden. Dann zieht man 1; 2 und 3; 4 und verlängert sie bis zu ihrem Schnittpunkt S. Durch S legt man einen neuen Strahl, der a und b in den Punkten 5 und 6 trifft. Weiter zieht man 3; 5 und 4; 6 und verbindet endlich den Schnittpunkt Q dieser Geraden mit P. Das ist die gesuchte Gerade, die P mit dem Schnittpunkt von a und b verbindet. Eine andere weniger schöne, aber leichter verständliche Lösung ist ebenfalls in Fig. 13 gestrichelt eingezeichnet. Da sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkte schneiden müssen, so fällt man von P aus die Lote auf a und b und macht P zum Höhenschnittpunkt eines Dreiecks, indem man die beiden Punkte A und B, die nicht Lotfußpunkte sind, miteinander verbindet. Das Lot von P auf AB muß dann die dritte Höhe sein, also durch die Dreiecksspitze, d. h. den Schnittpunkt von a und b gehen.

1) Vgl. im übrigen: Zühlke, Konstruktionen in begrenzter Ebene (Mathem. Bibliothek Bd. 11). Leipzig 1913.

3. Die regelmäßigen Vielecke. Teilt man den Umfang eines Kreises in 3, 4, 5 usw. gleiche Teile und verbindet jedesmal die sämtlichen Teilpunkte in regelmäßiger Aufeinanderfolge durch Sehnen, so daß eine geschlossene Figur entsteht, so erhält man ein regelmäßiges Vieleck.

a) Das regelmäßige Dreieck. Fig. 14. Man zieht einen beliebigen Durchmesser Ax. Mx halbiert man im Punkte y und errichtet auf Ax in y das Lot, welches den Kreis in B und C schneidet. Verbindet man noch A mit B und C, so ist ABC ein regelmäßiges Dreieck. (Die Beweise für die Richtigkeit dieser und der folgenden Konstruktionen mag man selbst zu finden suchen oder in irgendeinem Lehrbuch der Planimetrie nachlesen.)

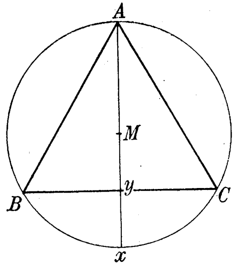


Fig. 14.

b) Das regelmäßige Viereck. Fig. 15. Man zieht zwei aufeinander senkrechte Durchmesser und verbindet deren Endpunkte 1 bis 4 durch Sehnen. Man kann zuerst in regelmäßiger Folge 1 — 2 — 3 — 4 verbinden. Dann könnte man versuchen, immer je eine Ecke zu überschlagen, dabei entstände aber keine geschlossene Figur durch sämtliche Ecken. Endlich wäre möglich, abwechselnd die Punkte aufeinanderfolgend und einen überschlagend zu wählen; also 1—2÷4—1÷3—4÷2—3÷1. Wirklich entsteht eine geschlossene Figur (das Quadrat mit den Diagonalen) durch sämtliche Punkte. Diese abwechselnden Punktfolgen, bei denen durch jede Ecke mindestens drei Seiten des Vielecks gehen, sollen im folgenden nicht weiter berücksichtigt werden. Zur Übung mag sie jedoch ein jeder selbst hinzufügen.

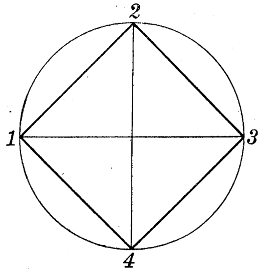


Fig. 15.

c) Das regelmäßige Fünfeck. Fig. 16. Nach Ptolemäus kann man so zeichnen. Auf einem beliebigen Durchmesser AB errichtet man das Mittellot MC. AM halbiert man im Punkte D und beschreibt um D mit DC einen Kreisbogen, der BM in E schneidet. Dann ist die Strecke CE gleich der gesuchten Fünfecksseite.

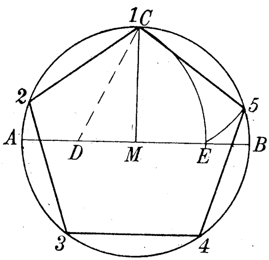


Fig. 16.

Man trägt sie fünfmal in den Kreis ein und erhält die Teilpunkte 1 bis 5. Verbindet man sie in ununterbrochener Reihenfolge, so erhält man das regelmäßige Fünfeck der Fig. 16. In Fig. 17 ist immer je eine Ecke überschlagen. Dabei entsteht eine sternförmige Figur, die als Pentagramm, Drudenfuß usw. bekannt ist und in verschiedenen Teufelssagen eine wichtige Rolle spielt. Überschlägt man immer zwei oder drei Ecken, so erhält man nur dieselben Gebilde wieder.

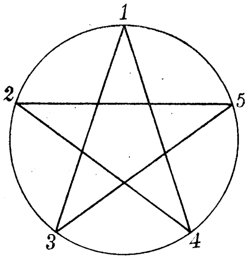


Fig. 17.

d) Das regelmäßige Sechseck. Fig. 18. Man trägt den Halbmesser des Kreises sechsmal hintereinander in den Kreisumfang als Sehne ein. Die Teilpunkte verbindet man in ununterbrochener Folge. Durch gleichmäßiges Überschlagen von ein, zwei, drei usw. Teilpunkten entstehen keine weiteren regelmäßigen Sechsecke.

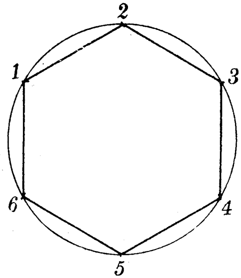


Fig. 18.

e) Das regelmäßige Siebeneck. Fig. 19. Wie man beweisen kann, ist es unmöglich, das regelmäßige Siebeneck geometrisch genau mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Aber es gibt zahlreiche gute Näherungslösungen. Eine davon, die genau so für das Neuneck, Elfeck usw. verwendet werden kann, ist die folgende vom Herzog Karl Bernhard von Sachsen-Weimar gefundene. Einen beliebigen Durchmesser AB teilt man in sieben gleiche Stücke. Im Mittelpunkt von AB errichtet man einen senkrechten Halbmesser und verlängert ihn um $^1/_7$ AB bis C. Ebenso verlängert man AB um $^1/_7$ AB über A hinaus bis D. C verbindet man mit D. Diese Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten. Denjenigen, der A am nächsten liegt, also E, verbindet man immer mit dem von A aus gerechnet dritten Teilpunkt, hier F auf AB. Dann ist EF die gesuchte Sehne, die sich annähernd richtig siebenmal hintereinander in den Kreis eintragen läßt. Je nachdem

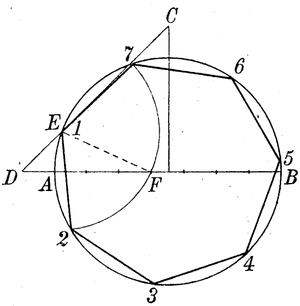


Fig 19.

man die Teilpunkte in ununterbrochener Folge (Fig. 19) verbindet oder je einen (Fig. 20) oder je zwei (Fig. 21) überschlägt, erhält man drei verschiedene regelmäßige Siebenecke.

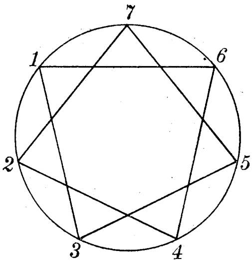


Fig. 20.

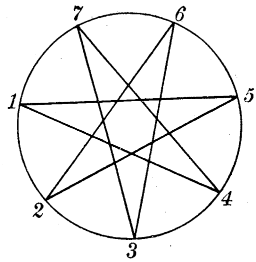


Fig. 21.

f) Das regelmäßige Achteck. Fig. 22. Man zeichnet zwei zueinander senkrechte Durchmesser und halbiert die rechten Winkel mit Hilfe des 45^0-Dreiecks. Man erhält zwei verschiedene regelmäßige Achtecke durch Verbinden der aufeinanderfolgenden Teilpunkte (Fig. 22) und durch Überschlagen von je zweien (Fig. 23).

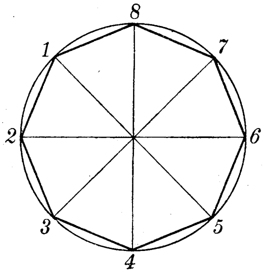


Fig. 22.

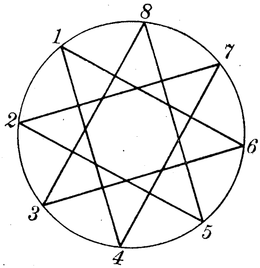


Fig. 23.

g) Andere regelmäßige Vielecke. Noch eine ganze Reihe von regelmäßigen Vielecken kann mathematisch genau mit Zirkel und Lineal gefunden werden. Selbstverständlich ist, daß man durch fortgesetztes Halbieren der Winkel oder Bögen die Vielecksreihen: 3, 6, 12, 24, ...; 4, 8, 16, 32, ...; 5, 10, 20, 40, ... zeichnen kann; aber auch z. B. das 15-Eck und das 17-Eck sind zu nennen. Die Sehne zur regelmäßigen Zehnteilung ist übrigens in Fig. 16 mitgefunden, da sie gleich ME ist.

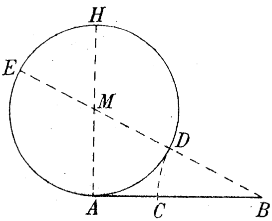


Fig. 24.

Anmerkung. Die Sehne des regelmäßigen Zehnecks wird gewöhnlich mit Hilfe des „Goldenen Schnittes" gefunden; über diesen mögen ein paar Worte folgen. Eine Strecke AB, Fig. 24, soll nach dem Goldenen Schnitt oder stetig geteilt werden, d. h. so, daß sich der kleinere Abschnitt zum größeren verhält, wie der größere zur ganzen Strecke. (Man sagt auch: der größere Abschnitt ist mittlere Proportionale zwischen dem kleineren und der ganzen Strecke.) Also soll sein

$AC:BC = BC:AB$. Man findet den Teilpunkt C, indem man in A auf AB das Lot errichtet und auf ihm AB abträgt, so daß also $AH = AB$ ist. Über AH als Durchmesser zeichnet man einen Kreis, dessen Mittelpunkt M man mit B verbindet. Ist D der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreise, so hat man noch BD von B aus auf AB abzutragen, um den gesuchten Teilpunkt C zu finden.[1])

Die Sehne des regelmäßigen Zehnecks ist gleich dem größeren Abschnitt des stetig geteilten Kreishalbmessers.

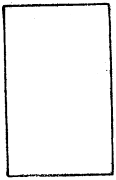


Fig. 25

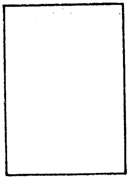


Fig. 26.

Angeblich führt die stetige Teilung zu besonders harmonischen Gebilden. Bis zu einem gewissen Grade ist das gewiß richtig; aber es ist entschieden zu verwerfen, wenn übereifrige Leute nun überall in der Natur und auf guten Gemälden stetige Teilungen finden. Wenn man nur an der richtigen Stelle zu messen anfängt, muß das schließlich recht häufig gelingen.[2]) Ein Rechteck, dessen Seiten Teile einer stetig geteilten Strecke sind, Fig. 25, hat man ein Rechteck schönster Form genannt. Andere geben einem Rechteck, dessen größere Seite gleich der Diagonale im Quadrat aus der kleineren Seite ist, Fig. 26, diesen Namen.

4. Die Kegelschnitte. Von den krummen Linien hat ja die größte Wichtigkeit der Kreis, allein schon deshalb, weil man ein so einfaches Instrument wie den Zirkel besitzt, um ihn zu zeichnen. Nach ihm sind besonders die Kegelschnitte zu nennen. Sie entstehen, wie ihr Name sagt, als Schnittfiguren, wenn man durch einen Kreiskegel irgendeinen ebenen Schnitt legt. Es gibt (von besonderen Fällen abgesehen, in denen auch gerade Linien als Kegelschnitte aufzufassen sind) drei Arten von Kegelschnitten: Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln.

a) Die Parabel. Die Punkte einer Parabel haben von einer festen Geraden L, der Leitlinie, und einem festen Punkt B, dem Brennpunkt, gleichen Abstand (Fig. 27). Daraus ergibt sich die in derselben Figur angegebene mechanische Konstruktion. An die Leitlinie entlang legt man ein Lineal. Weiter braucht man ein rechtwinklig gebogenes Lineal, an dessen einem Ende A man einen Faden von der genauen Länge AC befestigt. Aber das andere Ende knotet man an einem im Brennpunkt B

1) Nach einem bekannten Satz aus der Kreislehre ist:
$BD:BA = BA:BE$, und folglich wird $(BA - BD):BD = (BE - BA):BA$, d. h. $AC:BD = BD:BA$ oder $AC:BC = BC:BA$, wenn man noch BD durch BC ersetzt.

2) Um nur ein Beispiel zu nennen: Augenabstand und Nasenlänge des normalen Menschen sollen eine stetig geteilte Strecke ergeben. Man versuche selbst, das festzustellen.

eingeschlagenen Nägelchen fest. In P setzt man einen Bleistift ein, den man dauernd an das Winkellineal andrückt, indem man zugleich den Faden fest spannt. Verschiebt man nun das Winkellineal an L entlang, so beschreibt P eine Parabel, da in der Tat immer PB=PC ist. Für den unteren Teil der Parabel muß man das Winkellineal herumschlagen.

Fällt man von B das Lot auf L, so erhält man als Schnittpunkt den Scheitelpunkt S der Kurve. BS ist eine Symmetrielinie, die man die Achse der Parabel nennt. Am wenigsten gut wird die Zeichnung immer in der Nähe von S ausfallen. Aber da kann man sich helfen. Wie es in jedem Punkte einer Kurve eine gerade Linie, die Tangente, gibt, die sich besonders gut anschmiegt, so gibt es auch stets einen ganz bestimmten Kreis für jeden Punkt, den Krümmungskreis, von dem ein Bogenstückchen am besten mit der Kurve zusammenfällt.[1]) Der Symmetrie wegen schmiegt sich der Krümmungskreis im Scheitel ganz besonders gut der Kurve an, so daß man dort ein erhebliches Stück der Parabel durch einen Kreisbogen ersetzen kann. Hier hat der Krümmungskreis den Halbmesser 2 · BS. Sein Mittelpunkt M liegt auf der Achse. In die Figur ist er eingezeichnet; man sieht, wieweit er mit der Parabel zusammenfällt.

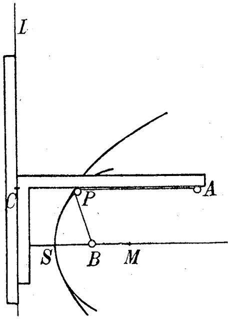


Fig. 27.

Es ist noch die Bedeutung des Namens Brennpunkt zu erklären. Befindet sich in B eine Lichtquelle, und denkt man sich den Parabelbogen spiegelnd — Fig. 28 —, so werden alle Lichtstrahlen parallel zur Achse zurückgeworfen. Bei Scheinwerfern benutzt man Spiegel, deren Fläche durch Umdrehung einer Parabel um ihre Achse entstanden zu denken ist. Die Lichtquelle wird im Brennpunkt angebracht, so daß ein eng umgrenztes, also sehr helles Bündel paralleler Lichtstrahlen entsteht. Fängt man umgekehrt die parallelen Sonnenstrahlen mit einem

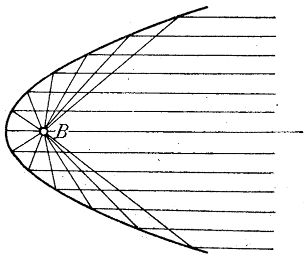


Fig. 28.

1) Die Tangente gibt die Richtung an, in der die Kurve an der betreffenden Stelle weiterläuft, während der Krümmungskreis angibt, wie stark sie an jener Stelle gekrümmt ist.

parabolischen Spiegel so auf, daß die Strahlen zur Achse parallel sind, so werden sie im Brennpunkt gesammelt und können dort eine Entzündung leicht brennbarer Stoffe hervorrufen.

Zwei häufiger benutzte Konstruktionen der Parabel mögen noch folgen. Wenn die Achse mit dem Scheitelpunkt S, Fig. 29, und irgendein Parabelpunkt P gegeben sind, so zieht man durch P die Parallele zur Achse und errichtet in S das Lot auf der Achse. Q möge der Schnittpunkt sein. QP und QS teilt man in gleich viele unter sich gleiche Stücke und zieht von S aus nach den Teilpunkten von PQ Strahlen, während man durch die Teilpunkte von QS Parallelen zur Achse legt. Durch gleiche Zahlen zugeordnete Geraden schneiden sich in den Kurvenpunkten. Trägt man die Teilabschnitte über Q und P hinaus ab und konstruiert weiter wie vorher, so erhält man die Verlängerung der Parabel beliebig weit über P hinaus.

Sind — Fig. 30 — zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten A und B gegeben, so teilt man AC und BC (C ist der Schnittpunkt der Tangenten) in gleich viele unter sich gleiche Stücke und beziffert, wie in der Figur angegeben. Entsprechende Punkte verbindet man. Diese Verbindungsgeraden umhüllen eine Parabel. Aber auch die Berührungspunkte sind leicht anzugeben. Sie liegen jedesmal im Mittelpunkt des

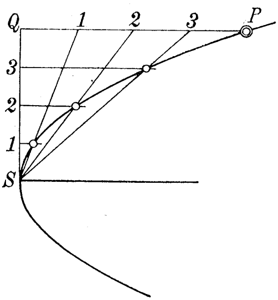


Fig 29.

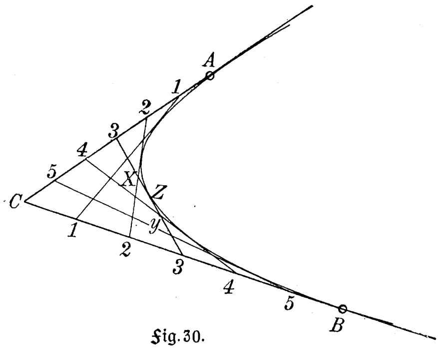


Fig. 30.

zugehörigen Tangentenstückchens, also z. B. Z, der Mittelpunkt von XY, ist der Berührungspunkt dieser Tangente. Wieder erhält man die Verlängerung der Parabel über A und B hinaus, wenn man die Teilabschnitte über A, B und C hinaus abträgt und weiter zeichnet wie vorher.

b) **Die Ellipse.** Die Ellipse, Fig. 31, ist im Gegensatz zur Parabel eine geschlossene Figur. Sie besitzt zwei Brennpunkte B_1 und B_2. Befände sich in B_1 eine Lichtquelle, so würden die von der spiegelnd gedachten Ellipse zurückgeworfenen Strahlen alle durch B_2 laufen. Bei Flüstergewölben hat man es z. B. mit Teilen von Flächen zu tun, die durch Umdrehung einer Ellipse um $B_1 B_2$ entstanden gedacht werden können. Ein nahe B_1 geführtes leises Gespräch wird in B_2 und in der Nähe von B_2 gut und deutlich zu verstehen sein. Die Gerade durch $B_1 B_2$ ist eine Symmetrielinie der Kurve; sie heißt die große Achse. Aber auch zum Mittellot auf $B_1 B_2$ liegt die Ellipse symmetrisch. Diese Gerade heißt die kleine Achse. Bei der Ellipse ist die Summe der Abstände jedes beliebigen Kurvenpunktes von den Brennpunkten, also $PB_1 + PB_2$ gleich der Länge der großen Achse. Diese Eigenschaft führt zur **Fadenkonstruktion** der Ellipse. Fig. 32. In den Brennpunkten steckt man zwei Nadeln fest; um sie herum schlingt man einen zusammengeknoteten Faden. Mit einem Bleistift den Faden stets straff gespannt haltend, umfährt man die Brennpunkte. Die Fadenlänge ist offenbar gleich der großen Achse, vermehrt um den Abstand der Brennpunkte.

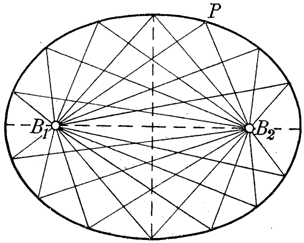


Fig. 31.

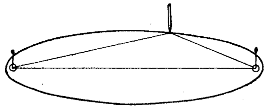


Fig. 32.

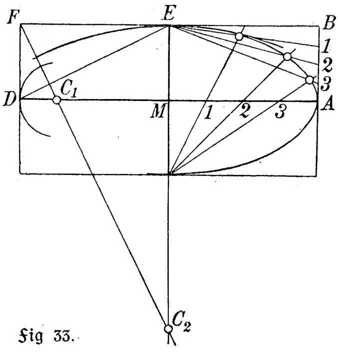


Fig 33.

Häufiger ist die Aufgabe, eine Ellipse zu zeichnen, deren beide Achsen gegeben sind. Man zieht durch die Endpunkte der Achsen zu ihnen die Parallelen, Fig. 33. Dann teilt man AM und AB in gleich viele unter sich gleiche Strecken. Die Endpunkte der kleinen Achse verbindet man mit den Teilpunkten. Die Schnittpunkte gleichzahliger Strahlen sind Ellipsenpunkte. Auch hier lassen sich die Krümmungskreise in den Scheiteln, nämlich den Endpunkten der Achsen, leicht finden.

Man zieht die Diagonale DE und fällt auf sie von F das Lot. Die Schnittpunkte mit den Achsen C_1 und C_2 sind die gesuchten Krümmungsmittelpunkte, um welche die Krümmungskreise zu schlagen sind.

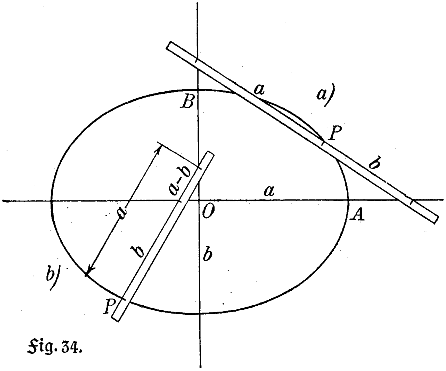


Fig. 34.

Mancheiner wird indessen die folgende **Papierstreifenkonstruktion** vorziehen. Am Rande eines Papierstreifens trägt man die Längen OA = a und OB = b ab, entweder in gleicher Richtung (also als Summe), Fig. 34a, oder in entgegengesetzter (also als Differenz), Fig. 34b. Der letzte Punkt P, den man jedesmal auf dem Zeichenpapier anmerkt, beschreibt die Ellipse, wenn die beiden anderen Punkte auf den beiden Achsen entlang geführt werden. Auf mechanischem Wege führt direkt die hier beschriebene Konstruktion der **Ellipsenzirkel** aus, der in Fig. 35 abgebildet ist.

Kommt es nur darauf an, eine Kurve zu zeichnen, die annähernd

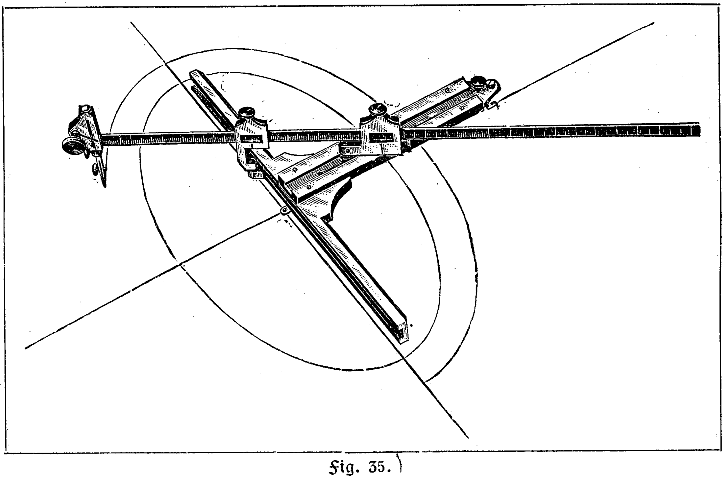


Fig. 35.

eine elliptische Form hat, ohne also genau eine Ellipse zu sein, so kann man, wie folgt, zeichnen. Die Krümmungskreise in Fig. 32 gehen natürlich nicht ineinander über. Vergrößert man aber C_1D ein wenig und verkürzt dafür C_2E ein Stückchen, so wird man leicht zwei Kreise finden können, die ineinander laufen. Man erhält solche neuen Mittelpunkte, Fig. 36, wenn man wieder die Diagonale AB zieht, dann aber die Winkel DAB und DBA halbiert und vom Schnittpunkt der Halbierungslinien das Lot auf AB fällt.

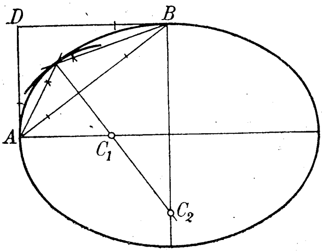


Fig. 36.

Dieses Lot schneidet die Achsen in den gesuchten Mittelpunkten C_1 und C_2. Ist die Figur nicht zu langgestreckt, so werden die Kreise meist tatsächlich ineinander übergehen. Wenn nicht, so genügt eine geringe Verschiebung von C_2.

c) Die Hyperbel. Weniger wichtig ist im allgemeinen die Hyperbel. Sie besteht, Fig. 37, aus zwei getrennten Zweigen und besitzt ebenfalls zwei Brennpunkte B_1 und B_2. Auch hier gilt der Satz, daß Lichtstrahlen, die vom einen Brennpunkt B_1 ausgehen, so zurückgeworfen werden, daß sich ihre Verlängerungen im anderen Brennpunkt B_2 schneiden. Die Lichtstrahlen werden also tatsächlich in einem breiten Lichtkegel auseinandergeworfen. Spiegel mit hyperbolischem Querschnitt gebraucht man deshalb z. B. an den Lokomotiven der Eisenbahn. Da die Differenz der Strahlen von einem beliebigen Kurvenpunkte P nach den Brennpunkten, also $PB_1 - PB_2$ (bzw. $PB_2 - PB_1$) gleich der großen Achse, nämlich dem Abstande der Scheitelpunkte, ist, so ergibt sich die folgende Fadenkonstruktion, Fig. 38. L ist ein um B_1 drehbares Lineal; in B_2 und Q ist ein Faden befestigt von der Länge $B_1Q - 2a$, wenn $2a$ die Länge der großen Achse ist. In P drückt man einen Bleistift fest an das Lineal an, indem man zugleich den Faden straff spannt. Dreht man das

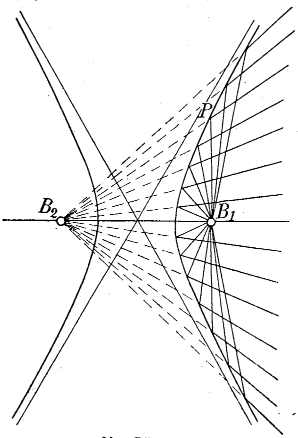


Fig. 37.

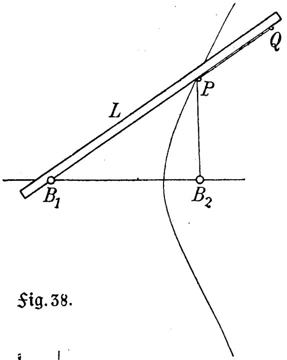


Fig. 38.

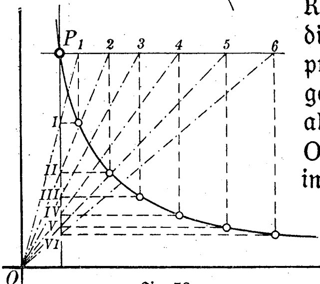


Fig. 39.

Lineal um B_1, so beschreibt P den einen Hyperbelteil.[1])

Bei jeder Hyperbel gibt es zwei vom Mittelpunkt ausgehende gerade Linien, die die Hyperbel, wie man sagt, im Unendlichen berühren; d. h. die Kurve nähert sich beständig diesen Geraden, ohne sie je ganz zu erreichen (s. Fig. 37). Solche Geraden nennt man Asymptoten einer Kurve. Die weitaus wichtigste aller Hyperbeln ist die gleichseitige, bei der die Asymptoten aufeinander senkrecht stehen. Von dieser sei eine Konstruktion angegeben, und zwar, wenn die beiden zueinander senkrechten Asymptoten und irgendein Punkt P der Kurve gegeben sind, Fig. 39. Durch P legt man Parallelen zu den Asymptoten und zieht von O aus beliebige Strahlen, die die Parallelen in I, 1; II, 2 usw. schneiden. Durch diese Schnittpunkte I, 1; II, 2 usw. zieht man ebenfalls Parallelen zu den Asymptoten; dann sind ihre Schnittpunkte die gesuchten Kurvenpunkte. Die Punkte des anderen Hyperbelzweiges liegen symmetrisch zu O.

5. Konstruktionen im Gelände. Ohne auf die Meßmethoden oder Instrumente der Geodäsie einzugehen[2]), seien nur ein paar einfachste Aufgaben erwähnt, die ohne besondere Hilfsmittel gelöst werden. Um zwischen zwei Punkten eine gerade Linie abzustecken, schlägt man an den Endpunkten zwei Stangen in die Erde und visiert an der Kante der einen vorbei zur Kante der anderen hinüber. Längs dieser Visierlinie spannt man nun eine Schnur aus oder schlägt Pflöcke in die Erde.

---

1) Es ist nämlich

$$\begin{aligned} PB_1 - PB_2 &= QB_1 - QP - PB_2 = QB_1 - (QP + PB_2) \\ &= QB_1 - (QB_1 - 2a) = QB_1 - QB_1 + 2a = 2a. \end{aligned}$$

2) Darüber siehe Vermessungs- und Kartenkunde (ANuG Bd. 606 bis Bd. 612). 1. Schnauder, Geographische Ortsbestimmung. 2. Eggert, Erdmessung. 3. Suckow, Landmessung. 4. Hegemann, Ausgleichungsrechnung. 5. Lüscher, Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie. 6. I u. 2 Egerer, Kartenkunde.

Weiter soll im Endpunkt dieser Geraden eine dazu senkrechte Gerade abgesteckt werden. Dazu benutzt man den pythagoreischen Lehrsatz, der z. B. aussagt, daß in einem rechtwinkligen Dreieck die längste Seite 5 m lang ist, wenn die Schenkel des rechten Winkels 3 m und 4 m betragen. Denn es ist $3^2 + 4^2 = 5^2$, nämlich $9 + 16 = 25$. Man nimmt daher drei Latten von 3 m, 4 m und 5 m Länge (statt m könnte man ebensogut Fuß oder überhaupt irgendeine beliebige Längeneinheit wählen). Die 3 m-Latte legt man, Fig. 40, auf die schon abgesteckte Strecke von A aus bis D. Die 4 m-Latte legt man in A und die 5 m-Latte in D an und dreht sie so lange herum, bis sie zusammenstoßen. Dann steht nach dem erwähnten Lehrsatz die 4 m-Latte auf AD senkrecht. Wenn man will, kann man statt der Latten z. B. auch ein Seil benutzen, auf dem die Strecken durch Knoten abgegrenzt sind. Übrigens haben nach dieser Methode schon die Ägypter beim Bau der Pyramiden rechte Winkel abgesteckt.

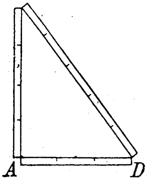


Fig. 40.

Eine Ellipse zeichnet man nach der oben beschriebenen Fadenkonstruktion, indem man zwei Pflöcke in die Erde schlägt, ein Seil herumlegt, verknotet und mit einem Stabe die Ellipse in die Erde zeichnet. Hat man nur einen Pflock statt der zwei, so entsteht selbstverständlich ein Kreis, der also nichts anderes ist als eine Ellipse, bei der die Brennpunkte zusammengefallen sind.

6. Tangentenkonstruktionen. Es würde zu weit führen, wenn hier noch die Tangentenkonstruktionen an bestimmte Kurven, z. B. Parabel, Ellipse, Hyperbel angegeben werden sollten. Schließlich kommen solche Aufgaben auch seltener vor. Dagegen mag es lohnen, diese Konstruktionen für ganz beliebige Kurven, welche nur gezeichnet vorliegen, anzugeben.

a) Fig. 41. Im Punkte P einer ganz beliebigen Kurve ist die Tangente zu zeichnen.[1]) Man zieht von P aus eine Reihe Sehnen, welche die Kurve in A, B, C usw. schneiden. Auf den verlängerten Sehnen trägt man von A, B, C usw. aus immer nach derselben Seite eine beliebige konstante Strecke a ab

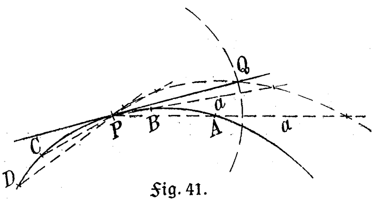


Fig. 41.

1) Nach R. Mehmke, Leitfaden z. graphischen Rechnen. Leipzig 1917.

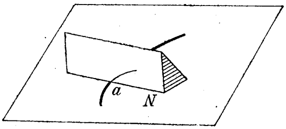


Fig. 42.

und verbindet die Endpunkte durch eine Hilfskurve k. Dann beschreibt man um P einen Kreisbogen mit dem Halbmesser a, welcher k in Q schneidet. Die Verbindungsgerade PQ ist die gesuchte Tangente.

b) Fig. 42. Man kann sich zur Lösung der Aufgabe eines Spiegellineals[1]) bedienen. Wie die Figur zeigt, setzt man den Spiegel, der von einer blank polierten Metallfläche gebildet wird, in a an. Das Spiegelbild der Kurve bildet im allgemeinen einen deutlichen Knick mit der Kurve selbst in a. Man dreht es so lange, bis in a das Spiegelbild stetig in die Kurve übergeht. Die Spiegelkante steht dann auf der gesuchten Tangentenrichtung senkrecht. Dieses Lot, Normale genannt, zeichnet man und findet daraus unmittelbar die Tangente.

c) Fig. 43. An eine beliebige Kurve ist eine Tangente gezogen. Es ist der Berührungspunkt zu ermitteln. In beliebigen Punkten A, B, C usw. zu beiden Seiten der gegebenen Tangente ziehe man weitere Tangenten. Auf ihnen trage man von A, B, C usw. aus eine beliebige, aber konstante Strecke a ab, deren Endpunkte man durch eine Hilfskurve k verbindet. k schneide die gegebene Tangente in Q; dann beschreibt man mit a um Q einen Kreisbogen, der die Kurve im gesuchten Berührungspunkt P schneidet.

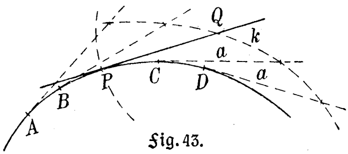


Fig. 43.

7. Graphische Interpolation. Im ersten Teile wurde gezeigt, wie man Funktionen graphisch aufzeichnet und aus dem so gezeichneten Diagramm beliebig viele Werte der Funktion ablesen kann. In dieser und der nächsten Nummer sollen Kurvenscharen, die Bilder von Funktionen sind, behandelt werden. Dabei wird es sich nur um Funktionen handeln, die gesetzmäßig voneinander abhängen, so daß auch die Kurvenscharen eine gesetzmäßige Anordnung erhalten. Zuerst sei der Fall betrachtet, daß durch Versuch oder Einzelberechnung (also ohne eine gemeinsame mathematische Formel) eine gewisse Anzahl von Punkten einer jeden Kurve gefunden ist. Zur Erläuterung des Folgenden diene Fig. 44. Es sei aber ausdrücklich bemerkt, daß gerade dies Beispiel gewählt wurde, weil es einfach, übersichtlich und leicht nachzu-

1) Spiegellineal von Reusch.

zeichnen ist. Dagegen soll die Herkunft und Bedeutung der Zahlen außer Betracht bleiben.

Nachdem die bekannten Punkte jeder Kurve eingezeichnet sind (in der Figur weggelassen), verbindet man sie nach dem Augenmaß möglichst gut durch stetige Kurven. Sind nämlich die Werte durch Versuche oder unabhängige Einzelbe-

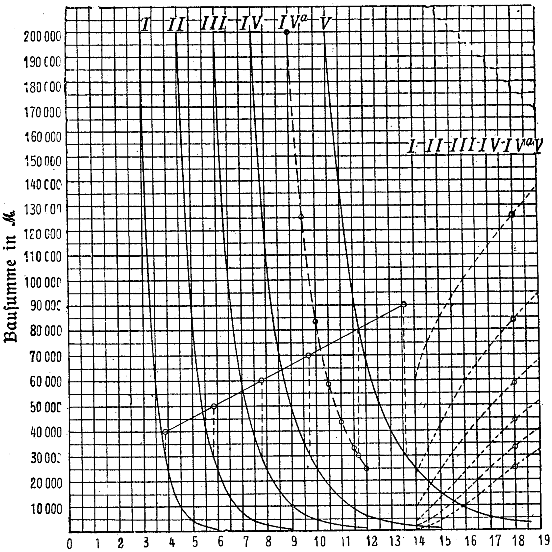


Fig. 44. Gebühren in Hundertsteln der Bausumme.

rechnungen gewonnen, so werden sie natürlich nie genau auf glatt verlaufenden Kurven liegen. Jetzt möge man wissen, daß im Beispiel die Abstufungen zwischen den Kurven I und II, II und III, III und IV immer gleich, dagegen zwischen IV und V doppelt so groß wie bei jenen sind. Daher müssen die Abstände zwischen den Kurven stetig verlaufen.[1]) Das benutzt man, um graphisch eine Kurvenausgleichung durchzuführen. Man legt eine Reihe von horizontalen Schnitten; in der Figur ist ein solcher in der Höhe 30000 eingezeichnet. In jedem Schnittpunkt mit den Kurven errichtet man das Lot und trägt auf jedem in beliebiger Längeneinheit Strecken ab, die der Abstufung entsprechen. Also hier in I 1 cm,

1) Um noch deutlicher zu zeigen, was unter gleichmäßiger Abstufung zu verstehen ist, sei noch ein anderes Beispiel gewählt. Um die Abnahme des Luftgewichts über dem Erdboden zu bestimmen, werde dasselbe im Laufe eines Tages von Stunde zu Stunde gemessen, und zwar an mehreren Punkten, die je 10 m Höhenunterschied besitzen. Zeichnet man für jeden Beobachtungsort die Luftgewichtskurve abhängig von der Zeit auf, so erhält man eine Kurvenschar, bei der ebenfalls die Abstufung von Kurve zu Kurve gleich groß ist. Man überlege, wie das Folgende abzuändern wäre, wenn die Beobachtungsorte beliebige, aber natürlich bekannte Abstände hätten.

in II 2 cm, in III 3 cm, in IV 4 cm, aber in V 6 cm. Die durch Nullkreise angedeuteten Endpunkte verbindet man durch eine stetige Kurve, die im Beispiel besonders einfach eine gerade Linie ist. Natürlich werden die Endpunkte zunächst nicht genau auf einer stetigen Kurve liegen. Man benutzt vielmehr gerade umgekehrt die jetzige Kurve, um die Kurvenschar zu verbessern, in dem man die neu gefundenen Schnittpunkte herunterlotet. Verbessert man die Kurvenschar durch eine Reihe solcher Schnitte, so wird dadurch die Gesetzmäßigkeit von Kurve zu Kurve gesichert.

Anmerkung 1. In anderen Beispielen wird man besser statt der horizontalen vertikale Schnitte oder auch schräge in irgendeiner passenden Richtung legen.

Anmerkung 2. In der Figur folgt aus der Geradlinigkeit der Hilfskurven natürlich, daß die horizontalen Abschnitte von Kurve zu Kurve einander gleich sind. Trotzdem soll wie im allgemeinsten Fall weitergearbeitet werden. Als Übungsaufgabe empfiehlt sich das Beispiel gerade deshalb, weil jene Gleichheit der Abstände gestattet, die Genauigkeit der Zeichnung nachzuprüfen.

Die Hilfskurven können weiter als Interpolationskurven verwendet werden. Man soll zwischen IV und V eine neue Kurve IVa diesmal in gleicher Abstufung wie alle übrigen einschalten. Dieser Kurve IVa entspricht daher der Schnittpunkt der Interpolationskurve im Abstand 5 cm, d. h. also in der Höhe 80000. Diesen Punkt lotet man auf die Schnittgerade in Höhe 30 000 herunter und findet damit einen Punkt der Kurve IVa. Statt so in mehreren Schnitthöhen fortzufahren, sei noch eine andere Methode angegeben.

In der Nebenfigur rechts ist jede Kurve der Schar in gewisser Weise auf je einer Vertikalen dargestellt. Diese Geraden sind in Abständen von je 1 cm, bzw. zwischen IV und V von 2 cm angenommen, den Abstufungen entsprechend. Nun lotet man Kurvenpunkte, die nach irgendeinem Gesetz ausgewählt sind, auf die Vertikalen herüber; hier sind die Schnittpunkte mit den von 5 cm zu 5 cm eingezeichneten lotrechten Geraden genommen. Zusammengehörige Punkte verbindet man durch stetige Hilfskurven, indem man mit den Schnitten in Höhe 200 000 beginnend diejenigen einander zuordnet, die von dort je 5 cm, je 10 cm usw. entfernt schneiden.

Jetzt legt man in die Mitte zwischen IV und V die neue Vertikale IVa, deren Schnittpunkt mit den Interpolationskurven durch Nullkreise bezeichnet sind. Die neue Kurve IVa findet man durch Herüberloten dieser Punkte auf die entsprechenden lotrechten Geraden im Abstande von 5 cm zu 5 cm. Dazu muß allerdings irgendein Anfangspunkt bekannt sein, hier der Mittelpunkt zwischen IV und V in der Höhe 200000. Wäre solch ein Anfangspunkt nicht gegeben, so könnte man den nach dem ersten Verfahren in der Höhe 30000 gefundenen Punkt zum Ausgangspunkt nehmen, indem man von rechts seine beiden benachbarten Punkte zuerst herüberlotet und daran anschließend von 5 cm zu 5 cm fortschreitet. Erwähnt sei noch, daß man die neuen Interpolationskurven ebensogut wie die früheren zur Verbesserung der ursprünglichen Kurven benutzen kann.

Man kann wohl sagen, daß es im allgemeinen zuverlässiger gelingt, eine Schar gesetzmäßig verbundener Kurven graphisch darzustellen, als durch empirisch gefundene Punkte, die immer mehr oder minder zerstreut liegen, eine einzelne Kurve zu legen.

8. Die Nomographie. In neuester Zeit haben sich graphische Methoden ein neues wichtiges Gebiet erobert. Namentlich von dem französischen Mathematiker M. d'Ocagne[1]) ausgehend, verbreitet sich immer mehr ein neuer Zweig angewandter mathematischer Wissenschaft: die Nomographie, die sich damit beschäftigt, möglichst einfache und leicht verwendbare graphische Rechentafeln herzustellen, die den Namen Nomogramme erhalten haben.

Die Sache wird sogleich an folgendem Beispiele verständlich werden. Man soll die Gleichung $x^2 - 8x + 10 = 0$ lösen, d. h. Zahlen suchen, die, in die linke Seite eingesetzt, den Ausdruck zu Null machen. Man könnte versuchen, durch Ausprobieren zum Ziel zu kommen, indem man zunächst beliebige Werte für x einsetzt und für diese den Ausdruck der linken Seite berechnet. Man betrachtet also $x^2 - 8x + 10$ als eine Funktion von x, die etwa zur Abkürzung mit y bezeichnet werde. Es kommt dann alles darauf an, denjenigen Wert der Variablen x zu finden, für den y Null wird. In der Tabelle sind einige zusammengehörige Werte berechnet, und in Fig. 45 ist in bekannter Weise das Diagramm der Funktion gezeichnet. Die Kurve schneidet die x-Achse in zwei Punkten $x_1 = 1{,}6$ und $x_2 = 6{,}4$. In diesen Punkten ist ja aber $y = 0$; also sind damit

x	*y*
0	+ 10
1	+ 3
2	− 2
3	− 5
4	− 6
5	− 5
6	− 2
7	+ 3
8	+ 10
usw.	

1) M. d'Ocagne, Calcul graphique et nomographie, Paris 1908; siehe auch Luckey, Einführung in die Nomographie I. Teil. Die Funktionsleiter. II Teil. Die Zeichnung als Rechenmaschine (Mathematische Bibliothek).

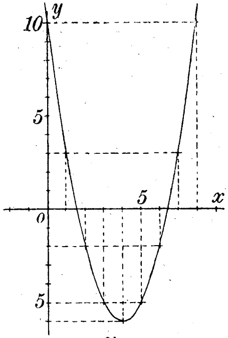


Fig. 45.

zugleich zwei Lösungen der Gleichung gefunden. Da jede Gleichung zweiten Grades auch nur zwei Lösungen besitzen kann, so ist die Aufgabe vollständig erledigt. Offenbar kann jede beliebige Gleichung ebenso behandelt werden. Aber man beachte wohl, daß für jede einzelne Gleichung eine neue Tabelle berechnet und ein neues Diagramm gezeichnet werden muß.

Nun könnte man aber fragen, ob es nicht möglich ist, eine graphische Tabelle zu zeichnen, aus der man die Lösungen aller quadratischen Gleichungen ohne jedesmal neue Rechnung fertig ablesen kann. Solch eine Tabelle nennt man eben ein Nomogramm. In der Tat kann man sehr leicht diese Aufgabe erfüllen. Die Gleichung heißt also in ganz allgemeiner Form

$$x^2 + ax + b = 0,$$

worin für a und b jede beliebige positive und negative Zahl gesetzt werden kann. Da a und b variable Größen sind, so benutzt man ein Achsenkreuz mit den a-Werten auf der horizontalen und den b-Werten auf der vertikalen Achse. Und man zeichnet darin einfach die Kurven, die sich ergeben, wenn man der Reihe nach für x die Werte 1, 2, 3 ..., $-1, -2, -3$ ... einsetzt; also die Kurven $1 + a + b = 0$, $4 + 2a + b = 0$, $9 + 3a + b = 0$ usw. Das sind aber gerade Linien, weil immer a und b nur in der ersten Potenz vorkommen. So ergibt sich Fig. 46. Jede Gerade erhält als Kote, wie man sagt, den Wert von x, zu dem sie gehört, angeschrieben. Hätte man jetzt z. B. ein Wertepaar a und b dessen zugehöriger Punkt auf die Gerade mit der Kote 3 fällt, so würde das doch heißen: $x = 3$ ist eine Lösung dieser quadratischen Gleichung. Oder um sogleich ein Beispiel zu nehmen: in der Gleichung $x^2 - 1{,}1\,x - 3 = 0$ ist $a = -1{,}1$ und $b = -3$. Der Punkt P $(-1{,}1; -3)$ liegt zwischen den Geraden $+2$ und $+3$ einerseits und -1 und -2 anderseits.

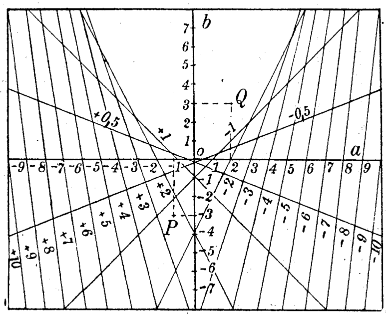


Fig 46.

Durch Abschätzen findet man $x_1 = +2,4, x_2 = -1,3.$[1]) Nach anderen weniger einfachen Verfahren lassen sich freilich wesentlich bessere Nomogramme konstruieren. Man kann statt der zueinander senkrechten zwei zueinander parallele Achsen für a und b wählen. In Fig. 47 links a, rechts b. Dann gelingt es so umzurechnen, daß man statt der vielen Geraden mit ihren Koten Punkte auf einer Kurve erhält. Allerdings findet man dann umgekehrt die Lösungen statt in einem Punkte auf einer Geraden. Doch ein Beispiel wird besser die Benutzung des Nomogramms erklären. In der Figur ist die Lösung der Gleichung $x^2 \quad 3,5x + 1,5 = 0$ angedeutet. Auf der Geraden links sucht man den Punkt $a = -3,5$ und rechts den Punkt

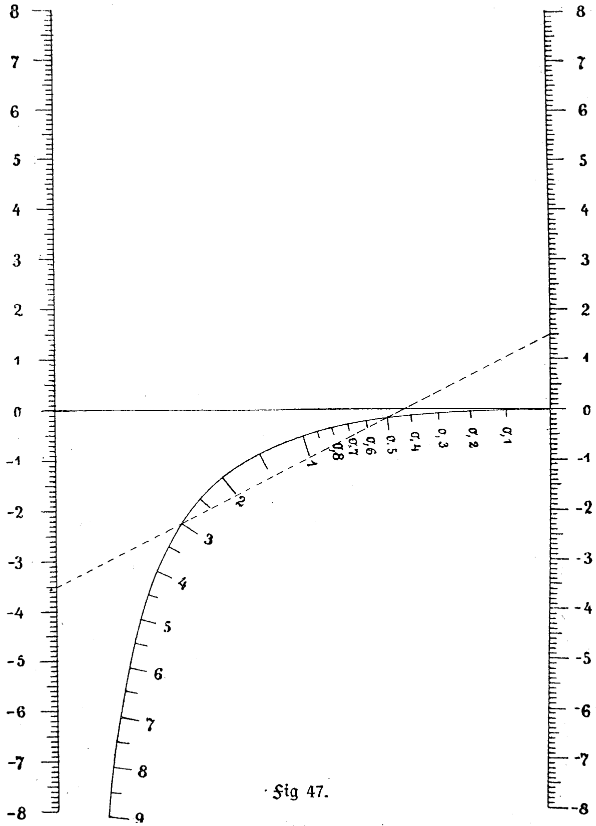


Fig 47.

1) Nicht berücksichtigt sind die imaginären Lösungen, für welche ein anderes Nomogramm gezeichnet werden müßte. So können z. B. im Punkte Q, welcher zur Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ gehört, keine Lösungen abgelesen werden.

$b = 1{,}5$. Beide verbindet man durch die gestrichelt gezeichnete Gerade, welche die Kurve in den gesuchten Punkten $x_1 = 3$, $x_2 = 0{,}5$ schneidet.[1])

Die Konstruktion brauchbarer Nomogramme ist zuweilen nicht einfach. Darauf kommt es gar nicht an; entscheidend ist allein die bequeme Verwendbarkeit. Die Berechnung und Konstruktion wird man im allgemeinen dem Mathematiker überlassen, wenn man nur weiß, wie die Tafel zu benutzen ist. In der Tat sind Nomogramme heute in den verschiedensten Formen vielfach mit mechanischer Einstellvorrichtung weit verbreitet.

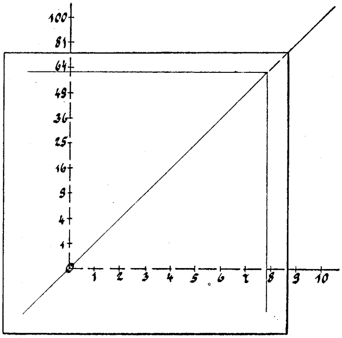


Fig. 48.

Eine kurze Besprechung sei noch einem der wichtigsten Hilfsmittel der Nomographie, der **Funktionsskala**, gewidmet. In Fig. 48 ist eine Tabelle der Wurzeln aller Zahlen oder auch, was ja auf dasselbe herauskommt, der Quadrate aller Zahlen gezeichnet. Dabei sind auf der horizontalen Achse gleiche Strecken abgetragen und mit 1, 2, 3, ... bezeichnet. Auf der vertikalen Achse sind zwar auch gleiche Strecken abgetragen, aber sogleich mit den Quadraten der abgetragenen Strecken bezeichnet, also mit $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ oder 1, 4, 9, ... Damit liegen die Punkte zusammengehöriger Werte der Kurve $y = x^2$ nicht wie sonst auf einer Parabel, sondern einfacher auf einer unter 45^0 geneigten geraden Linie. Zum Ablesen könnte man Lote errichten, oder man benutzt besser, wie es in der Figur angedeutet ist, eine Zelluloidplatte, auf welcher zwei senkrechte Geraden und eine durch den Schnittpunkt gehende unter 45^0 geneigte Gerade eingeritzt sind. Die von der Platte verdeckten Teile der Tabelle sind, um dies anzudeuten, gestrichelt gezeichnet. Die Platten legt man so aufeinander, daß die geneigten Geraden der Platte und der Tabelle zusammenfallen, während die senkrechten Geraden durch die gesuchten Teilpunkte gehen. In der Figur liest man ab $\sqrt{61} = 7{,}8$ oder auch $7{,}8^2 = 61$.

1) Für die negativen Werte könnte man eine zweite Kurve zeichnen (tatsächlich sind es die beiden Zweige einer Hyperbel). Man kann sich aber auch so helfen, daß man für x den Wert $-x$ setzt, also $x^2 - ax + b = 0$ löst und damit für $-x$ positive Werte, somit für x selbst die negativen Werte findet.

Wichtig am Beispiel ist der Gedanke, der auf der vertikalen Achse verwirklicht ist, wo die Zahlen nicht die abgetragenen Längen bedeuten; vielmehr steht z. B. statt 8 die Zahl 64, deren Wurzel also 8 ist. Mit anderen Worten: es sind Funktionswerte abgetragen, aber die Werte der Variabeln angeschrieben. Hier ist $8 = \sqrt{64}$ oder allgemein $y = \sqrt{b}$; y ist abgetragen, aber b ist angeschrieben. (Aus der Kurvengleichung $b = x^2$ wird daher $y = \pm x$, d. h. die Gleichung von Geraden.) Solch eine Teilung heißt eine Funktionsskala.

Der Nutzen ist der, daß man einfachere Kurven als Bilder der Funktionen erhält — im Beispiel eine gerade Linie statt einer Parabel. Der Nachteil besteht in der wesentlich schwierigeren Ablesung der Zwischenwerte, die ja nicht proportional eingeschaltet werden dürfen. Besonders häufig wird die logarithmische Teilung, die auch der Rechenschieber trägt, verwendet. Eines der bekanntesten Beispiele einer Funktionsskala hat die alte Merkatorkarte. Der Seemann fährt am besten (wenn auch nicht am schnellsten) von einem Ort zum anderen, wenn er immer denselben Kurs beibehalten kann, d. h. immer in derselben Neigung zu den Längengraden. Solch eine Kurve, die er dann zurücklegt, heißt eine Loxodrome. Auf einer gewöhnlichen Karte wäre das eine krumme Linie. Wenn man aber die Breitenkreise nicht in gleichen Abständen zeichnet, sondern die Abstände nach einer bestimmten logarithmischen Teilung wachsend, so kann man erreichen, daß die Loxodromen gerade Linien werden. Und das ist es, was der Seemann gebrauchen kann. (Allerdings werden dann die Bilder der Länder stark verzerrt.) Will er auf der Karte seinen Kurs vom einen Hafen zum anderen ablesen, so hat er sie einfach durch eine gerade Linie zu verbinden.

Auf Nomogrammen wird man sehr häufig Funktionsskalen finden. Das erschwert bei einiger Übung die Ablesungen nur wenig. Jedenfalls ist die weiteste Verbreitung solcher Tafeln, die für die verschiedensten Zwecke des täglichen Lebens recht brauchbar sind, sehr zu empfehlen. Der Kaufmann, der Baumeister, der Ingenieur und viele andere sollten sich für ihre besonderen Zwecke zahlreiche Nomogramme zeichnen lassen.

9. Ähnlichkeit, ähnliche Vergrößerung und Verkleinerung. Sollen natürliche Gegenstände in irgendeiner Form nachgebildet werden, so ist man selten in der Lage, die wahre Größe beizubehalten. Man wird meist vergrößern oder verkleinern müssen. Natürlich, wird man sagen, muß die Größenänderung so vorgenommen werden, daß Gegenstand und Abbild sich „ähnlich“ bleiben. Was ist nun eigentlich unter Ähnlichkeit zu verstehen?

So soll z. B. von einem Denkmal eine verkleinerte Nachbildung hergestellt werden. Dann muß eben alles, wird man fordern, im selben Verhältnis verkleinert werden, etwa im Maßstab 1 : 10. Ist das Denkmal 8 m hoch, so muß folglich die Nachbildung 80 cm hoch werden usw. Wie aber weiter? Braucht man auch den zehnten Teil an Bronze? Oder wenn ein Teil am Denkmal vergoldet ist, wird man jetzt auch den zehnten Teil vom Gold nehmen müssen? Mit anderen Worten: werden auch Inhalt und Oberfläche im Verhältnis 1 : 10 verkleinert? Das ist nun keineswegs der Fall.

Eines ist sicher: alle Längenmaße sollen im Verhältnis 1 : 10 verkleinert sein. Wenn aber z. B. bei einem Rechteck, dessen Inhalt Länge $\times$ Breite ist, Länge und Breite im Verhältnis 1 : 10 verkleinert werden, dann wird ja der neue Inhalt $\frac{1}{10}$ Länge $\times$ $\frac{1}{10}$ Breite, also $\frac{1}{100}$ vom alten Inhalt. Und das gilt von jeder Fläche überhaupt. (Wie später gezeigt wird, kann man sich schließlich jede Fläche beliebig genau aus lauter kleinen Rechtecken oder Quadraten zusammengesetzt denken.) Bei einem Körper kommt noch als drittes Maß die Höhe hinzu, die auch noch um $\frac{1}{10}$ verkleinert wird. Der Körperinhalt nimmt also sogar um $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$ ab. Das Ergebnis für das Beispiel und zugleich in allgemeiner Form ausgesprochen ist also: bei einer Verkleinerung im Maßstab 1 : 10 bzw. 1 : n

ist die Längenänderung 1 : 10 oder 1 : n,
die Flächenänderung 1 : 100 oder 1 : n^2,
die Körperänderung 1 : 1000 oder 1 : n^3.

Also braucht man bei der Nachbildung des Denkmals, wenn man nur $\frac{1}{10}$ Höhe, Breite usw. nimmt, für die Vergoldung (die ebenso stark wie beim Denkmal selbst sein soll) 1 : 100 an Gold und an Bronze gar nur 1 : 1000 von der für das Denkmal selbst verwendeten Menge.

Es ist bekannt, daß Inhalte größerer Gefäße meist zu klein geschätzt werden. An ein bekanntes Maß im Gedächtnis anknüpfend, schätzt man ab, wieviel größer die Längenmaße geworden sind, und vergißt leicht ganz, daß das Körpermaß in viel größerem Verhältnis gewachsen ist. Sei z. B. ein Litermaß gegeben. Welchen Inhalt faßt ein Gefäß, das doppelt so hoch und doppelt so breit ist? Nun 8 l, nämlich 2^3 mal so viel. In Fig. 49 erkennt man wohl, daß in einen Würfel mit doppelt so großer Kantenlänge 8 von der einfachen Länge hineingehen. Ebenso wird eine Kegelkugel achtmal so schwer, wenn man den Durchmesser verdoppelt.

Nimmt man dagegen ein doppelt so breites, aber nur ebenso hohes Gefäß wie jenes Litermaß, so ist nur die Bodenfläche ähnlich vergrößert; also faßt das neue Gefäß 4 l, nämlich 2^2 mal mehr als zuvor.

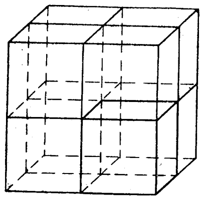


Fig. 49.

Das Wesentliche der Ähnlichkeit besteht also darin, daß alle Längen in demselben Verhältnis geändert werden, während die Lage der Stücke zueinander, d. h. alle Winkel dieselben bleiben. Am einfachsten und wichtigsten ist die ähnliche Verwandlung in der Ebene. In Fig. 50 sei das beliebige Vieleck ABCDE gegeben. Es soll im Verhältnis 3 : 1 vergrößert werden. Man zieht von einem beliebigen Punkte Z aus, dem Ähnlichkeitszentrum, Strahlen durch A, B, C, D und E. Dann trägt man von Z aus die Strecke ZA dreimal ab bis A_1. Durch A_1 zieht man die Parallelen zu AB und AE bis an die verlängerten Strahlen ZB und ZE. Durch die neuen Punkte B_1 und E_1 zieht man die Parallelen zu BC und ED usw., bis man das neue Vieleck $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ erhält. Die Vielecke sind ähnlich, wofür man schreibt $ABCDE \sim A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$. Wie nämlich aus der Geometrie bekannt ist, folgt aus der Konstruktion $ZB_1 = 3 \cdot ZB$, $ZE_1 = 3 \cdot ZE$ usw. aber auch $A_1 B_1 = 3 \cdot AB$, $B_1 C_1 = 3 \cdot BC$ usw. Die Winkel bleiben gleich, weil ja sämtliche Seiten einander parallel laufen.

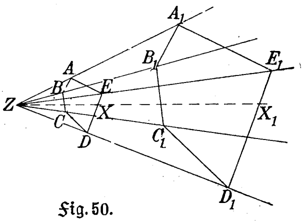


Fig. 50.

Es gilt aber auch für jeden beliebigen Zwischenstrahl ZX, daß $ZX_1 = 3 \cdot ZX$ ist. Deshalb kann man in genau derselben Weise jede krummlinig begrenzte Figur vergrößern, indem man beliebig viele solcher Strahlen $ZX_1 = 3 \cdot ZX$ zeichnet und alle Endpunkte durch eine Kurve verbindet. Je mehr Punkte der neuen Kurve konstruiert werden, um so genauer wird die Ähnlichkeit wirklich erreicht werden.

Besser ist es in diesem Falle, wenn man das bekannte Instrument den Storchschnabel oder Pantographen verwendet, der schon im Jahre 1631 von dem Jesuitenpater Scheiner konstruiert worden ist. Man denke sich — Fig. 51 — ein Parallelogramm, dessen vier Ecken durch Scharniere drehbar verbunden sind. AB ist ein fünfter Stab, der auf den Seiten PC und DF verschoben werden kann. In Z befindet sich auf AB verschiebbar ein Zeichenstift, der so eingestellt werden

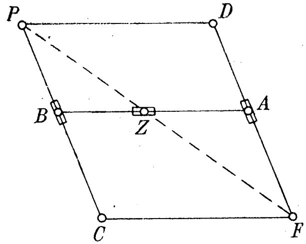


Fig. 51.

muß, daß er auf der Geraden PF liegt. Mag man nun das Parallelogramm verschieben und drehen, wie man will, immer bleibt dann Z auf der Geraden PF, und zwar so, daß auch das Verhältnis PZ : PF unverändert bleibt, denn es ist offenbar gleich PB : PC. Macht man deshalb P zum Ähnlichkeitszentrum und umfährt mit F eine Figur, die verkleinert werden soll, so zeichnet Z diese Verkleinerung im Verhältnis PZ : PF = PB : PC auf. In Fig. 52 ist der fertige Apparat abgebildet. Die Anordnung ist dieselbe wie in Fig. 51, nur ist die überflüssige Seite CF fortgefallen. Auf PB, AF und AB sind Teilungen angebracht, die so eingerichtet sind, daß man einerseits das Verkleinerungsverhältnis abliest, und daß anderseits Z stets auf PF liegt, wenn A, B und Z auf gleiche Zahlen eingestellt sind. Vergrößerungen führt man aus, indem man die gegebene Figur mit Z umfährt und mit F zeichnet.[1])

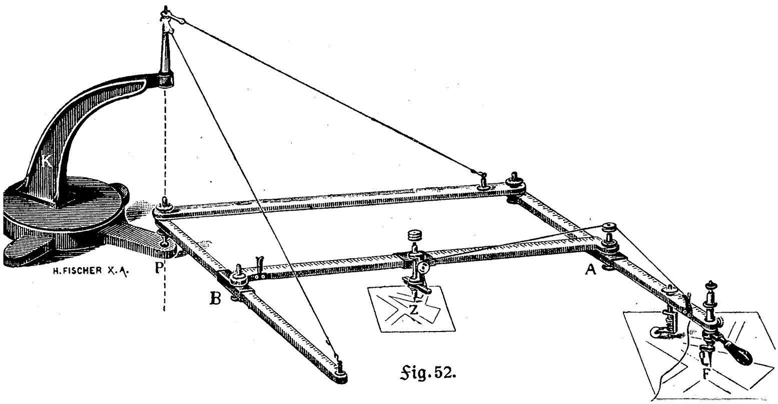


Fig. 52.

1) Im Handel erhältlich sind noch einfachere Ausführungen desselben Apparates, die aber immer nach demselben Grundgedanken konstruiert sind. Erwähnt sei, daß es auch Apparate zum Vergrößern und Verkleinern körperlicher Gegenstände gibt, die z. B. der Bildhauer benutzt.

Im praktischen Leben werden ähnliche Verwandlungen sehr häufig angewendet. Viele Apparate beruhen darauf. Hier mag noch auf eine Art des Schätzens von Entfernungen hingewiesen werden, die bei einiger Übung ziemlich zuverlässige Ergebnisse liefert. Man strecke den Arm aus und halte die Hand den Daumen nach oben gestreckt so, daß der Daumen mitten zwischen beiden Augen sich befindet. In Fig. 53 seien von oben gesehen A_1 und A_2 die beiden Augen und D der Daumen. Jetzt visiert man einmal mit A_1, dann mit A_2 über den Daumen hinweg nach zwei gleichweit entfernten Punkten P und Q, deren Abstand bekannt oder doch mit einiger Zuverlässigkeit abgeschätzt werden kann. Nun weiß man aber, daß $d = 10 \cdot a$ ist, folglich ist auch $x = 10 \cdot PQ$. Also kann man aus der Länge PQ sogleich den Abstand von PQ ermitteln.[1])

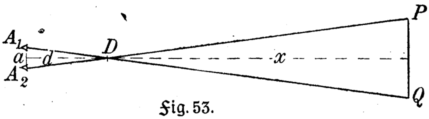


Fig. 53.

Zum Schluß noch einiges über die Verkleinerungen geographischer Karten. Am bekanntesten sind wohl die sogenannten Meßtischblätter (Original-Meßtischaufnahmen des Generalstabes) im Maßstab 1 : 25 000 und die Generalstabskarte des Deutschen Reiches im Maßstab 1 : 100 000. Die erste Frage wird immer sein: Welche Erdentfernung ist gleich 1 cm oder 1 mm Kartenentfernung und umgekehrt, welche Kartenentfernung stellt 1 km Erdentfernung dar?

a) Maßstab 1 : 25 000.

1 cm	der Karte wird	$25\,000 \cdot 1\text{ cm} = 250\text{ m}$	auf der Erde,	
1 mm	„ „ „	$25\,000 \cdot 1\text{ mm} = 25\text{ m}$	„ „ „	
1 km	auf der Erde wird	$100\,000\text{ cm} : 25\,000 = 4\text{ cm}$	„ „ Karte.	

1) Es kommt wesentlich darauf an, den Daumen richtig zu halten, damit wirklich $d = 10a$ wird. Um das zu erreichen, wird man die richtige Stellung des Daumens vorher bei gut ausgemessenen Entfernungen durch mehrfache Versuche ermitteln müssen. Nahe Entfernungen, oder wenn rückwärtige Entfernungen bekannt sind, schätzt man in sehr einfacher Weise so. Man visiert mit einem Auge den Punkt an, dessen Entfernung gesucht wird, entweder wieder über den ausgestreckten Daumen hinweg oder auch, indem man den Kopf neigt, am Hutrand entlang. Jetzt dreht man sich, ohne die Haltung zu ändern, nach der Seite um, wohin die Entfernungen bekannt sind oder abgeschritten werden können (120 Schritte = 100 m). Die Entfernung des jetzt anvisierten Punktes ist offenbar genau gleich der gesuchten Entfernung.

b) Maßstab 1 : 100000.

1 cm der Karte wird	$100000 \cdot 1\ \text{cm} = 1\ \text{km}$	auf der Erde,
1 mm " " "	$100000 \cdot 1\ \text{mm} = 100\ \text{m}$	" " "
1 km auf der Erde "	$100000\ \text{cm} : 100000 = 1\ \text{cm}$	" " Karte.

In derselben Weise rechnet man jeden anderen Maßstab um.

Man zeichnet in der Regel auf die Karten Maßstäbe auf, die diesen Verhältnissen entsprechen. Es sind im früheren Sinne Funktionsskalen einfachster Art, indem man z. B. im Falle a) 4 cm abträgt, aber 1 km oder 1000 m anschreibt, wie in Fig. 54 angedeutet. Solche Maßstäbe für alle möglichen Verkleinerungsverhältnisse sind übrigens im Handel käuflich. Genauere Ablesungen erhält man mit einem Maßstab, wie ihn Fig. 55 zeigt. Man betrachte darin das Dreieck ABC. Die Höhe AB ist in zehn gleiche Abschnitte geteilt. Da BC = 100 m ist, so ist jeder der parallelen Teilstriche um $\frac{1}{10} \cdot 100 = 10$ m kürzer als der vorhergehende. Die Maße von unten nach oben sind daher 100 m, 90 m, 80 m usw., 10 m. Sollen z. B. 730 m abgemessen werden, so geht man auf der 700-Linie nach oben bis zum dritten Teilstrich. Also ist XY = 730 m.

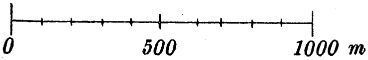


Fig. 54.

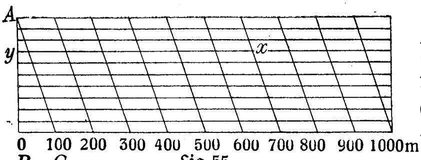


Fig. 55.

II. Abschnitt.

Projektionslehre.

1. Einleitung. Im Bilde festzuhalten, was das Auge sieht, hat der Mensch sich seit den ältesten Zeiten bemüht. Aber es ist ein weiter Weg von den Höhlenzeichnungen unserer wilden Vorfahren bis zu den Zeichnungen, Gemälden, Radierungen usw. heutiger Künstler oder bis zu den Photographien unserer Tage.

Die Erforschung der mathematischen Zeichengesetze hat wesentliche Fortschritte bei dieser Entwicklung gebracht. Kein Geringerer als der größte deutsche Maler des Mittelalters Albrecht Dürer hat eins der besten alten Bücher darüber geschrieben.[1])

1) A. Dürer, Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt in Linien, Ebnen und gantzen Corporen. Nürnberg 1525.

Die mathematischen Regeln, die bei der Abbildung natürlicher Gegenstände auf die Leinwand des Malers oder den Papierbogen des Zeichners zu beachten sind, gehören zur Lehre von den Projektionen. Von dieser soll hier die Rede sein.

Eine Abbildung auf ein ebenes Blatt kann niemals einen körperlichen Gegenstand völlig ersetzen. Es ist vielmehr notwendig, seine Anforderungen einzuschränken. In erster Linie hat man unter zwei Gesichtspunkten zu wählen. Man kann verlangen:

a) daß das Bild auf unser Auge möglichst denselben Eindruck hervorruft wie beim natürlichen Sehen der Gegenstand selbst;

b) daß das Bild in mathematischer Gestalt und in den Maßen so beschaffen ist, daß daraus Gestalt und Maße des Gegenstandes mathematisch genau und möglichst einfach entnommen werden können. Oder daß umgekehrt das Bild nach den bekannten Maßen möglichst einfach gezeichnet werden kann.

Die erste Aufgabe löst in vollkommenster Weise, soweit überhaupt möglich, der Maler. Aber er muß nicht nur zu der mathematischen Gestalt des dargestellten Gegenstandes Farbe, Schatten usw. hinzufügen, sondern ihn zwingt auch die Rücksichtnahme auf die besondere Art, wie unser menschliches Auge die Gegenstände ansieht, manches Mal bewußt von den mathematisch richtigen Zeichenregeln abzuweichen.[1])

Eine gute Photographie erfüllt die erste Forderung in ihrer Art recht gut. Sie löst aber auch die zweite Aufgabe, wenn auch nicht in einfachster Weise. Bei der Besprechung der Photogrammetrie wird darauf zurückzukommen sein.

Die zweite Aufgabe selbst ist rein mathematischer Art. Sie wird im folgenden behandelt. Die gebräuchlichsten Lösungen: schiefe Parallelprojektion, kotierte Projektion, Grund- und Aufrißverfahren und Zentralprojektion sollen der Reihe nach besprochen werden.

Dem Ziele dieses Buches entsprechend soll also im wesentlichen nur gelehrt werden, wie die Raumgebilde abzubilden sind. Die sogenannte darstellende Geometrie zeigt weitergehend außerdem die zeichnerische Lösung von Aufgaben auf Grund jener Abbildungen. Über diesen

---

1) Weiteres darüber S. 57. Ausführlicher z. B. in dem oben genannten Bändchen von Doehlemann und bei G. Hauck, Lehrbuch der malerischen Perspektive mit Einschluß der Schattenkonstruktionen. Bearbeitet von H. Hauck. Berlin 1910.

Gegenstand gibt es eine sehr große Zahl ausgezeichneter Lehrbücher. Hier mögen wenigstens ein paar genannt werden. Kürzere Darstellungen geben:

Schudeisky, Projektionslehre (ANuG Bd. 564).
Fischer, Darstellende Geometrie (ANuG Bd. 541).
K. Doehlemann, Grundzüge der Perspektive und Anwendungen (ANuG Bd. 510). Leipzig 1916.

Von den größeren Werken zeichnet sich durch Besprechung zahlreicher praktischer Anwendungen aus das vortreffliche Werk:

Emil Müller, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. 2 Bde. Leipzig 1908 bis 1916.

Endlich mag noch auf eins der bekanntesten Werke hingewiesen werden:

Rohn und Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 3 Bde. Leipzig 1906.

2. **Allgemeine Begriffe.** Zuerst ist zu erklären, was man unter projizieren zu verstehen hat.

Fig. 56 zeigt einen Kasten, der auf ein Zeichenbrett seinen Schatten wirft. So hat z. B. die Kante AB die Schattengrenze A′B′ ergeben. Diese Linie A′B′ heißt eine Projektion der Kante AB.

Die Projektion entsteht also dadurch, daß gerade Linien (hier Sonnenstrahlen), die in einer bestimmten Richtung verlaufen (hier von der Sonne kommen), durch Punkte eines Gegenstandes gehen und auf eine beliebig gewählte Zeichenebene auftreffen. Die Strahlen heißen Projektionsstrahlen oder Sehstrahlen, die Zeichenebene heißt die Bildebene und die Punkte auf der Bildebene heißen die Projektionen der Raumpunkte.

Die Sonnenstrahlen kommen aus so weiter Ferne, daß sie untereinander parallel auf den Kasten auftreffen. Mit künstlichem Licht könnte man durch Verwendung eines Parabelspiegels (s. S. 15) parallele Lichtstrahlen erzeugen. Anderseits kann man die Lichtstrahlen einer Bogenlampe durch die kleine Öffnung einer Blende hindurchtreten lassen, so daß sie von einem Punkte ausgehend den Körper treffen.

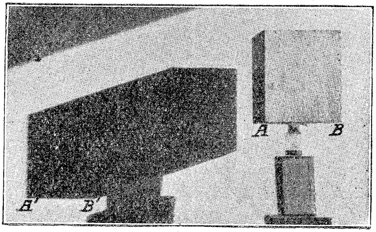


Fig. 56.

Danach unterscheidet man zwei Projektionsverfahren: die Parallelprojektion, bei der die Projektionsstrahlen untereinander parallel verlaufen, und die Zentralprojektion, bei der die Projektionsstrahlen von einem festen Punkte ausgehen.

Bei der Parallelprojektion unterscheidet man noch die schiefe und die senkrechte. Bei jener steht die Bildebene schräg zu den Projektionsstrahlen, wie in Fig. 56, bei dieser zu ihnen senkrecht.

Nun muß man sich aber von der Vorstellung des Lichtstrahls und des Schattens freimachen. Es kommt ja in der Projektionslehre im Gegensatz zur Forderung a) zunächst gar nicht darauf an, wie der Gegenstand „gesehen" wird (wenn man auch bestrebt sein wird, möglichst „anschaulich" zu bleiben und daraus Nutzen zu ziehen). Man versteht daher ganz allgemein unter der Projektion eines Punktes den Schnittpunkt des Projektionsstrahles durch diesen Punkt mit der Bildebene. Dabei kann der Punkt auf jenem Kasten irgendwo liegen, gleichgültig ob auf der Vorderseite oder Rückseite. Und die Projektionsstrahlen sind einfach gerade Linien, die durch den Kasten hindurch beliebig weit verlängert gedacht werden (also nicht wie Lichtstrahlen durch den Kasten absorbiert werden können).

Linien projiziert man, indem man alle ihre Punkte projiziert. Die Projektion einer geraden Linie ist wieder eine gerade Linie, sofern die gerade Linie nicht mit einem Projektionsstrahl zusammenfällt. In diesem Falle schrumpft ihr Bild zu einem Punkte zusammen.

Körper werden projiziert, indem man alle ihre Kanten und Ecken und insbesondere (z. B. bei der Kugel) ihre Umrißlinien projiziert.

Es war schon einmal darauf hingewiesen worden, daß man in keinem Falle darauf verzichtet, die Gegenstände möglichst anschaulich darzustellen, soweit es nur innerhalb der gewählten Darstellungsmethode möglich ist. Während man einerseits daher in der darstellenden Geometrie geradezu ein hervorragend geeignetes Mittel sieht, die Raumanschauung zu fördern, benutzt man anderseits jedes Mittel, das Bild des Gegenstandes möglichst gut dem auf das Auge hervorgerufenen Eindruck anzunähern.

So kann man zwar den Zielen und Zwecken der Abbildung entsprechend meist nicht darauf verzichten, auch die Kanten zu zeichnen, die man beim Anblicken des Gegenstandes nicht sehen würde. Aber man zeichnet sie dünner und in der Regel gestrichelt. (Konstruktionslinien sind noch wesentlich feiner so zu ziehen, daß ihnen gegenüber die Körperkanten, auch die „unsichtbaren", deutlich hervortreten.) Aber es muß noch klarer gesagt werden, was als unsichtbar gelten soll.

Man setzt fest: Jede Linie ist als „unsichtbar" zu betrachten, die von den Projektionsstrahlen erst erreicht wird, nachdem sie den Körper auf dem Wege zur Bildebene hin durchsetzt haben. Steht die Bildebene hinter dem Körper, so trennt die Umrißlinie — im ersten Beispiele also die Schattengrenze — die sichtbaren vorn liegenden von den unsichtbaren hinten liegenden Kanten.

Fragt man sich zum Schluß noch einmal, was man zur Herstellung einer Projektion nötig hat, so sind drei Dinge zu nennen.

1. Die Bildebene, also das Zeichenblatt.

2. Die Schar der Projektionsstrahlen; also entweder die Lage des Zentrums, von dem sie ausgehen, zur Bildebene, oder, wenn sie parallel sind, die Richtung, in der sie auf die Bildebene auftreffen.

3. Der Gegenstand mit allen seinen Ausmessungen; und außerdem genaue Angabe, in welchem Abstand und in welcher Stellung er sich zur Zeichenebene befindet.

3. Die schiefe Parallelprojektion. Dies Verfahren verbindet am meisten Einfachheit mit Anschaulichkeit und soll deshalb zuerst erklärt werden.

Unter sich parallele Projektionsstrahlen sollen schräg auf die Bildebene auftreffen. Das war ja aber in Fig. 56 der Fall. Der Schatten des Kastens ist also durch schiefe Parallelprojektion entstanden. Bei dieser heißt das Bild ein Schrägriß des Körpers. Einige wichtige Beziehungen zwischen dem Körper selbst und seinem Schrägriß lassen sich sofort erkennen.

Die Kanten a und die Kanten b, s. Fig. 57, verlaufen parallel zur Bildebene. Ihre Abbildungen a_1 und b_1 sind daher zu a und b parallel und außerdem gleich lang.[1]) Man schreibt dies $a \# a_1$ und $b \# b_1$ (d. h. b gleich und parallel b_1). Mathematisch folgt es einfach daraus, daß die Projektionsstrahlen durch die Endpunkte von a zusammen mit a und a_1 ein Parallelogramm bilden, in dem ja die Gegenseiten gleich lang sind.

1) Zum Vergleich stelle man sich selbst einen Kasten, wie in der Figur, auf und messe die Strecken nach. Durch die photographische Wiedergabe werden entferntere Strecken (also die Schattengrenzen) kürzer als in Wahrheit gleichlange, aber nähere Strecken (hier die Kanten des Kastens).

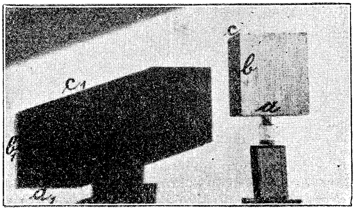


Fig. 57.

a steht auf b senkrecht; aber auch a_1 steht auf b_1 senkrecht (kurz geschrieben $a \perp b$ und $a_1 \perp b_1$), denn es ist ja $a_1 \parallel a$ und zugleich $b_1 \parallel b$. Also ist der Schrägriß eines rechten Winkels, dessen beide Schenkel zur Bildebene parallel sind, ebenfalls ein rechter Winkel.

Ein ganz anderes Verhalten zeigen die dritten Kanten c. Auch sie stehen im Raume auf a und b senkrecht. Dagegen liegt c_1 schräg zu a_1 und b_1. Auch die Länge c_1 ist eine andere als die der Raumkante c, wenn wir sie wirklich im Raume nachmessen würden. Nun mache man einmal einen Versuch. Man nehme ein Blatt Papier und einen Bleistift (oder besser eine Stricknadel oder dergl.) und halte den Bleistift stets senkrecht zum Blatt in den Sonnenschein. Und nun drehe man Bleistift und Blatt — den Bleistift immer senkrecht zum Blatt gelassen — im Sonnenschein herum. Man wird sehen, daß der Schatten des Bleistifts auf dem Papier die verschiedensten Richtungen und die verschiedensten Längen erhält. Der Schatten kann zu einem „Punkt“ zusammenschrumpfen und auch beliebig lang werden. Die Kante c war aber zur Bildebene senkrecht, gerade wie jener Bleistift. Deshalb wird ihr Schrägriß je nach der Lage der Projektionsstrahlen beliebige Richtung und beliebige Länge haben können.

Statt irgend etwas über die Lage der Projektionsstrahlen auszumachen, kann man jetzt auch unmittelbar festsetzen, in welcher Richtung c_1 auf der Bildebene verlaufen soll, und in welchem Maße c_1 gegen die wahre Länge c verlängert oder verkürzt werden soll. Gewöhnlich wählt man so aus:

Ist b die Lotrichtung im Raum und c eine senkrechte Strecke sowohl auf b wie auf der Bildebene, so soll $\sphericalangle (b_1, c_1) = 45^0$ oder $\sphericalangle (b_1, c_1) = 60^0$ und $c_1 : c = \frac{1}{2}$ oder $c_1 : c = \frac{1}{3}$ oder $c_1 = c$ sein. Das sind die gebräuchlichsten Verfahren, ohne daß andere Auswahlen damit etwa ausgeschlossen sind. Am einfachsten für die Messungen ist es, $c_1 = c$ zu machen. Man nennt die Abbildung in diesem Falle Kavalierperspektive oder Vogelperspektive.[1]) Ihr Nachteil ist, daß die Bilder dem Auge meist stark verzerrt erscheinen.

Fig. 58 zeigt die Darstellung eines Ziegelsteines für $\sphericalangle (b_1, c_1) = 45^0$ und $c_1 : c = 1 : 2$ oder $c_1 = c$.

Maßstab 1 : 2

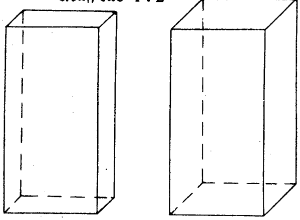


Fig. 58

1) Bei der Kavalierperspektive treffen

Eine Bemerkung sei hier sogleich eingeschaltet. Die natürlichen Gegenstände sind meist viel zu groß, als daß sie in ihren wirklichen Maßen gezeichnet werden könnten. Es ist folglich von vornherein eine Verkleinerung aller Maße vorzunehmen. Angegeben wird stets der „lineare“ Verkleinerungsmaßstab, d. h. das Verhältnis der Längenmaße des ursprünglichen Körpers zu den Längenmaßen des verkleinert gedachten Körpers. Man stellt sich die Sache stets so vor, als hätte man zuerst die Verkleinerung des Körpers vorgenommen und darauf diesen verkleinerten Gegenstand in seiner nunmehr wahren Größe gezeichnet. Auf dem Zeichenblatt ist anzugeben, in welchem Verhältnis die Längen verkürzt worden sind. In Fig. 58 steht z. B. „Maßstab 1 : 2“; das soll heißen, auf dem ursprünglichen Zeichenblatt war der Stein so gezeichnet, als hätten seine Kanten die Längen a = 12,5 cm, b = 6 cm, c = 3,25 cm besessen, während ein wirklicher Mauerstein doppelt so lange Kanten hat. Hier wie bei allen folgenden Figuren ist zu beachten, daß sich die Angaben auf die ursprüngliche Zeichnung, nicht aber auf deren verkleinerte Wiedergabe im Buch beziehen.

Man übersieht jetzt das ganze Verfahren. Man stellt solche Körper dar, bei denen drei zueinander senkrechte Kanten vorhanden sind oder doch leicht angegeben werden können. Das ist gerade bei Gebrauchsgegenständen des täglichen Lebens so häufig der Fall. Zwei der senkrechten Richtungen sollen zur Bildebene parallel verlaufen. Man stellt sie in „wahrer Größe“ dar (nachdem man also, wenn nötig, die Maße des Gegenstandes sämtlich nach bestimmtem Verhältnis verkleinert hat). Die dritte Kante stellt man so, daß sie zur Bildebene senkrecht verläuft. Aber man zeichnet sie unter einem Winkel von 45°

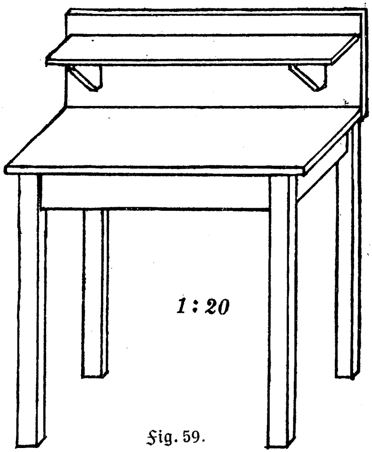


Fig. 59.

die Projektionsstrahlen den Gegenstand von vorn, bei der Vogelperspektive von oben; oder auch die Bildebene ist senkrecht oder horizontal gedacht. Beide Verfahren fanden hauptsächlich für militärische Zwecke Verwendung. „Kavaliere“ hießen die Aufbauten auf Festungsmauern; daraus ist der obige Namen abgeleitet worden.

oder 60° gegen die Vertikale, indem man sie gewöhnlich auf $^1/_2$ oder $^1/_3$ verkürzt oder selten auch in wahrer Länge abträgt. So ist in Fig. 59 ein Waschtisch dargestellt mit einem Winkel von 45° und einer Verkürzung $^1/_3$.

Häufig ist ein Kreis abzubilden, bei dem zwei zueinander senkrechte Durchmesser als senkrechte Richtungen zu wählen sind. Das Bild des Kreises wird eine Ellipse, in der die Bilder der zueinander senkrechten Kreisdurchmesser konjugierte Durchmesser sind. Man kann sie zeichnen, indem man eine Reihe paralleler Sehnen des Kreises zu Hilfe nimmt, wie Fig. 60 zeigt. So ist auch die Tischplatte des runden Tisches der Fig. 61, der hier als letztes Beispiel gewählt sein mag, gezeichnet worden.

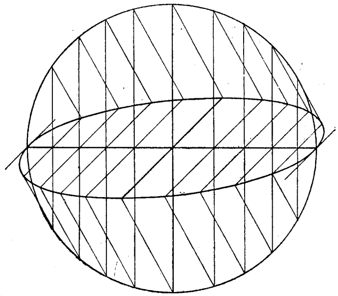


Fig. 60.

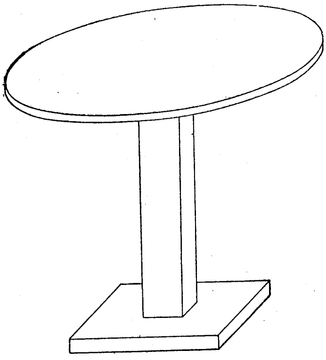


Fig. 61.

Anmerkung 1. Die schiefe Parallelprojektion ist oben so dargestellt worden, wie sie am häufigsten gebraucht wird. Sie gestattet natürlich vielfache Erweiterungen, so daß z. B. die Gegenstände ebensogut in Übereckstellung gezeichnet werden können usw.

Anmerkung 2. Schrägrisse wirken auf das Auge nur bis zu einem gewissen Grade natürlich. In der Tat müßte es sich ja so weit entfernt vom Gegenstand befinden, daß die Sehstrahlen parallel laufen — also eigentlich unendlich fern —, wenn der Gegenstand dem Auge so erscheinen sollte wie sein Schrägriß.

Anmerkung 3. Dem Schrägriß können Maße der Kanten, die in einer der drei senkrechten Richtungen verlaufen, unmittelbar entnommen werden. Nach dem Pythagoras lassen sich einzelne Längen noch einfach berechnen. In sehr vielen Fällen genügt das schon. Werden mehr Maße gebraucht, so geht man besser zu anderen Abbildungsverfahren über. Wie denn der Schrägriß meist nur verwendet wird, Gegenstände einfach, schnell und doch anschaulich darzustellen.

4. Die kotierte Projektion. Am natürlichsten wäre es jetzt, die Zentralprojektion anzuschließen, die sich von der obigen Parallelprojektion nur dadurch unterscheidet, daß die Projektionsstrahlen von einem Punkte ausgehen, statt parallel zu laufen. Die Konstruktionen sind indessen wesentlich schwieriger, so daß es praktischer ist, zugleich als notwendige Vorbereitung auf die Zentralprojektion andere wichtige Verfahren vorher zu behandeln. Dabei wird immer mehr auf Anschaulichkeit verzichtet und dafür auf bequeme Meßbarkeit um so größerer Wert gelegt. Die kotierte Projektion bildet in gewisser Beziehung einen Übergang, insofern sie im wesentlichen nur zur Darstellung von Teilen der Erdoberfläche angewendet wird, wo sie denn allerdings immer recht anschaulich bleibt. Es handelt sich also um die Aufgabe, ein Stück der Erdoberfläche abzubilden. Das wäre schwierig, wenn ein großes Stück genommen werden sollte: etwa auf einem Blatt eine Karte von Deutschland; denn man weiß ja, daß die Erde kugelförmig ist, also müßte eine krumme Fläche auf dem ebenen Zeichenblatt abgebildet werden. Hier soll eine wesentliche Vereinfachung vorgenommen werden, indem man nur so kleine Stücke betrachtet, daß man ohne Fehler die ganze Erdkrümmung weglassen kann. Z. B. in Fig. 62 ist aus der Umgegend eines Dorfes in flachem Gelände Acker und Wiesenland usw. dargestellt. Da ist zunächst wieder eine Verkleinerung des Maßstabes vorzunehmen. Die Karte ist im Maßstab 1 : 25000 gezeichnet, d. h. also 1 mm bedeutet immer 25 m. Im übrigen zeichnet man so, als wäre die Landschaft genau in einer Ebene ausgebreitet.

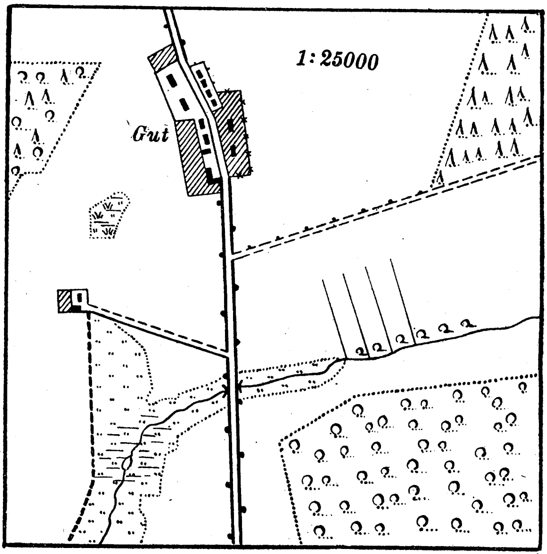


Fig. 62.

Interessanter wird eine Karte im bergigen Gelände sein. Die Bildebene denkt man stets in einer ganz bestimmten Höhe zum Meeresspiegel liegend. Für Preußen liegt der „Normalnullpunkt" (N. N. abgekürzt) 37 m unter dem sogenannten „Normal-Höhenpunkte", der bis vor kurzem durch eine Höhenmarke an einem Pfeiler der Berliner Sternwarte bezeichnet wurde, aber nach deren Verlegung nach Babelsberg noch nicht wieder an anderer Stelle erneuert worden ist. Auf diese Bildebene, die also in der Höhe 0 in der Regel unter der Landschaft liegen wird, projiziert man senkrecht herunter. Die entstehende Projektion heißt ein Grundriß. Soll im Grundriß angegeben werden, wie hoch ein Punkt über der Projektionsebene liegt, so schreibt man seine Höhe in Metern gemessen als Zahl an seine Projektion heran. Diese Zahl heißt die Kote des Punktes.

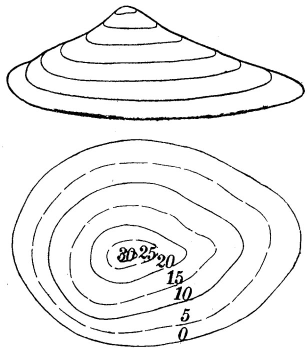
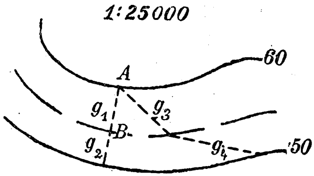


Fig. 63.

Käme es darauf an, geometrische Körper darzustellen, so wäre es leicht, an genügend Punkte die Höhenzahlen anzuschreiben, um hinterher Gestalt und Maße des Körpers genau zu erkennen. Anders in der wirklichen Natur. Um einen Berg darzustellen, denkt man ihn durch Ebenen parallel zur Bildebene geschnitten. Solche Ebenen legt man gewöhnlich in Abständen von 5 zu 5 Metern. Die Oberfläche des Berges wird auf diese Weise in Kurven geschnitten, die man Schichten-, Höhen- oder Niveaulinien nennt. Und diese Schichtenlinien projiziert man herunter. In Fig. 63 ist schematisch der Schrägriß eines Berges mit seinen Schichtenlinien und darunter die kotierte Projektion desselben gezeichnet. Da nach ihrer Entstehung sämtliche Punkte einer Schichtenlinie in derselben Höhe über der Bildebene, also auch über dem Normalnullpunkt liegen, so erhält die Projektion einer solchen nur eine Kote (gewöhnlich werden die Schichtenlinien in 5, 15, 25, ... m Höhe gestrichelt, die anderen durchlaufend gezeichnet). Muß man auch das Entwerfen der Karten mit den Projektionen der Schichtenlinien anderen überlassen, so bleibt doch für jeden die Aufgabe bestehen, die Karten richtig zu lesen. Bei einiger Übung gelangt man leicht dazu, aus dem Verlauf der Schichtenlinien im Grundriß eine gute körperliche Anschauung der Berge zu gewinnen. Gewiß interessiert zuerst die Frage nach der Steilheit des Berghanges. In Fig. 64 seien g_1, g_2, ... Grundrisse von Wegen zwischen Schichtenkurven. Um allgemein zu bleiben, sei h der Höhen-



unterschied zwischen den Schichten. Dann steigt z. B. g_1 unter einem Winkel α_1 an, den man nach der Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{g_1}$$

berechnet. Denn der räumliche Punkt A_0 der Schichtenlinie 60, dessen Grundriß A ist, liegt h m senkrecht über A. Verbindet man A_0 mit B, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck A_0AB der gesuchte Winkel α_1 bei B enthalten, wie vergrößert in Fig. 64 angedeutet. Weiter findet man $\operatorname{tg} \alpha_2 = h : g_2$. Ist $g_1 > g_2$, so wird umgekehrt $\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2$ und folglich $\alpha_1 < \alpha_2$. Also ist der Anstieg um so steiler, je enger die Schichtenlinien im Grundriß aneinander liegen. Bisher waren die kürzesten Abstände g_1 und g_2 betrachtet worden. Laufen die Wege wie g_3 und g_4 schräg gegen die Schichtenlinien, so steigen sie flacher an, denn auch für sie gilt ja $\operatorname{tg} \alpha_3 = h : g_3$ und $\operatorname{tg} \alpha_4 = h : g_4$. Die Strecken g_1, g_2, ... mißt man auf der Karte nach, während man h aus den Koten der Schichtenlinien unmittelbar entnimmt. Statt den Steigungswinkel anzugeben, pflegt man häufiger so zu verfahren, daß man tg α selbst angibt, aber als Bruch mit der 1 im Zähler. Der Weg in Fig. 65 hat danach die Steigung 5 : 60 oder 1 : 12; wie man auch sagen kann: man muß in horizontaler Richtung 12 m fortschreiten, um 1 m höher zu kommen. So findet man längs der Eisenbahnstrecken die Steigung stets an wegweiserartigen Tafeln angegeben.

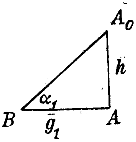


Fig. 64.

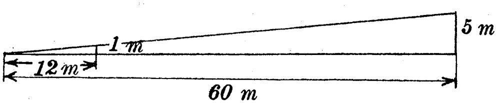


Fig. 65.

Das Beispiel der Fig. 64 ergibt die folgenden Zahlenwerte. $g_1 = 6$ mm, $g_2 = 4$ mm, $g_3 = 9$ mm, $g_4 = 13$ mm. Da aber der Maßstab 1 : 25 000 ist, so sind die wahren Längen:

$$g_1 = 150 \text{ m}, \; g_2 = 100 \text{ m}, \; g_3 = 225 \text{ m}, \; g_4 = 325 \text{ m}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha_1 &= 5 : 150 = 1 : 30, & \alpha_1 &= 1^0, \\
\operatorname{tg} \alpha_2 &= 5 : 100 = 1 : 20, & \alpha_2 &= 2^0, \\
\operatorname{tg} \alpha_3 &= 5 : 225 = 1 : 45, & \alpha_3 &= 1^0, \\
\operatorname{tg} \alpha_4 &= 5 : 325 = 1 : 65, & \alpha_4 &= 0^0.
\end{aligned}$$

Hierunter werden in einer Tabelle die Längen der Strecken g, also der

Wegegrundrisse für verschiedene Steigungswinkel angegeben. Die Steigung ist dabei nichts anderes als $1 : \operatorname{ctg} \alpha$, während die Wegegrundrisse $5 \operatorname{ctg} \alpha$ bzw. $10 \operatorname{ctg} \alpha$ sind, je nachdem zwischen Schichtenlinien von 5 m zu 5 m oder von 10 m zu 10 m gemessen wird. Ein Weg bis 15^0 Steigungswinkel ist fahrbar, bis 30^0 gangbar.

Steigungswinkel	Steigung	Länge des Wegegrundrisses bei 5 m Schichthöhe	Länge des Wegegrundrisses bei 10 m Schichthöhe	Steigungswinkel	Steigung	Länge des Wegegrundrisses bei 5 m Schichthöhe	Länge des Wegegrundrisses bei 10 m Schichthöhe
1^0	1 : 57	286	573	16^0	1 : 3,5	17,4	35
2^0	1 : 29	143	286	17^0	1 : 3,3	16,4	33
3^0	1 : 19	95	191	18^0	1 : 3,1	15,4	31
4^0	1 : 14	72	143	19^0	1 : 2,9	14,5	29
5^0	1 : 11	57	114	20^0	1 : 2,7	13,7	27
6^0	1 : 10	48	95	21^0	1 : 2,6	13,0	26
7^0	1 : 8	41	81	22^0	1 : 2,5	12,4	25
8^0	1 : 7	36	71	23^0	1 : 2,36	11,8	23,6
9^0	1 : 6,3	32	63	24^0	1 : 2,25	11,2	22,5
10^0	1 : 5,7	28	57	25^0	1 : 2,14	10,7	21,4
11^0	1 : 5,1	26	51	26^0	1 : 2,05	10,3	20,5
12^0	1 : 4,7	23,5	47	27^0	1 : 1,96	9,8	19,6
13^0	1 : 4,3	21,7	43	28^0	1 : 1,88	9,4	18,8
14^0	1 : 4,0	20,1	40	29^0	1 : 1,80	9,0	18,0
15^0	1 : 3,7	18,7	37	30^0	1 : 1,73	8,7	17,3

Bei der Benutzung der Tabelle beachte man wohl den Verkleinerungsmaßstab der gerade vorliegenden Karte. Sind z. B. die im Maßstab 1 : 25 000 entworfenen Meßtischaufnahmen gewählt worden, so bedeutet also 1 mm der Karte 25 m (nämlich $1 \times 25\,000$ mm = 25 m). Zwischen 2 Schichtenlinien mit einem Höhenunterschied von 5 m liege eine Wegstrecke von 3,6 mm. Da 1 mm der wahren Länge 25 m entspricht, so hat der Wegegrundriß die wahre Länge $25 \times 3{,}6 = 90$ m folglich liegt der Steigungswinkel nach der Tabelle zwischen 3^0 und 4^0, aber näher 3^0, die Steigung wird ziemlich genau 1 : 18 sein. Für den häufigen Gebrauch einer bestimmten Karte empfiehlt es sich, die obige Tabelle sogleich auf deren Maßstab umzurechnen.

Mit Hilfe der Schichtenlinien wird in der Ingenieurpraxis wie für militärische Zwecke eine große Menge von Aufgaben gelöst. Wegeaufschüttungen, sei es für Fahrstraßen, sei es für Eisenbahnen, Feststellung des Schußbereichs einer Batterie, Ermittelung von Tälern, die gegen Einsichtnahme durch den Feind gesichert sind, usw. kommen dabei

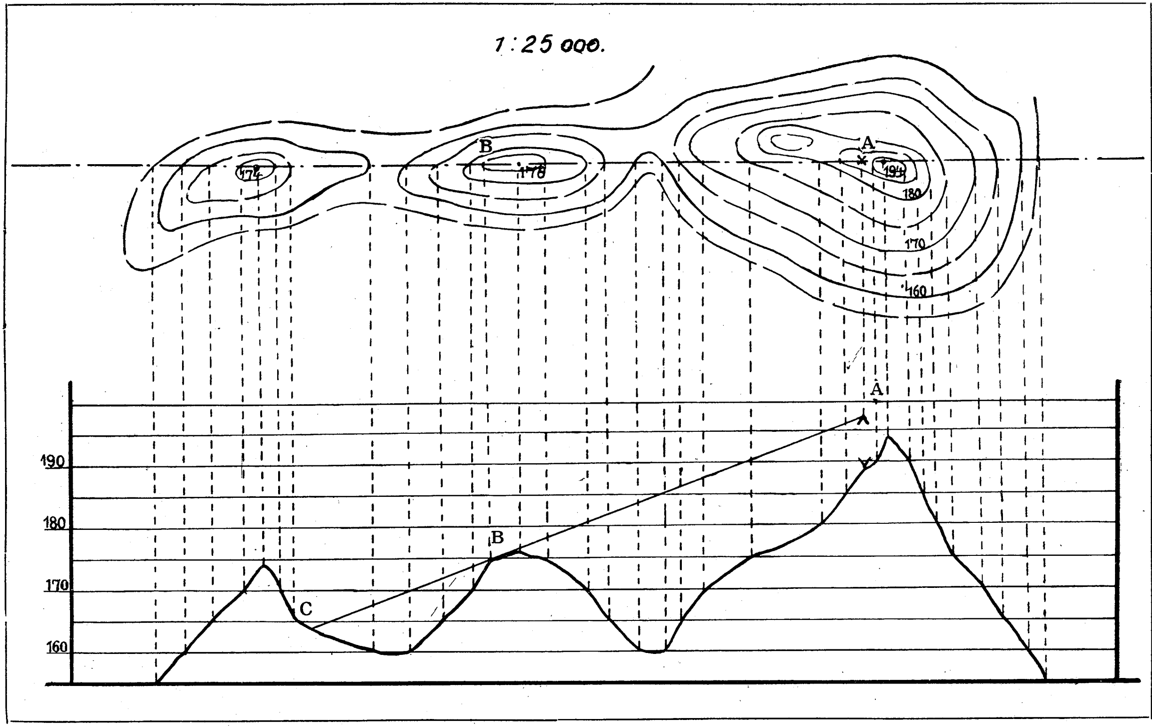


Fig. 66.

in Frage.[1]) Um in deren Behandlungsweise wenigstens einzuführen, seien ein paar Beispiele herausgegriffen, die einfach genug sind und doch auch allgemeineres Interesse besitzen dürften.

1. Aufgabe (Fig. 66). Im Punkte A befindet sich 8 m über dem Erdboden ein Beobachter. Es soll festgestellt werden, welchen Teil BC des nächsten Tales er nicht einzusehen vermag, wenn er in der Richtung AB blickt.

Zuerst paust man den fraglichen Geländeteil von der Karte mit den Schichtenlinien durch. Dann zeichnet man auf dieser Pause, wie in der Fig. 66, parallele Geraden zu AB in Abständen von 5 m zu 5 m, wobei man hierfür einen beliebigen, möglichst bequemen Maßstab, z. B. 1 mm = 1 m wählt. Diese Parallelen erhalten die Höhenzahlen der in der Karte vorkommenden Schichtenlinien. Die Gerade AB schneidet die Schichtenlinien. Jeden Schnittpunkt lotet man auf diejenige Parallele herunter, die die gleiche Kote wie die Schichtenlinie trägt. Verbindet man die heruntergeloteten Punkte durch eine Kurve, so erhält man das Profil des senkrechten Schnittes durch AB, allerdings, da der Höhenmaßstab beliebig war, meist nach der Höhe gegen den Maßstab der Karte verzerrt. Wenn man in diesem Profilbild von A aus die Tangente an die erste Bergkuppe legt, so erkennt man sofort die Grenzen der Geländeteile, die der Beobachter zu sehen vermag.

Soll festgestellt werden, welcher Teil des Tales überhaupt nicht von A eingesehen werden kann, so legt man genau so wie oben eine Reihe von Schnitten durch A und bestimmt immer die Grenzpunkte des Sichtbaren. Die Verbindungskurve dieser Grenzpunkte umschließt den nicht sichtbaren Teil des Tales.

2. Aufgabe. Es ist das von irgendeinem Punkte P aus sichtbare Profil einer bergigen Landschaft zu zeichnen (wie immer in diesem Abschnitt wird von Erdkrümmung und Strahlenbrechung abgesehen).

Man könnte wie in der vorigen Aufgabe durch den Punkt P eine große Zahl von Schnittebenen legen und das Profil in jeder dieser Schnittebenen zeichnen. Von P aus hätte man an jede vorgelagerte Bergkuppe die Tangente zu legen. Ist z. B. in Fig. 67 ein solches Profil gezeichnet, so wäre also vom Berg 1 der Teil über PA, vom Berg 2 nichts, vom Berg 3 der Teil über PB und der vierte Berg ganz zu sehen. Ist PQ die Richtung auf der Karte, in der das Auge blickt, so denkt man irgendwo

[1]) Zu weiterem Studium sei verwiesen auf: R. Rothe, Darstellende Geometrie des Geländes, Leipzig 1914, wo leicht verständlich der Gegenstand wesentlich vom mathematischen Gesichtspunkt aus behandelt wird. Praktisch militärische Ziele verfolgt z. B. das Buch: Jablonsky, Leitfaden für den Unterricht im Planzeichnen und Krokieren an der Oberfeuerwerkerschule. Berlin 1907.

senkrecht zu P Q die Zeichenebene gestellt und in den Grundriß heruntergeklappt. Ist PR der Schnitt der Fig. 67, so errichtet man in R das Lot und trägt auf diesem die Punkte A, B und C mit den Höhen ein, die man auf dem Schnitt erhalten hat. Die Verbindungskurven all solcher Punkte A, B und C ergeben das gesuchte Profil.

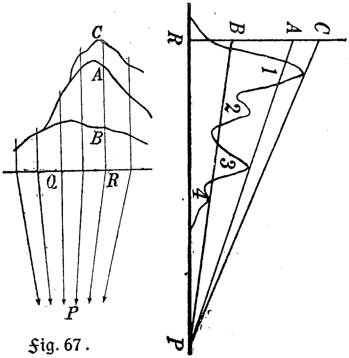


Fig. 67.

In vielen Fällen genügt ein einfaches Näherungsverfahren, das um so genauer ist, je weiter P von den Bergen, deren Profil zu zeichnen ist, entfernt liegt. Wieder sei die Bildebene senkrecht zur Blickrichtung angenommen und herumgeklappt. In dieser Bildebene zeichnet man, s. Fig. 68, ein Netz von parallelen Geraden im Abstande von 5 m zu 5 m. Nun aber begnügt man sich, die Sehstrahlen alle parallel anzunehmen. Man zeichnet daher einfach in Richtung dieser Parallelen sämtliche Tangenten an die Schichtenlinien. In den Endpunkten der Tangenten errichtet man die Lote in der Bildebene und trägt auf diesen Loten die Höhen entsprechend den Koten der Schichtenlinien ab. Die

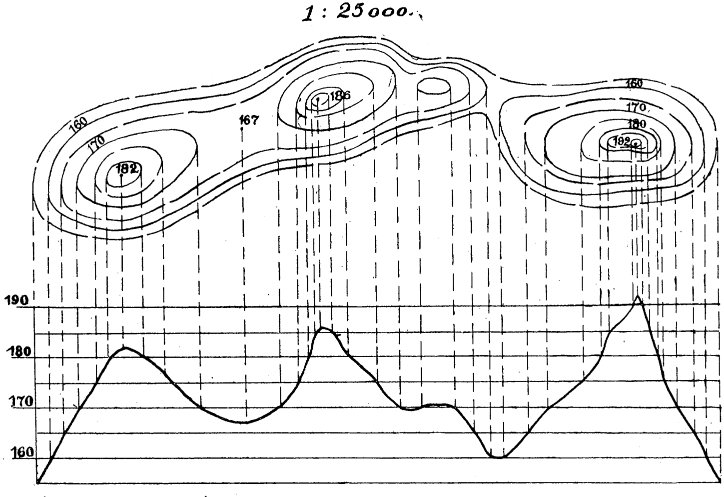


Fig. 68.

gefundenen Endpunkte verbindet man durch Kurven, die nahezu das gesuchte Profil darstellen. Liegen mehrere Anhöhen hintereinander, so läßt man die durch vordere Berge verdeckten Teile der entfernteren Berge beim Ausziehen weg.

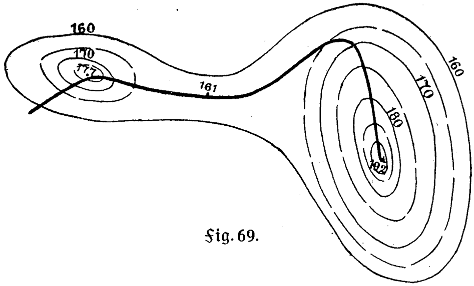


Fig. 69.

3. Aufgabe (Fig. 69). Profil und Länge eines Weges sind zu zeichnen.

Denkt man durch sämtliche Punkte des Weges die senkrechten Projektionsstrahlen gelegt, so bilden sie einen Zylindermantel, dessen Grundlinie das Bild des Weges auf der Karte ist. Die Aufgabe ist also die, diesen Zylindermantel flach auf der Zeichenebene ausgebreitet darzustellen. Bei der Ausbreitung wird die Grundlinie des Zylinders eine gerade Linie, deren Länge zuerst zu bestimmen ist. Zu dem Zwecke betrachtet man auf der Karte die krummen Stücke von Schichtenlinie zu Schichtenlinie als geradlinige Strecken und trägt sie hintereinander, s. Fig. 70, auf einer Geraden ab. Ist einmal der Bogen zwischen zwei Schichtenlinien zu groß, so schaltet man in kurzer Entfernung Zwischenpunkte ein, zwischen denen die Kurve hinreichend genau durch eine gerade Linie ersetzt werden kann. Hat man also in Wahrheit die Sehnen der einzelnen Bogenstücke mit Hilfe des Zirkels auf der Grundlinie aufgetragen, so errichtet man in sämtlichen Teilpunkten die Lote und trägt auf ihnen die Höhen der Wegepunkte, die ja durch die Koten der Schichtenkurven unmittelbar gegeben sind, ab. Die Endpunkte der Lote verbindet man in der Regel durch gerade Linien, deren Steigung zugleich die Steigung des Weges an der betreffenden Stelle angibt.

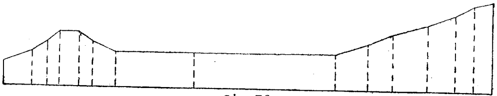


Fig 70.

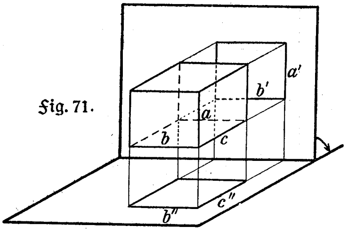
Um die Länge des Weges zu ermitteln, kann man in erster Annäherung die Summe aller geradlinigen Strecken abtragen und nachmessen. Oder aber man verbindet erst einmal die Endpunkte aller Lote durch eine Kurve. Dann trägt man mittels des Stechzirkels eine kurze Sehne hintereinander auf der Kurve ab. Man zählt nach, wie oft das möglich ist. Darauf vergleicht man mit einem Maßstab, auf dem man ebensooft jene Zirkelöffnung abträgt. Dabei darf man nicht vergessen, den Verkleinerungsmaßstab zu berücksichtigen. Endlich kann man auch ein kleines Instrument benutzen, ein Kurvimeter. Das ist weiter nichts als eine kleine Rolle, mit der man an der Kurve entlang fährt. An einem Zählwerk wird die Anzahl der Umdrehungen der Rolle gemessen. Angeschrieben wird aber gleich die Länge des überfahrenen Weges, der ja einfach gleich dem Produkt aus jener Anzahl mal dem bekannten Umfang der Rolle ist.

Anmerkung 1. Beim Nachmessen einer Kurve mit Hilfe von Sehnen kann man scheinbar so genau, wie man nur will, messen, wenn man die Zirkelöffnung — also die Sehnenlänge — beliebig klein wählt. Dem ist aber tatsächlich sehr bald eine Grenze gesetzt, da der Fehler, der durch das wiederholte Abtragen begangen wird, natürlich um so größer wird, je öfter man abträgt, also je kleiner die Sehne ist.

Anmerkung 2. Man versäume nicht, sich ein plastisches Bild des Geländes herzustellen. Dazu paust man die Schichtenlinien eine nach der anderen mit Eintragung der Wege, Wälder usw. durch, klebt sie auf dicke Pappe auf und klebt dann die Pappstücke aufeinander. Für das richtige Aufeinanderkleben der Pappscheiben ist es natürlich nötig, jedesmal zwei aufeinanderfolgende Schichtenlinien durchzupausen. Um eine bessere plastische Wirkung zu erzielen, wird meist der Höhenmaßstab wesentlich größer als der Kartenmaßstab genommen. Arbeitet man mit den Meßtischblättern, so wird sich's empfehlen, die Schichtenlinien mit Hilfe des Storchschnabels vergrößert aufzutragen, also das Modell von vornherein im vergrößerten Maßstabe aufzubauen.

5. Das Grund- und Aufrißverfahren. In der letzten Nummer war gezeigt worden, wie ein Grundriß entsteht; also ein Bild, wie man nahezu einen Körper sieht, wenn man aus großer Entfernung senkrecht auf ihn herabblickt. Die Höhenmaße wurden durch Koten angegeben. Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens hört aber auf, wenn Gebrauchsgegenstände des täglichen Lebens, Maschinen usw. abgebildet werden sollen, bei denen auf einer Senkrechten häufig eine ganze Reihe von Punkten liegt, deren Koten alle an demselben Grundrißpunkt angeschrieben werden müßten. Natürlich wäre es nicht möglich, sich in solch einer Figur zurechtzufinden. Aber dem Übelstande ist leicht abgeholfen. Genau wie man einen Grundriß herstellt, indem man senkrecht auf eine beliebige Bodenfläche projiziert, so denkt man eine senkrechte Wand dazu und projiziert ebenfalls senkrecht auf diese. Fig. 71 zeigt die Anordnung. Die neue Projektion heißt ein Aufriß des Körpers. Grundriß und Aufriß zusammen bestimmen vollkommen einen Körper, nur bei einigen seltenen besonders ungünstigen Stellungen wird es nötig, noch einen „Seitenriß" hinzuzunehmen auf irgendeine dritte Ebene, die man gewöhnlich ebenfalls senkrecht auf der Grundebene wählt.

Fig. 71.



Einige wichtige Sätze kann man sofort herleiten. In der Fig. 71 ist $b = b' = b''$ und $c = c''$, $a = a'$; d. h. verläuft eine Strecke parallel zu einer Projektionsebene, so ist die Projektion auf diese ebenso lang wie die Strecke selbst. Eine beliebige nicht parallele Strecke besitzt stets eine verkürzte Projektion. Ist p die Strecke, die unter einem Winkel α gegen die Projektionsebene geneigt ist, und ist p' die Projektion, so wird $p' = p \cdot \cos\alpha$. (Vgl. hierzu S. 85.)

Die Kanten a und c stehen auf b senkrecht. Aber auch jede andere von derselben Ecke ausgehende Gerade in der Ebene des Rechtecks (a, c) würde auf b senkrecht stehen. Alle diese Geraden haben dieselbe Projektion c'', die auf b'' senkrecht steht. Daraus folgt: Die Projektion eines rechten Winkels ist wieder ein rechter Winkel, wenn ein Schenkel des rechten Winkels parallel zur Projektionsebene verläuft. Im allgemeinen kann die Projektion eines Winkels sowohl größer als auch kleiner sein als der Winkel selbst.

Man erkennt aus diesen Sätzen, daß es bei den meisten Körpern, bei denen aufeinander senkrechte Kanten vorkommen, praktisch sein wird, sie so zu den Bildebenen zu stellen, daß jene Kanten parallel zu den Bildebenen laufen. Denn dadurch werden sie sich am leichtesten zeichnen lassen, aber man wird auch aus Grund- und Aufriß die Hauptmaße Länge, Breite und Höhe unmittelbar ablesen können.

Wie man nachher sehen wird, ist das Verfahren lange nicht so anschaulich wie die Parallelprojektion. Maße lassen sich aber noch einfacher ermitteln und einzeichnen. Deswegen werden die Konstruktionszeichnungen im Handwerk und in der Industrie fast ausnahmslos im Grund- und Aufriß entworfen. Für schnelle Freihandskizzen dagegen empfiehlt sich häufig die Parallelprojektion. Das Grund- und Aufrißverfahren ist geradezu die Schrift des Technikers geworden, in der er seine Gedanken ausarbeitet und niederlegt. Es ist eine gewiß wichtige Aufgabe, diese Zeichnungen richtig lesen zu lernen.

Aber man projiziert ja auf zwei Ebenen, während man doch mit

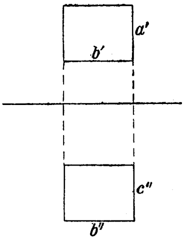


Fig. 72.

einem Zeichenblatt wird auskommen wollen! Man hilft sich, indem man die Grundrißebene als Zeichenebene wählt und die Aufrißebene, wie es der Pfeil andeutet, in diese Zeichenebene hineinklappt. Den Körper, der gezeichnet werden soll, denkt man stets so aufgestellt wie in Fig. 71: also vor der Aufriß- und über oder gerade auf der Grundrißebene. Wie früher schon festgesetzt, werden unsichtbar gezeichnet im Grundriß die Kanten, die man beim Daraufblicken von oben (die Sehstrahlen parallel gedacht!), im Aufriß die Kanten, die man im Daraufblicken von vorn nicht sehen kann. Dieselbe Kante kann also sehr wohl im Grundriß sichtbar, dagegen im Aufriß unsichtbar sein und umgekehrt. Fig. 72 zeigt die Darstellung des Körpers der Fig. 71, wie er nach der Umklappung in den Projektionen erscheint. Die Achse, um die herumgeklappt wurde, wird gewöhnlich noch mit gezeichnet. Da a, c, a′, c″ bei der Umklappung immer in

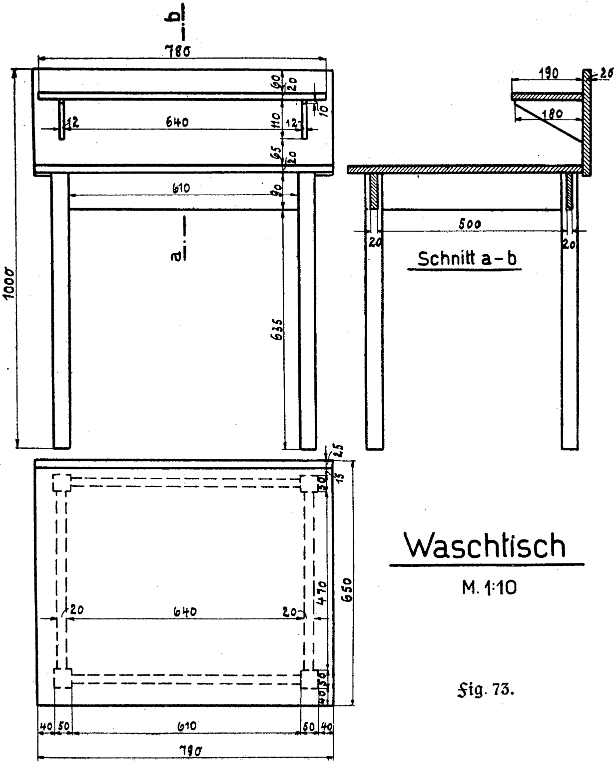


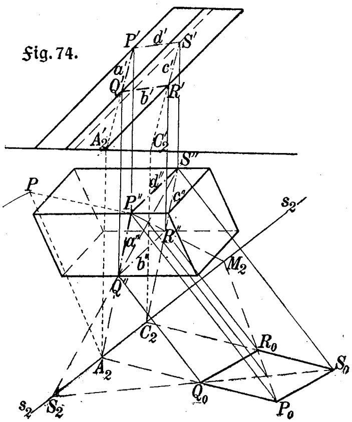
Fig. 73.

derselben Ebene bleiben, die zur Achse senkrecht steht, so liegen auch nach der Umklappung a' und c'' auf einem Lot zur Achse. Es gilt allgemein: Grund- und Aufriß eines Punktes liegen stets auf einem Lot zur Achse. Derselbe Waschtisch, der in Fig. 59 im Schrägriß dargestellt wurde, ist in Fig. 73 noch einmal in Grund- und Aufriß gezeichnet. Wie praktisch üblich sind alle notwendigen Maße mit eingezeichnet. Natürlich wird in einem verkleinerten Maßstabe gezeichnet, während die wirklichen Längen angegeben werden.

Aber der Handwerker muß auch wissen, wie der Tisch im Innern aussehen soll. Auch das alles als „unsichtbar" in die obige Zeichnung mit hineinzunehmen, ist nicht empfehlenswert, da alle Übersichtlichkeit verloren gehen würde. Man denkt vielmehr je nach Bedarf einen oder mehrere ebene Schnitte hindurchgelegt und gesondert gezeichnet. Die Schnitte sind so zu wählen, daß man aus ihrer Zeichnung alles Gewünschte erkennen kann. Hier ist ein Schnitt senkrecht zum Grund- und Aufriß gelegt. Wie gebräuchlich sind die dabei durchschnittenen Holzteile schraffiert. Im Grundriß ist das Seitenbrett am Aufsatz weggelassen, um möglichst wenig zu verdecken.

Häufig ist es nötig, einen ebenen Schnitt wie soeben, aber beliebig schräg durch einen Körper zu legen. Das mag als letzte Aufgabe an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Der Schnitt Fig. 74 sei durch die beiden Geraden $P'Q'=a'$ und $Q'R'=b'$ im Aufriß bestimmt. Durch zwei sich schneidende Geraden läßt sich ja eine und nur eine Ebene legen.

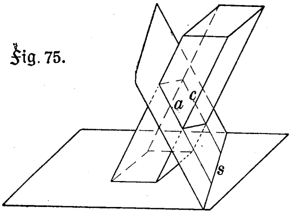
Fig. 74.



Im Aufriß kann die Schnittfigur sogleich vervollständigt werden. Da nämlich der Körper ein schiefes Parallelprisma ist, so wird er von jeder beliebigen Ebene in einem Parallelogramm geschnitten. Folglich erhält man die vollständige Schnittfigur im Aufriß, indem man durch R' die Parallele $R'S'$ zu a' und durch P' die Parallele $P'S'$ zu b' zieht. Als Probe hat man: der gemeinsame Schnittpunkt S' muß auf einer Prismenkante liegen. Den Grundriß der Schnittfigur erhält man ebenfalls unmittelbar, indem man die Eckpunkte P', Q',

R', S' auf die zugehörigen Seitenkanten herunterlotet. Verbindet man die so gefundenen Punkte P'', Q'', R'', S'', so hat man als Probe, daß $P''Q'' \parallel R''S''$ und $P''S'' \parallel Q''R''$ sein muß. Das Wichtigste bleibt jetzt, die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur, von der bis jetzt nur ihre Projektionen bekannt sind, zu finden. Das macht man so, daß man die schräge Schnittebene in die Zeichenebene hineinklappt. Dazu braucht man zuerst eine Achse, um die man die Schnittebene herumdreht. Die Schnittebene wird aber, wenn man sie genügend weit verlängert, s. Fig. 75, die Grundrißebene in einer Geraden s schneiden, und diese Gerade muß gesucht werden. Man nennt diese Gerade die Spurgerade oder kurz die Spur der Schnittebene. Natürlich genügt es, zwei Punkte der Spur zu kennen, denn man braucht ja nachher nur diese Punkte zu verbinden. Als solche Punkte mögen die Schnittpunkte der Geraden a und c mit der Grundrißebene gewählt werden, die die Spurpunkte der Geraden a und c heißen. (Man erkennt nebenbei den Satz: Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn ihre beiden Spurpunkte im Grund- und Aufriß auf den beiden Spuren der Ebene liegen.) Weiter wird in Fig. 74 gezeichnet; man behalte aber immer zum besseren Verständnis den Schrägriß im Auge. Um die Spurpunkte von a und c zu finden, muß man a'' und c'' verlängern. Es fragt sich, wie der Aufriß zu benutzen ist. Auch dort verlängert man a' und c', und zwar bis zur Achse. Alles, was in der Grundebene liegt, fällt beim senkrechten Projizieren ja einfach auf die Achse, also sind dort auch die Projektionen der Spurpunkte zu suchen. Sie mögen A_2' und C_2' heißen.[1]) Da senkrecht projiziert wird, hat man nur noch in A_2' und C_2' auf der Achse die Lote zu errichten und zu verlängern, bis sie die Verlängerungen von a'' und c'' in den gesuchten Spurpunkten A_2 und C_2 schneiden. Die Gerade $A_2 C_2 = s_2$ ist die Spurgerade der Schnittebene im Grundriß. Zur Kontrolle wird man noch die Spurpunkte der Geraden b und d konstruieren; auch diese müssen auf s_2 liegen. Häufig werden solche Punkte unzugänglich sein, wenn sie außerhalb des Zeichenblattes liegen. Dann muß

Fig. 75.



1) A_2' und C_2' sind natürlich nicht etwa die Spurpunkte der Geraden a und c im Aufriß. Wie diese Spurpunkte A_1 und C_1 ganz entsprechend wie oben gefunden werden, kann jeder leicht selbst überlegen.

man geeignete Hilfsgeraden benutzen; hier z. B. die Diagonalen PR und QS.

Jetzt also ist das Parallelogramm um s_2 in die Grundebene hineinzuklappen. Dabei beschreibt jeder Eckpunkt $P, Q, \ldots$ einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht zur Drehungsachse s_2 liegt. Die Projektion ist deshalb ein Lot von $P'', Q'', \ldots$ auf s_2. Auf diesen Loten wird jeder der heruntergeklappten Punkte $P_0, Q_0, \ldots$ liegen müssen. Als zweites benutzt man die selbstverständliche Tatsache, daß die Punkte $A_2, C_2, \ldots$ auf der Drehungsachse selbst beim Umklappen liegen bleiben. Nun mag etwa — wie, wird nachher gezeigt — P_0 gefunden sein. Dann zeichnet man leicht das ganze Parallelogramm, denn man weiß einmal, daß Q_0, R_0, S_0 auf den Loten zu s_2 durch Q'', R'', S'' liegen müssen, zweitens aber der Reihe nach auf den Geraden P_0A_2, Q_0L_2, S_0C_2 und zur Kontrolle P_0M_2. Eine weitere Kontrolle folgt z. B. aus $P_0Q_0 \parallel R_0S_0$ und $P_0S_0 \parallel Q_0R_0$.

So bleibt als letztes die Frage zu beantworten, wie der Punkt P_0 gefunden wurde. Dazu dient die Nebenfigur 76. Man denke dabei an folgendes: das heruntergeklappte Parallelogramm war scheinbar ausschließlich, wie oben beschrieben, mit Hilfe vom Grundriß gefunden worden. Das ist natürlich nicht möglich, weil es nicht allein seiner Größe und Gestalt nach durch eine Projektion bestimmt ist. Deshalb wird man ohne weiteres für die Konstruktion von P_0 den Aufriß gebrauchen. Es ist gut, immer darauf zu achten, daß man die notwendigen Hilfsmittel auch immer an der richtigen Stelle sucht. Man stelle sich also die räumliche Gerade PQA_2 vor, deren Projektionen $P'Q'$ und $P''Q''$ sind. P'' erhielt man durch das Lot PP'' auf die Grundebene. Aber man weiß ja, wie lang dieses Lot ist, nämlich gleich der Länge des Lotes h im Aufriß von P' auf die Achse. Deshalb kann man das rechtwinklige Dreieck $PP''A_2$ sofort umlegen, indem man auf A_2P'' in P'' das Lot errichtet und gleich h macht. Der gefundene Punkt P ist mit A_2 zu verbinden. In gleicher Weise kann man Q finden, wobei zur Kontrolle QQ'' dem Aufriß entnommen wird. $PQ = a$ ist die wahre Länge einer Parallelogrammseite. In dieser Weise ist P in Fig. 74

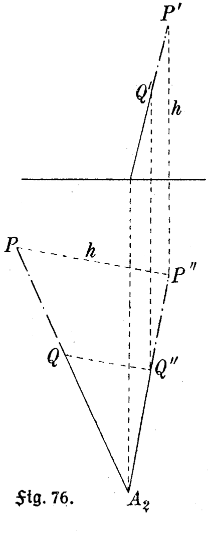
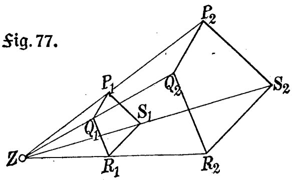


Fig. 76.

gefunden worden. Endlich schneidet ein Kreisbogen um A_2 mit A_2P das Lot von P'' auf s_2 im gesuchten Punkt P_0. Natürlich wird man Q ebenfalls einzeichnen und zu mancherlei Kontrollen benutzen.

6. Die perspektivische Affinität. Um ein wenig tiefer in die mathematischen Gesetze der Projektionslehre einzudringen, mögen einige Andeutungen darüber folgen, die späterhin in Nr. 8 vervollständigt werden. In der Grundrißebene war aus der Projektion des ebenen Schnittes durch ein schiefes Prisma die Umklappung abgeleitet worden.

Fig. 77.



Die Vierecke $P''Q''R''S''$ und $P_0Q_0R_0S_0$, die also zu derselben räumlichen Figur PQRS gehören, haben offenbar eine nach mathematischen Gesetzen bestimmte Lage zueinander. Man sagt, zwischen ihnen besteht eine geometrische Verwandtschaft. Sie hat den Namen perspektivische Affinität erhalten. Geometrische Verwandtschaften sind durchaus nichts Neues, denn Kongruenz und Ähnlichkeit sind allbekannte einfache Beispiele solcher. Bei der Vergrößerung einer Figur erhält man die sogenannte Ähnlichkeit bei perspektivischer Lage, siehe Fig. 77, die in eigenartigem Gegensatz zur perspektivischen Affinität steht. Für beide gelten, wie man sofort erkennt, die folgenden Sätze:

Ähnlichkeit bei perspektivischer Lage.	Perspektivische Affinität.
Entsprechende Geraden sind parallel.	Entsprechende Punkte liegen auf parallelen Geraden.
Entsprechende Punkte liegen auf Strahlen, die durch einen festen Punkt, das Ähnlichkeitszentrum, gehen.	Entsprechende Geraden schneiden sich auf einer festen Geraden, der Affinitätsachse.

Wichtig ist nun, daß die perspektiv-affine Verwandtschaft auch zwischen Grund- und Aufriß jeder ebenen Figur (aber man beachte wohl nur jeder ebenen Figur) besteht. Davon kann man oft mit großem Vorteil Gebrauch machen. In Fig. 78 ist ein ebenes Viereck im Grund- und Aufriß gezeichnet. Bestimmt man die Schnittpunkte $(a', a'') = A_0$ und $(b', b'') = B_0$, so ist $A_0B_0 = p$ die Affinitätsachse, die natürlich nichts mit der Projektionsachse zu tun hat. Wenn wirklich das räumliche Viereck ein ebenes ist (und vier Geraden brauchen im Raume keineswegs in einer Ebene zu liegen), so müssen auch die Schnittpunkte (c', c'') und (d', d'') auf p liegen, was wirklich der Fall ist. Umgekehrt hat man damit ein Mittel gefunden, ebene Vielecke zu zeichnen. In Fig. 60 ist, wie man erkennt, eine Ellipse als affine Figur eines Kreises gezeichnet.

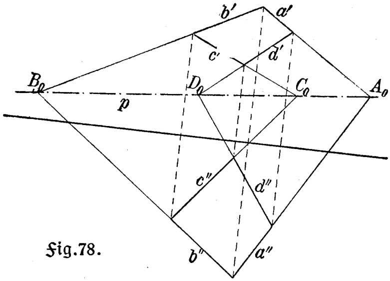


Fig. 78.

7. Die Zentralprojektion.[1]) Die Zentralprojektion oder kurzweg die Perspektive liefert diejenige Abbildung, welche der Wirklichkeit am meisten entspricht. Dafür ist es bei ihr sowohl am schwierigsten, in den richtigen Maßen zu zeichnen, als auch umgekehrt aus dem Bilde Maße zu entnehmen.

Bei der Perspektive gehen die Projektionsstrahlen von einem festen Punkte aus, also nahezu wie beim natürlichen Sehen mit dem Auge. Wenn der Baumeister zeigen will, wie das von ihm entworfene Haus aussehen wird, so zeichnet er sein perspektivisches Bild. Ebenso wird der Maler bei größeren Gemälden mit architektonischen Gegenständen oder Innenräumen nach den strengen Regeln der Perspektive zuerst einmal konstruieren. Hinterher muß er allerdings oft bewußt davon abweichen, um die eigentümliche Art des menschlichen Sehens zu berücksichtigen.[2]) Sehr wichtig ist ferner, daß die Photographie eine Zentralprojektion ist. Daher wird es eine Aufgabe der Projektionslehre aus vorhandenen photographischen Aufnahmen Lage, Größe usw. eines Gegenstandes zu finden. Davon wird in einer besonderen Nummer, über Photogrammetrie, zu sprechen sein.

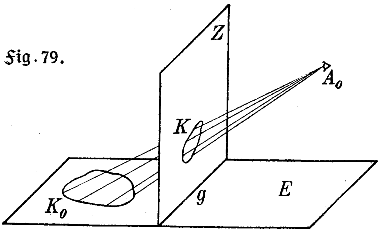
In Fig. 79 ist in einer beliebigen Ebene E irgendeine Kurve K_0

1) Eingehender, als hier möglich, und mit zahlreichen praktischen Anwendungen ist der Gegenstand behandelt in Doehlemann, Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen (ANuG Bd. 510). Leipzig 1916. Insbesondere für Maler ist das auf S. 35 genannte Werk von Hauck bestimmt.

2) Es sei nur auf eines hingewiesen. Die Zentralprojektion entwirft ein Bild auf einer festen Zeichenebene. Dem würde das Bild entsprechen, das ein ruhendes, in einer festen Richtung blickendes Auge empfängt. Hierbei nimmt das Auge alle seitlich befindlichen Dinge nur verschwommen wahr. Sollen auch sie angesehen werden, so wird das Auge gedreht; das Bild fällt also auf eine neue Bildebene. Deshalb müssen seitlich liegende Gegenstände (oder oben oder unten befindliche) bei einer genauen perspektivischen Konstruktion verzerrt erscheinen gegenüber dem, was das Auge tatsächlich sieht. Darauf hat der Maler wohl zu achten.

gezeichnet, deren Bild entworfen werden soll. Zu dem Zwecke wählt man eine Zeichenebene Z senkrecht auf E aus. Man kann sich etwa eine mattierte Glasscheibe denken, auf der sich zeichnen läßt, die aber trotzdem noch durchsichtig genug bleibt. Von einem festen Punkte A_0 aus betrachtet man die Kurve K_0; dann werden die Sehstrahlen die Glasplatte Z an bestimmten Punkten durchdringen, so daß man das Bild K von K_0 auf Z aufzeichnen kann. Das ist aber das Verfahren der Zentralprojektion. K heißt deshalb der **Zentralriß** von K_0, und A_0 wird der **Augenpunkt** genannt. E ist die **Grundebene** und die Schnittgerade g von Z und E die **Grundlinie**. Auf der Grundebene E sollen alle Körper aufgestellt sein, deren Zentralrisse man zeichnen will. Zu beachten ist, daß im Gegensatz zu den bisherigen Projektionsverfahren die Zeichenebene zwischen dem Gegenstand und dem Beschauer aufgestellt wird.

Fig. 79.



Drei Aufgaben werden nacheinander, mannigfach ineinandergreifend, zu besprechen sein:

a) Herstellung eines Zentralrisses nach gegebenen Maßen von Gegenständen bekannter Gestalt;

b) Herstellung eines Zentralrisses, wenn der Gegenstand in Grund- und Anriß gegeben ist;

c) Herstellung von Grund- und Aufriß eines Gegenstandes, dessen Zentralriß bekannt ist.

Diese dritte Aufgabe wird in der Photogrammetrie behandelt.

a) Beschränkt man sich zunächst einmal auf ebene Figuren, die in der Grundebene gezeichnet sind, so wird man am praktischsten die Grundebene mit einem Quadratnetz bedeckt denken, in das man leicht und bequem jede Figur einzeichnen kann. Hat man darauf den Zentralriß des Quadratnetzes gezeichnet, so kann man ebenso leicht in dieses das Bild jeder beliebigen Figur eintragen. So sieht man in Fig. 83, die man gleich einmal anblicken mag, links das Quadratnetz der Grundebene mit irgendeiner Kurve darin und rechts daneben den Zentralriß. Genaueres kommt später.

Zunächst wird es am bequemsten sein, wenn die Seiten des Quadratnetzes parallel bezw. senkrecht zu g laufen. Wie werden die Bilder solcher Geraden aussehen? Nun, in Fig. 80 liegen a_0 und b_0 parallel zu g. Aber auch ihre Bilder a und b sind zu g parallel.[1]) Offenbar ist es gleichgültig, in welcher Ebene die Gerade a_0 liegt, wenn sie nur zu g parallel ist. Immer gilt: der Zentralriß einer zu g parallelen Geraden verläuft zur Geraden und also zu g parallel.

Fig. 80.

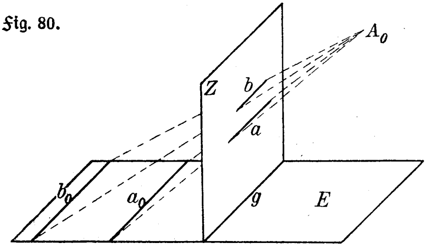
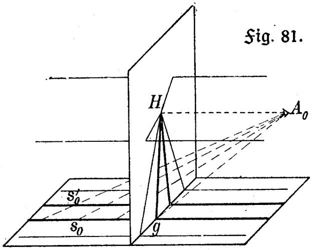


Fig. 81.



Ganz anders verhalten sich die zu g senkrechten Geraden. Man betrachte einmal bei einem Bahnübergang die Schienen der Eisenbahn. Verfolgt man sie mit den Blicken vorn beginnend, so muß man langsam den Kopf heben. Immer weiter und weiter wandert der Blick, aber denkt man auch die Schienen bis in die unendliche Ferne verlängert (jetzt an mathematische Vorstellung anknüpfend, also die Schienen auf einer Ebene und nicht auf der Erdkugel gedacht), der Sehstrahl wird schließlich parallel zu den Schienen liegen. Fig. 81 deutet den Vorgang an. A_0H ist der parallele Sehstrahl, und die Bilder der Schienen scheinen in diesem Punkte H zusammenzulaufen. Man mag dabei nicht vergessen, daß der Blick niemals völlig parallel zu s_0 und s_0' werden kann; wie denn auch diese Geraden sich niemals in einem Punkte schneiden können, dessen Bild ja H sein müßte. Aber je weiter man blickt, um so näher kommt das Bild an H heran; wenn man nur weit genug sehen könnte, so würde man Bilder so nahe H, wie man will, erhalten, ohne jemals H ganz zu erreichen. Solch ein Punkt H, in dem sich also die verlängerten Zentralrisse paralleler Geraden schneiden, heißt der **Fluchtpunkt** der parallelen Geraden. Offenbar ist H nicht nur der Fluchtpunkt von s_0 und s_0', sondern auch von jeder andern zu diesen beiden

1) Denkt man nämlich die Ebene $A_0 a a_0$ gelegt, so ist ja g zu dieser Ebene parallel, weil g zu einer Geraden der Ebene parallel ist. Da g also die Ebene überhaupt nicht schneiden kann, so kann sie auch nicht die Gerade a schneiden, die ja ganz in der Ebene liegt. Folglich ist $g \parallel a$. Ebenso folgt $g \parallel b$.

parallelen Geraden, gleichgültig ob sie in der Grundebene oder sonstwo im Raum, ob sie oberhalb oder unterhalb A_0H liegt.

s_0 und s'_0 stehen senkrecht auf g, deshalb ist auch A_0H senkrecht zur Bildebene. In diesem Falle heißt der Fluchtpunkt H der **Hauptpunkt**.

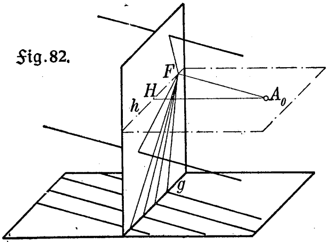


Fig. 82.

Der **Hauptpunkt**, d. h. der **Fußpunkt des Lotes vom Augenpunkt auf die Bildebene, ist also der Fluchtpunkt aller zur Bildebene senkrechten Geraden**. Wenn nun aber die Schienen schräg zur Grundlinie g laufen, so hat man eben in dieser schrägen Richtung zu blicken. Wieder ergibt sich, siehe Fig. 82, ein Fluchtpunkt F, in dem die Bilder dieser Parallelenschar zusammenlaufen. F erhält man, wenn man durch A_0 eine Parallele zu jener Geradenschar legt. Jede Gerade in der Grundebene besitzt also ihren Fluchtpunkt, und alle Parallelen, die man durch A_0 legen muß, um diese Fluchtpunkte zu finden, liegen selbst wieder in einer Ebene durch A_0 parallel zur Grundebene. In ihrer Schnittgeraden h liegen all die gesuchten Fluchtpunkte. Man nennt h die **Horizontlinie** oder kurz den **Horizont**. Man beachte aber wohl, daß es sich nur um die Fluchtpunkte von Geraden handelt, die in der Grundebene selbst liegen, oder doch zur Grundebene parallel laufen.

Besonders einfach findet man den Fluchtpunkt der Diagonalen jener Quadrateinteilung in Fig. 83. Diese bilden mit den Seiten und daher auch mit g Winkel von 45^0. In Fig. 82 wäre in diesem Sonderfalle $\sphericalangle\, HFA_0 = 45^0$. Da aber $\triangle\, FHA_0$ rechtwinklig ist, so müßte auch $\sphericalangle\, FA_0H = 45^0$ sein; d. h. das Dreieck wäre gleichschenklig und also $A_0H = HF$. Der Abstand $A_0H = d$ des Augenpunktes von der Bildebene heißt die **Distanz**. Trägt man von H aus nach rechts und links d ab, so erhält man die beiden **Distanzpunkte** D_1 und D_2, das sind die Fluchtpunkte der beiden Richtungen, die gegen die Bildebene unter 45^0 geneigt sind.

Jetzt kann zur Fig. 83 übergegangen werden. Links ist die Quadratteilung gezeichnet, deren Bild entworfen werden soll. Zuerst braucht man die parallelen Geraden g und h — Grundlinie und Horizont. Ihr Abstand gibt an, wie hoch sich das Auge des Beschauers über der Grundebene befindet. Danach ist er zu wählen und im Maßstab der ganzen Figur verkleinert abzutragen. H bezieht sich auf die Lage des Auges vor der Bildebene, kann also frei gewählt werden. Drittens muß der Augenabstand d bekannt sein (wie man ihn praktisch zu wählen hat, wird später besprochen). Trägt man ihn im rechten Maßstab verkleinert ab, so daß $HD_1 = d$ wird, so ist zugleich ein Distanzpunkt gefunden. In der Figur ist z. B. Abstand $(h, g) = 4$ cm; $HD_1 = 5$ cm, d. h. das Auge des Beschauers befindet sich 4 m über der Grundebene und 5 m vor der Bildebene, da die Zeichnung im Maßstab 1 : 100 entworfen wurde.

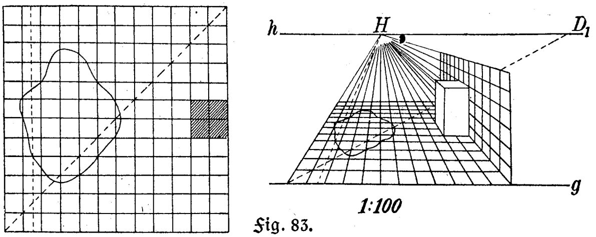


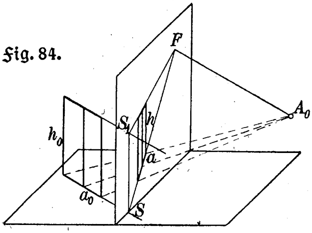
Fig. 83.

Die Quadratseite der Teilung ist $^1/_2$ m lang. Diese Länge trägt man also auf g (in der Verkürzung von 5 mm) hintereinander ab, denn auf g, das ja sowohl in der Grundebene als auch in der Bildebene liegt, bleiben alle Längen unverändert. Die Teilpunkte verbindet man mit H. Dadurch sind die zur Bildebene senkrechten Quadratseiten gefunden. Die anderen Quadratseiten liegen parallel zu g. Um diese Parallelen an der richtigen Stelle zu ziehen, braucht man nur das Bild einer Diagonalen zu zeichnen, indem man einen Teilpunkt mit D_1 verbindet. Durch die Schnittpunkte mit den vertikalen Quadratseiten zieht man die Parallelen zu g. Damit ist das Quadratnetz gefunden.

In dieses Quadratnetz ist eine beliebige Figur eingezeichnet. Man kann sie entweder nach Augenmaß übertragen oder, wenn nötig, durch Hilfslinien, die parallel zu den Quadratseiten verlaufen, weitere Punkte bestimmen.

Endlich bleibt noch die Frage zu beantworten, wie man die Senkrechten zur Grundebene zu zeichnen hat. Diese bleiben zwar auch im Zentralriß zu g senkrechte Geraden. Aber wie lang werden sie? Also mögen, Fig. 84, auf a_0 in beliebigen Punkten Lote h_0 errichtet sein, die gleich lang sind. SF ist das Bild von a_0. Verbindet man die Endpunkte der Lote, so erhält man eine Parallele zu a_0 mit dem Spurpunkt S_1, wie auch hier der Schnittpunkt der Geraden mit der Bildebene genannt wird. Das Bild dieser Parallelen ist S_1F, denn die parallelen Geraden haben denselben Fluchtpunkt F. Zwischen SF und S_1F liegen die Bilder aller Lote. Kennt man also den Lotfußpunkt, so errichtet man im Zentralriß in ihm das Lot auf g. Der Teil des Lotes zwischen den Geraden SF und S_1F ist das Bild der Senkrechten. Also bleibt als Regel: um das Bild des Lotes h_0 zu zeichnen, legt man durch den Fußpunkt eine Gerade a_0 mit dem Spurpunkt S und dem Fluchtpunkt F. In S errichtet man das Lot $SS_1 = h_0$ auf g und verbindet S und S_1 mit F. Zwischen diesen beiden Geraden liegt der Zentralriß des Lotes, den man senkrecht zu g sofort zeichnen kann, wenn man noch das Bild des Lotfußpunktes, z. B. mit Hilfe des Bildes einer zweiten Geraden b_0 durch den Lotfußpunkt von h_0, kennt.

Fig. 84.

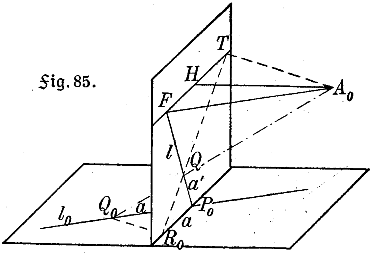


Die eben gefundenen Ergebnisse mögen verwendet werden, um eine senkrechte Wand, wieder in Fig. 83, mit einem Quadratnetz zu bedecken. Dazu braucht man nur im entsprechenden Endpunkt auf g das Lot zu errichten, auf diesem wie oben je 5 mm abzutragen und die Teilpunkte mit H zu verbinden. Dann hat man die Geraden, zwischen denen die Bilder der gleichlangen Lote liegen. Man errichtet sie in den schon vorhandenen Endpunkten der Grundteilung. Als Beispiel ist ein Körper gezeichnet, den man sich etwa als rohe Skizze eines Ofens denken mag. Links ist ein Quadrat mit 1 m Seitenlänge schraffiert worden, auf dem der Ofen sich erheben soll. Rechts sucht man das entsprechende Quadrat auf und errichtet in dessen Eckpunkten Lote. Der Ofen sei 2 m hoch; dann kann man an der Wandfläche die Höhe sogleich ablesen. Die übrigen Kanten wird ein jeder selbst einzeichnen können, denn ein selbständiges Nachzeichnen der wichtigsten Figuren ist zum vollen Verständnis unbedingt erforderlich.

Man mache sich einmal deutlich klar, wie gleichlange Strecken um so kleiner im Bilde sind, je weiter sie vom Beschauer entfernt liegen. Das gilt sowohl für horizontale als auch für vertikale, also auch für beliebig schräge Strecken. Bekannt genug ist ja diese Erscheinung: man denke nur daran, wie ein heranbrausender Eisenbahnzug größer und größer zu werden scheint. Beim Einzeichnen von Gegenständen in eine Landschaft hat man z. B. wohl auf die Größenverhältnisse zu achten. Da mögen sich in einem ebenen Gelände zwei Menschen gleicher Größe in verschiedenen Entfernungen auf dem Bilde befinden. Verbindet man deren Füße und Scheitel durch je eine Gerade miteinander, so müssen sich diese beiden Geraden im Horizont schneiden.

Noch eine Erweiterung soll hinzugefügt werden: die Seiten des Quadratnetzes lagen zu g parallel und senkrecht; jetzt sollen sie eine beliebige schiefe Lage haben wie in Fig. 86. Die Bilder von a_0 und b_0 sind bald gefunden. Man klappt den Augenpunkt A_0 in die Bildebene herunter nach A und zieht durch A Parallelen zu a_0 und b_0, die h in den Fluchtpunkten F_1 und F_2 von a_0 und b_0 schneiden. Ist nun P das Bild des Punktes P_0, so hat man nur noch PF_1 und PF_2 zu ziehen. Jetzt aber kommt es darauf an, die Quadratteilung in richtiger Weise zu übertragen. Dazu bedarf es einer Zwischenbemerkung über den sogenannten Teilungspunkt einer Geraden.

Fig. 85.



Da ist in Fig. 85 eine Gerade l_0 gezeichnet mit ihrem Bilde l. Auf l_0 werde die Strecke $a = P_0 Q_0$ abgetragen. Das Bild von a wird gesucht. Dazu mache man $P_0 R_0 = a$ — man trägt also die Strecke a auf g ab, wo sie ja auch im Bilde ihre wahre Länge behält — und zeichnet das Bild von $Q_0 R_0$, indem man $A_0 T // Q_0 R_0$ zieht und R_0 mit T verbindet. Jetzt beachte man, daß $\triangle\ P_0 Q_0 R_0$ gleichschenklig ist. Folglich ist ebenso $\triangle\ A_0 F T$ gleichschenklig und $A_0 F = FT$. Der so gefundene Punkt T heißt der **Teilungspunkt** von l.

Zurück zu Fig. 86. Es gilt jetzt, die Teilungspunkte der Geraden PF_1 und PF_2 einzutragen, d. h. man macht $F_2 T_2 = F_2 A$ und $F_1 T_1 = F_1 A$, dann sind T_1 und T_2 die gesuchten Teilungspunkte. Weiter trägt man von P aus auf g nach beiden Seiten die wahre Länge der Quadratseite (also hier 5 mm beim Maßstab 1 : 100) ab. Die Teilpunkte verbindet man mit T_1 bzw. T_2; dadurch wird die Teilung auf a und b perspektivisch übertragen. Zum Schluß müssen noch die Teilpunkte von a und b mit den Fluchtpunkten F_1 und F_2 verbunden werden, um das Quadratnetz zu erhalten. Um auch die Übertragung in der Höhe zu zeigen, ist eine sieben Meter hohe Säule eingezeichnet. Zuerst errichtet man in P auf g das Lot, auf dem die Meterteilung in wahrer Größe (mit Berücksichtigung des Maßstabes 1 : 100) abgetragen wird. Diese

Teilung überträgt man z. B. zunächst auf die Lote in den einzelnen Punkten von a und von da aus auf die Säulenkanten. Die Einzelheiten wird man beim Nachzeichnen leicht selbst finden oder aus der Fig. 86 erkennen können.

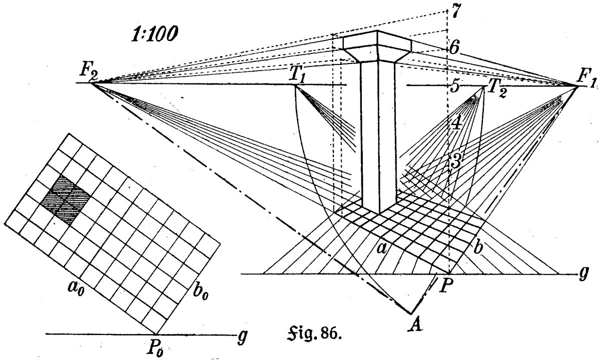


Fig. 86.

b) Das zweite Verfahren benutzt Grund- und Aufriß des Gegenstandes, ohne daß Maße bekannt zu sein brauchen.

In Fig. 87 ist eine Gerade a_0 in der Grundebene gezeichnet. A_0 ist der Augenpunkt und $A_0F \parallel a_0$ liefert den Fluchtpunkt F der Geraden.

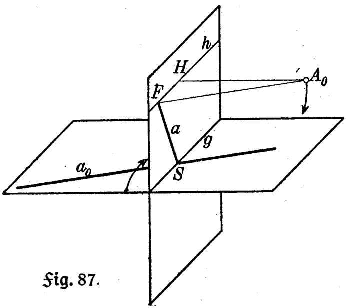


Fig. 87.

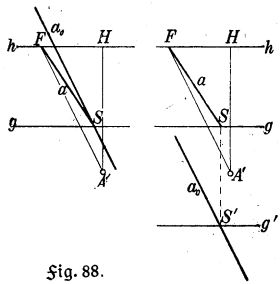


Fig. 88.

Die Grundlinie g möge von a_0 in S, dem Spurpunkt der Geraden, geschnitten werden, dann ist $a = SF$ der Zentralriß der Geraden a_0. H ist noch der Hauptpunkt und $h \parallel g$ der Horizont. Die Grundebene benutzt man von jetzt ab als Grundrißebene. Um alles in einer Ebene zeichnen zu können, klappt man, wie die Pfeile andeuten, die Grundebene und den Augenpunkt in die vertikale Ebene hinein und zeichnet in dieser vertikalen Ebene. Fig. 88 zeigt das Bild, das dabei entstehen würde. Zuerst sind Zeichenebene, Grundebene und Augenpunkt durch g, h und A gegeben. Die zu zeichnende Gerade ist ebenfalls eindeutig durch den herumgeklappten Grundriß a_0 bestimmt. Also zieht man nur $AF // a_0$, um den Fluchtpunkt zu erhalten, und verbindet F mit dem Schnittpunkt S von a_0 und g. Man erkennt aber, wie störend es ist, daß der Grundriß in den Zentralriß hineinfällt. Nun braucht man vom Grundriß ja nur die Richtung der Geraden und den Spurpunkt S. Beides behält man bei, wenn man den Grundriß einfach ein beliebiges Stück parallel nach unten verschiebt, wie in Fig. 88 rechts. Heißt dann die verschobene Grundlinie g', so kommt nur hinzu, daß man den Schnittpunkt S' von a_0 und g' auf g herausloten muß, um S zu erhalten. Sonst bleibt alles ungeändert. Zur ersten Einübung sehr nützliche Aufgaben sind die Zeichnungen von Fußböden mit Parkett- oder Steinfliesen. In Fig. 89 ist ein solcher dargestellt. Wesentlich Neues kommt nicht hinzu, so daß sich ein jeder unter den gezeichneten Hilfslinien zurechtfinden wird.

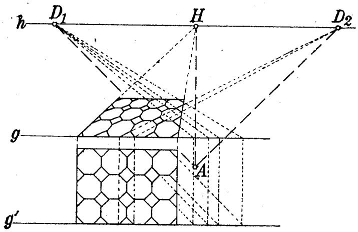


Fig. 89.

Weiter ist in Fig. 90 schematisch der Zentralriß eines Hauses gezeichnet. Um ein einfaches leicht zu übersehendes Beispiel zu haben, sind alle Einzelheiten fortgelassen. Diesmal sind alle Höhen durch den

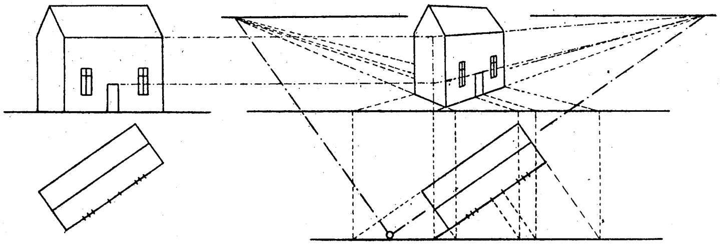


Fig 90.

Aufriß gegeben. Es ist angedeutet, wie diese Höhen nach rechts übertragen werden, um dann genau wie oben weiterzeichnen zu können. Bemerkt sei, daß nur einige Hilfslinien mit eingezeichnet sind.

Wollte man jetzt das Bild eines wirklichen Hauses aufzeichnen, so bliebe immer noch die Frage nach dem Maßstab zu beantworten. Als Abschluß für diese Nummer soll nun noch dieser praktisch wichtige Punkt

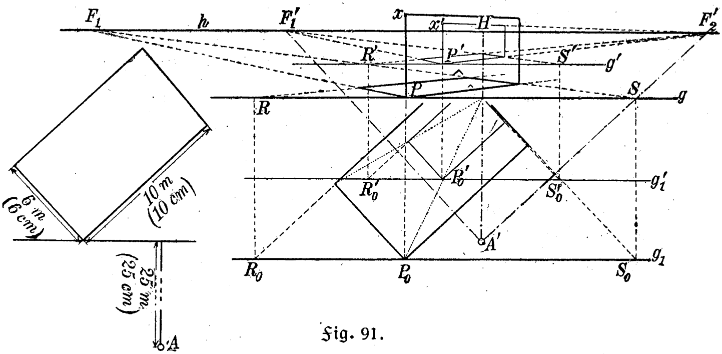


Fig. 91.

erledigt werden. In Fig. 91 sind in einer Skizze die wirklichen Maße eines kleinen Häuschens eingezeichnet. Man betrachtet es z. B. von einem Punkte, der 25 m entfernt und 4 m über dem Grundriß des Hauses liegt. Für das menschliche Auge ist die günstigste Entfernung zur Betrachtung eines kleinen Zeichenblattes 25 cm.[1]) Also hat man zur Zeichnung die Entfernung von 25 m auf 25 cm zu verkleinern, d. h. man zeichnet im Maßstab 1 : 100. In Klammern sind danach die Maße der Zeichnung beigefügt.

Aber noch eine weitere Schwierigkeit kann entstehen. Häufig wird das Zeichenblatt zu klein sein, als daß der Augenpunkt und alle nötigen Fluchtpunkte wirklich noch auf ihm liegen. Das Bild soll trotzdem entsprechend der oben gefundenen verkleinerten Größe gezeichnet werden. Man hilft sich, wie in der Fig. 91 angedeutet. Man wählt einen neuen Augenpunkt A', so daß z. B. $A'H = \frac{1}{2} d$ wird. Ebenso legt man eine neue Grundlinie g' im Abstande $\frac{1}{2}$ (g, h). In derselben Weise ist alles auf die Hälfte zu verkürzen. Also zunächst wird ein neuer Grundriß gezeichnet in halber Größe, aber auch um die Hälfte an $A'H$ herangerückt. Ebenso wird g_1' als neue Hilfsgrundlinie in die Mitte zwischen g_1 und g gelegt. So findet man die Spurpunkte S_0', R_0', P_0', die man auf g' herauflotet. Mit Hilfe von S', R', P' konstruiert man einen verkleinerten Zentralriß vom Grundriß des Hauses. Die Fluchtpunkte F_1', F_2' zu diesem liegen offenbar im halben Abstand zu H verglichen mit den wahren Fluchtpunkten F_1 und F_2 der Hauskanten.

1) Bei größeren Bildern gilt die Regel, daß man die Distanz $1\frac{1}{2}$ bis 2 mal so groß wählt, als die größere Seite des rechtwinkligen Bildes ist.

Weiter geht man von den wirklichen Spurpunkten S_0, R_0, P_0 aus, die man auf g herauflotet. Durch S, P, R zieht man Parallelen zu $S'F_1'$, $P'F_1'$, $P'F_2'$ und $R'F_2'$. Dadurch erhält man den wirklichen Zentralriß vom Grundriß des Hauses. F_1 ist zur Kontrolle mitgezeichnet; es muß $F_1H = 2F_1'H$ sein. (Man kann auch benutzen, daß z. B. $HS'S$, $HP'P$ usw. gerade Linien sind.)

Aber auch die vertikale Hauskante in P_0 erhält man in ähnlicher Weise. Man trägt wie früher in P' die halbe Höhe des Hauses $P'x'$, die man dem Aufriß entnimmt, ab, hier 2,5 m, x' wird mit F_2' verbunden und durch x, wo $Px = 5$ m ist, die Parallele zu $F_2'x'$ gezogen ($Hx'x$ ist ebenfalls eine Gerade). Die Bildkonstruktion wird ziemlich umständlich, dafür der Zentralriß um so naturgetreuer. Doch man muß selbst zeichnen und selbst üben, um einen klaren Einblick in alles Besprochene zu bekommen.

Erwähnt sei noch, daß es verschiedene Apparate zum perspektivischen Zeichnen gibt. Der beste ist wohl der Perspektograph von Hauck, der aus Grund- und Aufriß den Zentralriß zeichnet. Seine Theorie erfordert tiefere mathematische Kenntnisse.

8. Die Zentral-Kollineation. Die Ausführungen der Nr. 6 sollen hier noch eine kurze Ergänzung erhalten. Wenn man — anders als vorher — die Grundebene und den Augenpunkt herumklappt, wie in der Nebenskizze angedeutet, so erhält man Fig. 92. Darin erkennt man unmittelbar die folgenden Sätze, die zwischen dem herumgeklappten Grundriß und dem Zentralriß eine geometrische Verwandtschaft herstellen.

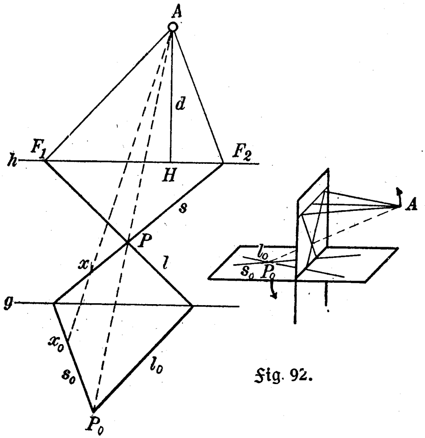


Fig. 92.

Einer geraden Linie (s_0, l_0) entspricht ebenfalls eine gerade Linie (s, l).

Dem Schnittpunkt (P_0) zweier Geraden (s_0, l_0) entspricht der Schnittpunkt (P) der beiden zugeordneten Geraden (s, l).

Entsprechende Geraden (s und s_0, l und l_0) schneiden sich auf einer festen geraden Linie (g), welche die Achse der Kollineation genannt wird.

Entsprechende Punkte (P, P_0) liegen auf geraden Linien, die durch einen festen Punkt (A) gehen, welcher das Zentrum der Kollineation genannt wird.

Diese Verwandtschaft heißt eine Zentral-Kollineation.[1]) Kennt man eine Reihe von Lehrsätzen über die Verwandtschaft, so kann man direkt danach konstruierend zahlreiche Aufgaben lösen, ohne die Anschauung weiter zu Hilfe zu nehmen. Nicht nur besonders schwierige Aufgaben werden dadurch lösbar, auch bei leichten erzielt man oft wesentliche Vereinfachungen. Soll z. B. der Punkt x_0 auf s_0 abgebildet werden, so braucht man nur x_0 mit A zu verbinden. Der Schnittpunkt von $A x_0$ mit s ist der gesuchte Punkt x. Natürlich handelt es sich hier nur um kurze Andeutungen. Um Nutzen daraus zu ziehen, ist ein weiteres Studium der projektiven Geometrie (auch synthetische Geometrie genannt) nötig, in der die erwähnten Lehrsätze abgeleitet werden.[2])

9. Die Photogrammetrie. Es wurde schon oben erwähnt, daß die photographischen Bilder Zentralrisse der Gegenstände sind. In der Tat ist der Mittelpunkt der Linse das Zentrum der Perspektive bzw. der Augenpunkt und die photographische Platte die Bildebene. Allerdings liegt zunächst die Bildebene nicht wie früher zwischen Augenpunkt und Gegenstand. Aber natürlich kann man die fertige Platte immer genau so weit vor dem Auge denken, wie sie vorher hinter dem Linsenmittelpunkt stand, und in genau symmetrischer Lage zum Mittelpunkt. Dann aber ist das Bild wie oben der Zentralriß des photographierten Gegenstandes. Diese Lage soll im folgenden stets angenommen werden.

Die Aufgabe der Photogrammetrie besteht darin, aus einer photographischen Aufnahme oder mehreren (oder auch aus sonstigen perspektivischen Bildern, also Gemälden und dgl.) Grund- und Aufriß eines Gegenstandes zu ermitteln oder eine kotierte Projektion herzustellen. Zuerst sei nur ein Zentralriß gegeben. Soll aus ihm der ur-

1) Die perspektivische Affinität ist hiervon ein Spezialfall, bei welchem das Zentrum im Unendlichen liegt, so daß entsprechende Punkte auf parallelen Geraden liegen. Anderseits liegt bei der Ähnlichkeit bei perspektivischer Lage die Achse im Unendlichen, und folglich werden entsprechende Geraden parallel.

2) Verwiesen sei z. B. auf das kleine Buch: M. Zacharias, Einführung in die projektive Geometrie (Teubners Mathematische Bibliothek Bd. 6), Leipzig 1916. Die Anwendungen der Lehrsätze findet man in den Büchern über die darstellende Geometrie.

sprüngliche Gegenstand wiederhergestellt werden, so müssen gewisse Beziehungen im Bilde bekannt sein, also etwa die wahre geometrische Gestalt von Figuren oder die wahren Abstände einiger Punkte usw. In einigen Beispielen soll die Aufgabe gelöst werden, ohne aber damit alle Lösungsmöglichkeiten darstellen zu wollen.

a) Man denke etwa an eine photographische Aufnahme eines Gebäudes, die von einem Reisenden aufgenommen wurde und nun in der Heimat verarbeitet werden soll. Die Aufgabe zerfällt in zwei Teile: zuerst müssen Augenpunkt, Hauptpunkt und Horizont gefunden werden; dann erst folgen Grund- und Aufriß. Dieser zweite Teil wird erst zum Schluß besprochen werden.

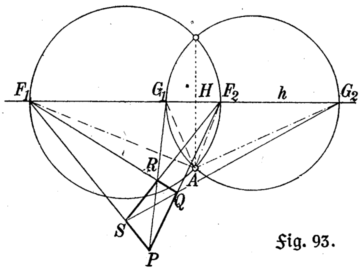


Fig. 93.

Leicht kommt man zum Ziel, wenn im Bilde irgendein Quadrat dargestellt ist, z. B. ein Turm mit quadratischem Querschnitt. In Fig. 93 sei PQRS das Bild eines Quadrates. Da die Gegenseiten eines Quadrates parallele Geraden sind, so schneiden sich im Bilde PQ mit RS und PS mit QR in zwei Fluchtpunkten F_1 und F_2, die auf dem Horizont h liegen. Also ist h gefunden, wenn man F_1 mit F_2 verbindet. Im wahren Quadrat $P_0Q_0R_0S_0$ ist z. B. der Winkel bei P_0 ein Rechter; das ist jetzt zu benutzen. Wie früher gezeigt, erhält man im Raum die Fluchtpunkte, wenn man durch den räumlichen Augenpunkt A_0 Parallelen zu den wahren Geraden zieht. Also hat man durch den noch unbekannten Punkt A_0 die Geraden A_0F_1 und A_0F_2 zu ziehen. Da diese aber parallel zu Quadratseiten sind, so müssen sie einen rechten Winkel bei A_0 einschließen. Dasselbe gilt nach der Umklappung vom Winkel F_1AF_2. Nach einem bekannten Satze der Geometrie liegen aber die Scheitelpunkte aller rechten Winkel, deren Schenkel durch F_1 und F_2 gehen, auf einem Kreise, dessen Durchmesser F_1F_2 ist. Zeichnet man diesen Kreis, so muß auf ihm A liegen. Aber an welcher Stelle? Nun, noch ist ja nicht benutzt, daß PQRS ein Quadrat darstellt. Im Quadrat stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Folglich ist auch der von PR und SQ eingeschlossene Winkel das Bild eines Rechten. Daher muß, genau wie vorher, A auf einem Kreise liegen mit dem Durchmesser G_1G_2, wenn diese Punkte die Fluchtpunkte von PR und QS sind. Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten, die aber symmetrisch zu h liegen. Je nachdem man nach oben oder unten herumklappt, wählt man einen davon als Augenpunkt A. Der Hauptpunkt H ist der Lotfußpunkt der Senkrechten von A auf h.

Anmerkung. Die Konstruktion kann einfacher, wie folgt, durchgeführt werden. Das ist wichtig, weil selten alle Fluchtpunkte zugänglich sein werden.

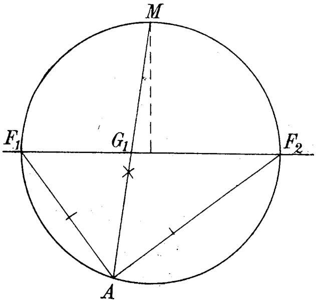


Fig. 94.

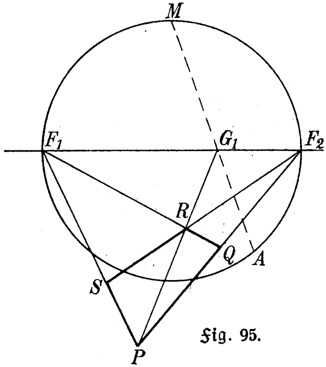


Fig. 95.

In Fig. 94 sei A bereits gefunden; AF_1 und AF_2 sind also die Richtungen der Quadratseiten. Nun halbieren die Diagonalen im Quadrat die Viereckswinkel. Zieht man daher AG_1 wie oben, so ist $\sphericalangle F_1AG_1 = \sphericalangle F_2AG_1$. Verlängert man AG_1 bis M, so werden MAF_1 und MAF_2 zwei gleiche Umfangswinkel, und folglich sind nach bekannten geometrischen Sätzen die Bögen MF_1 und MF_2 einander gleich Danach findet man in Fig 95 den Punkt A jetzt so, daß man wie früher über F_1F_2 als Durchmesser den Kreis beschreibt, die Gerade PRG_1 zieht, dann aber G_1 mit dem Mittelpunkt M des Halbkreises verbindet. Verlängert man MG_1, so schneidet diese Gerade den Kreis zum zweiten Mal im gesuchten Punkt A.

b) Jetzt sei zwar kein Quadrat abgebildet, wohl aber ein Rechteck. Das würde allein nicht genügen; deshalb habe der Photograph die Seiten des Rechtecks abgeschritten und das Längenverhältnis 1 : 5 festgestellt. Also sei in Fig. 96 das Verhältnis der wahren Längen $S_0P_0 : P_0Q = 1:5$, wenn eben PQRS das Bild jenes Rechtecks ist. Die Lösung der Aufgabe sucht man so, daß man sich ein Quadrat herstellt, indem man P_0Q_0 in 5 gleiche Stücke geteilt denkt. Diese Teilung kann sofort an PQ selbst vorgenommen werden. Man teilt ge-

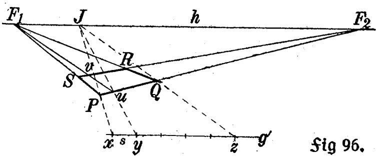


Fig 96.

nau wie in Fig. 4; nur hat man zu bedenken, daß die Parallelen durch eine Schar von Geraden mit gemeinsamem Fluchtpunkt zu ersetzen sind. Nachdem also h mit Hilfe von F_1 und F_2 gefunden ist, zieht man irgendeine Parallele g_0' zu h. Auf dem Bilde dieser Geraden bleiben gleiche Strecken einander gleich, wo sie auch sonst liegen mögen. Man nimmt deshalb das Bild g' irgendwo parallel zu h an (am bequemsten, aber weniger übersichtlich durch P hindurchgehend). Man wählt einen Anfangspunkt x, verbindet ihn mit P und findet dadurch den Fluchtpunkt J. J verbindet man weiter mit Q und verlängert bis z. Die Strecke xz teilt man in fünf gleiche Stücke s. Zieht man endlich noch Jy, so ist $u_0P_0 = S_0P_0$, also SPuv das Bild eines Quadrates, mit dem man weiter konstruiert wie oben.

c) Bei photographischen Aufnahmen wird in den meisten Fällen die Länge der Strecke AH, also die Distanz bekannt sein, da sie gleich der sogenannten Brennweite des Apparates ist, wenn die Aufnahme wie fast immer aus größerer Entfernung hergestellt ist. In diesem Falle braucht man nur den Halbkreis über F_1F_2 zu kennen, also das Bild eines Rechtecks. In diesem Halbkreis hat man einen Punkt einzuzeichnen, der den gegebenen Abstand AH=d von h hat. Es gibt zwar zwei solcher Punkte; man wird aber leicht feststellen können, von welchem dieser Punkte aus das Bild allein aufgenommen sein kann.

d) Nun bleibt noch die Aufgabe: Grund- und Aufriß zu konstruieren. Aber da genügen wenige Worte. Die Konstruktion, die z. B. zur Fig. 90 geführt hatte, braucht man nur rückwärts durchzuführen, um zum Zentralriß umgekehrt Grund- und Aufriß zu finden. Und ebenso in jedem andern Falle. Die Grundlinie g kann man dabei zunächst beliebig annehmen. Allerdings weiß man so noch nichts über die wahre Größe des Hauses. Kennt man aber nur die wahre Länge irgendeiner Strecke (man photographiert eine Meßlatte mit, bestimmt eine Länge durch Abmessen oder photographiert wenigstens eine Person mit, deren Größe bekannt ist), so kann man daraus den Verkleinerungsmaßstab berechnen, in dem Grund- und Aufriß gezeichnet sind. (Übrigens kann man leicht, die Zentralkollineation benutzend, eine Länge im Grundriß in vorgeschriebenem Maße zeichnen und daraus die Lage von g ermitteln).

e) Wesentlich schwieriger liegen die Verhältnisse, wenn es sich um Flieger- oder Ballonaufnahmen und dergl. handelt. Einige Andeutungen über die Auswertungen solcher mögen genügen. Vom Apparat weiß man, welche Brennweite er besitzt, und welche Neigungen er bei der Aufnahme zur Erdoberfläche hatte. Die Winkelmessungen sind durch geeignete Vorrichtungen ermöglicht. Eine Aufnahme von einem völlig unbekannten Gelände läßt sich allein nicht weiter verwerten. Es muß von mindestens drei Punkten der Platte bekannt sein, zu welchen Punkten der geographischen Karte sie gehören. Dann aber ist es in der Tat möglich, konstruktiv zu ermitteln von jedem beliebigen Punkt des photographischen Bildes, zu welchem Punkte der Karte er gehört. Entdeckt man also z. B. auf der Platte eine feindliche Batterie, so kann man durch Zeichnung auch ihre Lage auf der Karte und damit im Raume finden.

Gewöhnlich zieht man es vor, eine neue Photographie im Maßstabe der vorliegenden Karte herzustellen. Das macht man im wesentlichen so, daß man die Platte zu der neuen Bildfläche in genau dieselbe Lage bringt, die sie bei der Aufnahme zur Erdoberfläche hatte. Es gelingt mit Hilfe der oben erwähnten bekannten Winkel und der drei bekannten Punktepaare. In dieser Stellung wirft man ein Bild der Platte auf die Wand, photographiert es und kann nun unmittelbar die Karte mit dem neuen Bilde vergleichen. Vereinfacht wird die Aufgabe, wenn die Höhe des Apparats über der Erdoberfläche bei der Aufnahme bekannt ist. Hierfür genügt in den meisten Fällen eine barometrische Höhenmessung. Dann kann man direkt mit Hilfe geeigneter Projektionsapparate ein Bild des Geländes in vorgeschriebener Kartenverkleinerung herstellen.

f) Mathematisch viel einfacher ist es, statt nur eine zwei photographische Aufnahmen, die an verschiedenen Stellen aufgenommen sind, zu benutzen. Es muß auch hier genügen, den einfachsten Fall zu besprechen.[1]) Irgendeine horizontale Strecke, die Standlinie a wird genau ausgemessen. An den Endpunkten dieser Strecke werden zwei gleichartige photographische Apparate aufgestellt und so ausgerichtet, daß ihre Platten in einer Ebene liegen, die noch senkrecht zum Erdboden stehen möge. Von einem beliebigen Punkte P erhält man auf diese Weise zwei Bildpunkte P_1 und P_2. Diesmal kennt man, nicht nur die Brennweite der Apparate; es sind im Apparat Marken angebracht, die mitabgebildet werden, deren Verbindungslinien sofort Horizont und Hauptpunkt liefern. In Fig. 97 ist schematisch angedeutet,

1) Eingehendere Behandlung z. B. bei Lüscher, Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie (ANuG Bd. 610).

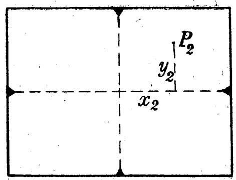


Fig. 97.

wie eine solche Platte aussieht. Die Verbindungslinien der Marken benutzt man als Achsen und mißt die Lage der Punkte P_1 und P_2 aus, indem man die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 ermittelt. Wie schon früher angedeutet, denkt man wieder die Platten vor die Linse symmetrisch zum Linsenmittelpunkt gestellt; dann gibt Fig. 98 die gesamte Versuchsanordnung von oben gesehen. Gegeben sind jetzt: Standlinie a, Brennweite f, Koordinaten von P_1 und P_2. Gesucht ist die Entfernung e, außerdem x' oder x''. Aus der Figur liest man sofort ab:

(1) $x' = \frac{e x_1}{f}$, $x'' = -\frac{e x_2}{f}$, wenn man beachtet, daß ja x_2 nach links liegt, also negativ ist.

$$x' + x'' = a = \frac{e(x_1 - x_2)}{f}.$$

(2) $$e = \frac{af}{x_1 - x_2}.$$

Zuerst ist (2), dann (1) zu berechnen.

Die Höhe y über dem Boden ist offenbar

(3) $$y = y_1 \frac{e}{f} = y_2 \frac{e}{f}.$$

Angenommen ist, daß die Apparate gleich hoch stehen, daß also $y_1 = y_2$ ist. Sonst müßte man noch den Höhenunterschied berücksichtigen.

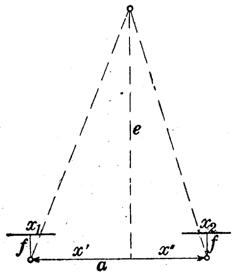


Fig. 98.

g) Besonders geeignet ist die Ausmessung der Platten auf stereoskopischem Wege mit Hilfe des Stereokomparators. Einige Bemerkungen müssen hier eingeschaltet werden. In Fig. 99 seien P_1 und P_2 zwei Platten, die in einem Stereoskop mit den Augen A_1 und A_2 betrachtet werden. Links mag genau in der Mitte ein Punkt x_1 liegen. Das linke Auge wird diesen Punkt immer in Richtung A_1L_1 sehen. Rechts möge sich ein genau gleichartiger Punkt x_2 befinden. Läge er auch genau in der Mitte, so würde das rechte Auge den Punkt immer in Richtung A_2L_2 erblicken. Der Punkt erscheint aber im Raume dort, wo sich beide Strahlen A_1L_1 und A_2L_2 schneiden. Also würde hier das Bild des Punktes ja erst im Unendlichen liegen. Nun läßt sich die rechte Marke x_2 mit einer Schraubenvorrichtung nach links verschieben. L_2'

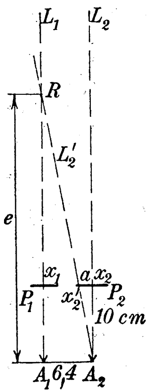


Fig. 99.

z. B. schneidet L_1, folglich würde jetzt das Auge das Bild der Marke in R sehen. Je weiter man x_2 nach links verschiebt, um so näher scheint R heranzurücken. Die Entfernung e, die R besitzt, kann man leicht berechnen, wenn man weiß, wie weit x_2 nach links verschoben wurde. Diese Entfernung a kann man an der Schraube ablesen. Der eingestellte Augenabstand sei $A_1 A_2 = 64$ mm und der Plattenabstand vom Auge 10 cm. Dann ist $e : 6{,}4 = 10 : a$, also $e = 64\,a$.

Eine solche Einrichtung besitzt der Stereokomparator zur Ausmessung der zwei photographischen Aufnahmen. Man legt die Platten wie bei einem Stereoskop ein, indem man sie zunächst genau ausrichtet, so daß die Hauptpunkte einander entsprechen. Dazu bringt man eine Marke obiger Art mit den Hauptpunkten zum Zusammenfallen. Weiter mißt man y_1, indem man die Marke links verschiebt, bis sie mit P_1 zusammenfällt und dann die Verschiebung abliest. Jetzt erst betrachtet man den Punkt P stereoskopisch mit beiden Augen. Er scheint im Raume zu schweben. Links war die Marke auf P_1 fest eingestellt. Rechts könnte man sie so lange verschieben, bis ihr stereoskopisches Bild mit dem Bilde des Punktes P zusammenfällt. Dann aber weiß man, daß P genau denselben Abstand besitzt, wie die Marke, deren Abstand ja aber abgelesen werden kann. Tatsächlich macht man es umgekehrt, indem man die Marke fest im Unendlichen stehen läßt, aber die rechte Platte verschiebt, bis das Bild des auszumessenden Punktes mit der Marke zusammenfällt. Auch so mißt man $x_1 - x_2$ und berechnet die gesuchte Entfernung e nach (2).

A n m e r k u n g. Die Messungen würden für die meisten Zwecke nicht genau genug, wenn man wirklich nur mit dem gewöhnlichen Augenabstand die Platten betrachtete. Durch Einschaltung von Prismen vergrößert man künstlich diesen Abstand. Es sei noch erwähnt, daß der s t e r e o s k o p i s c h e E n t f e r n u n g s m e s s e r genau nach dem obigen Prinzip gebaut wird. Er enthält in wachsender Entfernung eine Reihe von Marken angebracht, an die zur Bequemlichkeit sogleich die Entfernungen angeschrieben sind. Da man die Landschaft selbst betrachtet, also jeden Punkt an beliebiger Stelle des Entfernungsmessers erscheinen lassen kann, so können die Marken fest sein. Die neueren Entfernungsmesser sind nach einem ganz anderen Prinzip konstruiert.

Der Vorteil der stereoskopischen Ablesung beruht vor allem darauf, daß man beim körperlichen Sehen tatsächlich genau denselben räumlichen Punkt auf beiden Platten betrachtet und ausmißt. Wenn man jede Platte einzeln nachmißt, ist es häufig recht schwierig festzustellen, welche Punkte zusammengehören.

Den neuesten Fortschritt hat man mit dem S t e r e o a u t o g r a p h e n erzielt. Durch ihn werden in geeigneter Übertragung die Bewegungen der rechten Platte aufgezeichnet, so daß z. B. die Schichtenlinien von einer Gebirgsaufnahme unmittelbar gezeichnet werden, wenn man in gleicher Höhe bleibend den Gebirgsrand mit der Marke umfährt.

Die photographischen Verfahren besitzen für die Vermessungskunde die größten Vorzüge, wenn es sich um gebirgige Gegenden oder sehr weite Länderstrecken handelt, so daß sie weitverbreitete Verwendung finden. Andere Gebiete, die sich der Photogrammetrie bedienen, sind z. B. die Wetterkunde zur Messung von Wolkenhöhen, die Ballistik zur Bestimmung der Lage von Sprengpunkten usw. Die Bedeutung und Verbreitung der Photogrammetrie nimmt noch ständig zu.

III. Abschnitt.

Flächenmessung.

Geometrie heißt Erdmessung, wobei im Sinne der Alten zunächst nur an die Oberfläche der Erde gedacht ist. Wirklich hat der rein praktische Zweck der Erdmessung die erste Veranlassung zur Ausbildung der Geometrie gegeben.

Die jährlich wiederkehrenden Überschwemmungen des Niltales im alten Ägypten vernichteten häufig die Grenzzeichen, durch welche die Besitzungen voneinander geschieden wurden. Um in jedem neuen Jahre eines jeden Eigentum wieder abstecken zu können, mußte man geometrische Methoden der Feldmessung ersinnen. Die Methoden, deren sich heute die Feldmeßkunst bedient, sind andere geworden; aber das Problem der Flächenmessung hat seine alte Bedeutung nicht verloren. Nur ist heute eine gewaltige Fülle von Aufgaben, die alle Methoden zur Flächenmessung verlangen, hinzugekommen, Aufgaben, die gerade im praktischen Leben auftreten.

1. Über Längen- und Flächenmaße. Zum Nachmessen bedarf man vor allem eines festen Maßstabes. Zuerst verstand man wohl die Zeit zu bestimmen, so daß Tage, Monate und Jahre die ältesten Maße sein dürften. Die Ausbildung der weiteren Maßsysteme knüpft an die Zahl 60 an. Dabei hat vielleicht die praktische Frage nach der Festlegung einer bestimmten Richtung eine Rolle gespielt. Es scheint, als sei man vom gleichseitigen Dreieck, das sich ja jederzeit aus drei gleich langen Stäben bequem herstellen läßt, ausgegangen. Die Winkel dieses Dreiecks lassen sich gerade sechsmal um einen Punkt herum zusammenlegen.

Die so auftretende Sechsteilung hätte mit der sicher bereits vorhandenen Zehnerteilung (man denke nur an das beim Zählen bequemste Hilfsmittel: an unsere zehn Finger) zusammen zu einer Bevorzugung der Sechzig geführt, so daß die weitere Unterteilung, um zu kleineren Stücken zu gelangen, in 60 Teile ausgeführt wurde. Die 60 Minuten einer Stunde und die 60 Sekunden einer Minute sind noch Zeugen jener alten babylonischen Vergangenheit. Gewiß war 60 sehr geschickt gewählt. Man bedenke nur, welche Zahlen alle in 60 teilbar sind!

Auch die ältesten Meßinstrumente dürften zur Zeitbestimmung gedient haben. Man kannte Sonnen-, Wasser- und Sanduhren. Anschließend daran hätte man die bei Gefäßen bestimmter Form verwendete Sandmenge als Gewichts- und die Kante des Gefäßes als Längeneinheit gewählt. Dieses erste grundlegende Längenmaß war wohl die Elle der Babylonier.

Das Ende des 16. Jahrhunderts brachte einen wichtigen Wechsel: es wurden die Dezimalzahlen erfunden. Mit diesen trat die 10 in ihre uralten Rechte wieder ein an die Stelle der 60. Wenn auch sofort darauf hingewiesen wurde, daß gleichwie im Zahlensystem auch im Maßsystem die Teilung in sechs und drei Unterteile, die sich allmählich eingebürgert hatte, durch die Teilung in Zehntel ersetzt werden müsse, so sollten doch noch zwei Jahrhunderte vergehen, ehe jene immer wiederholte Forderung verwirklicht wurde. Erst die so vieles Alte vernichtende französische Revolution beseitigte am Ende des 18. Jahrhunderts das alte Maßsystem und setzte an seine Stelle als Grundmaß das Meter, damals bestimmt als der zehnmillionste Teil eines Erdquadranten. Nach abermals fast 100 Jahren folgten die meisten übrigen Länder Europas nach, so Deutschland im Jahre 1872. Nur England, die englisch sprechenden Länder und Rußland haben sich bis heute ausgeschlossen; in jenen ist die Verwendung des Metermaßes wenigstens gesetzlich erlaubt.

Doch die alte Messung des Meters hatte sich nicht als genau richtig erwiesen. Ja, Neumessungen, die vermutlich immer besser würden, müßten jedesmal zu einer neuen Festlegung des Meters führen. Um dem zu entgehen, hat man sich entschlossen, das in Paris aus dem sehr kostbaren und haltbaren Metall Platin hergestellte ursprüngliche Metermaß ein für allemal als maßgebend anzuerkennen. Nach diesem ist für jedes Land ein Normalmaßstab angefertigt worden, der aus einer noch dauerhafteren Legierung von Platin mit Iridium besteht. So lautet denn heute die Antwort auf die Frage: was ist ein Meter? in Deutschland einfach so:

Ein Meter ist die Länge des von der Normal-Eichungskommission in Berlin aufbewahrten Normal-Meterstabes.

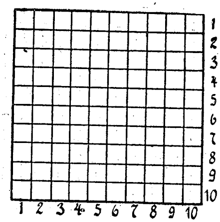


Fig 100.

Wie schon erwähnt, haben sich Reste der alten Teilungen noch in unsere Zeit hinübergerettet. Mathematisch am fühlbarsten ist die Teilung des Kreises in 360 Grade und die weitere Unterteilung in Minuten und Sekunden.[1]) Es wäre sehr zu wünschen, daß bald diese und auch einige andere Reste verschwinden. Vor allem ist aber der Ausschluß der obengenannten Länder bedauerlich.

Heute also gilt für uns das Meter, abgekürzt m, mit seinen 10 dm (Dezimetern), 100 cm (Zentimetern) und 1000 mm (Millimetern). Die übrigen Maße werden aus ihm abgeleitet. Zunächst die Flächenmaße. Zu dem Zwecke zeichnet man ein Quadrat, dessen Seiten je ein Meter lang sind. Diese Fläche heißt ein Quadratmeter, abgekürzt 1 qm. Teilt man jede Seite des Quadratmeters in zehn gleiche Abschnitte und zieht, wie in Fig. 100, Parallelen zu den Seiten, so wird das ganze Quadrat, wovon man sich durch Abzählen unmittelbar überzeugen kann, in 100 gleiche Teile zerlegt. Die neuen kleinen Quadrate haben als Seite ein Dezimeter und heißen deshalb Quadratdezimeter (qdm). Also hat ein Quadratmeter 100 Quadratdezimeter. Ebenso läßt sich ein Quadratdezimeter in 100 Quadratzentimeter (100 qcm) und ein Quadratzentimeter in 100 Quadratmillimeter (100 qmm) zerteilen.

Ganz allgemein kann man sagen: zerlegt man jede Quadratseite in drei Teile und zieht Parallelen zu den Seiten, so erhält man 3×3, also 9 neue Quadrate; zerlegt man in 7 Teile, so erhält man 7×7, also 49 neue Quadrate usw.

2. Der Begriff der Flächenmessung. Den Inhalt einer beliebigen Fläche ausmessen, heißt angeben, wie viele Quadrate von der gewählten Einheit in die Fläche hineingelegt werden können.

In Fig. 101 ist irgendeine Fläche auf quadratisch geteiltes Papier

1) Die Zeichen für Grade °, Minuten ′ und Sekunden ″ sind nichts anderes als 0, I und II; sie bedeuten das 0.te, das I.te und das II.te Sechzigstel Man schritt eben immer um den sechzigsten Teil fort, die Zahlen einfach nebeneinander schreibend, genau wie heute bei den Dezimalzahlen die folgende Zahl die Zehntel der vorhergehenden bedeutet.

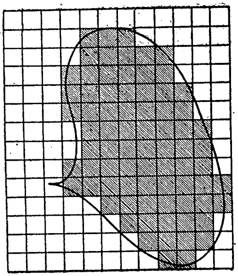


Fig 101.

gezeichnet. Zählt man nach, wie viele Quadrate in der Fläche liegen, und nimmt dabei die zum größeren Teile bedeckten Quadrate ganz, die zum kleineren Teile bedeckten dagegen gar nicht mit, so wird man in guter Annäherung den Inhalt der Fläche erhalten. Die schraffierten Quadrate ergeben zusammen 77 qcm, wenn in der nicht verkleinerten Zeichnung die Quadratseite 1 cm lang war.

Vollständig ließ sich aber die Fläche nicht mit Quadraten bedecken; ja, das gelingt genau nur in wenigen Fällen. Bei manchen geometrischen Figuren läßt sich wenigstens noch mit Zirkel und Lineal die Verwandlung ausführen in solche, die genau mit Quadraten bedeckt werden können. In allen diesen Fällen sagt man: die Quadratur, d. h. also das Bedecken mit Quadraten der Figur selbst oder einer genau gleich großen, aber wirklich gezeichneten, ist ausführbar. Meist muß man sich mit Annäherungen begnügen. Es sei aber ausdrücklich schon hier bemerkt, daß die ganze Frage praktisch ohne Bedeutung ist. Denn einerseits ist eine wirkliche Ausmessung immer nur mit gewisser Annäherung ausführbar; anderseits gibt es für jede irgendwie begrenzte Figur immer Mittel und Wege, um ihre Fläche, so genau es die Praxis verlangt, zu ermitteln.

3. Die geradlinig begrenzten Flächen. Wenn die Quadratur ausführbar ist, so pflegt die rechnerische Ermittlung des Flächeninhalts verhältnismäßig recht einfach zu sein. In Fig. 102 ist ein Rechteck gezeichnet. Hat man auf der einen Seite 9 cm, auf der anderen 12 cm gemessen, so kann man genau, wie oben beim Quadrat, das Rechteck in $9 \times 12 = 108$ Quadratzentimeter zerlegen. Also ist der Inhalt des Rechtecks 108 qcm. Meist wird freilich die Messung der Seiten nicht so einfache Ergebnisse liefern, wie oben. Auf der genauesten Zeichnung kann man mit bloßem Auge noch $\frac{1}{10}$ mm ablesen. Ist das Rechteck der Fig. 103 so genau gezeichnet gewesen, so wird man ablesen können 9,76 cm und 12,59 cm. Jetzt bedeckt man die Fläche mit Quadraten, indem man nach jedem $\frac{1}{10}$ mm Parallelen zieht. Wie oben gezeigt wurde, ist dann das Flächenmaß $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ qmm. Da man sich

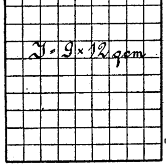


Fig. 102.

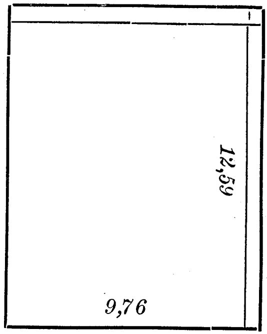


Fig. 103.

976 × 1259 Quadrate gezeichnet denkt, so ist der Flächeninhalt

976 × 1259 × $\frac{1}{10}$ × $\frac{1}{10}$ qmm oder

97,6 × 125,9 qmm oder auch

9,76 × 12,59 qcm.

Rechnet man nach dem gewöhnlichen Multiplikationsverfahren den Flächeninhalt genau aus, so gibt man viel zu genaue Ergebnisse an. Nach der Messung weiß man doch nur, daß die Grundseite z. B. sicher größer als 9,75 cm und kleiner als 9,77 cm ist. Entsprechend ist die andere Seite sicher größer als 12,58 cm und kleiner als 12,60 cm. Danach läßt sich über den ganzen Inhalt nur sagen, daß er sicher

größer als 9,75 × 12,58 qcm

und kleiner als 9,77 × 12,60 qcm

ist. D. h. es kann ein schmaler Streifen, wie in Fig. 103 angedeutet, sowohl hinzukommen als auch zuviel gemessen sein. Im 2. Abschnitt des 1. Bandes ist gezeigt worden, wie sachgemäß zu rechnen ist.

Zusammenfassend ergibt sich: den Inhalt eines Rechtecks berechnet man, indem man die Maßzahlen der Seiten miteinander multipliziert. Die Benennung ist gleich der Quadrateinheit, die der gewählten Längeneinheit entspricht.

In allgemeinen algebraischen Formeln hat man zu schreiben

$$J = a \cdot b,$$

wenn a und b die Maßzahlen der Seiten, beide in derselben Längeneinheit gemessen, bedeuten.

Unmittelbar wie das Rechteck läßt sich das Parallelogramm, ein Viereck mit parallelen Gegenseiten, berechnen. Fig. 104 zeigt, wie man aus dem Parallelogramm ein Rechteck macht, indem man das Dreieck 1 links abschneidet und dafür rechts als Dreieck 2 wieder anlegt. Die Grundlinien des Rechtecks und des Parallelogramms sind gleich lang; dagegen führt die zweite Rechtecksseite im Parallelogramm den Namen Höhe. Danach erhält man den Inhalt des Parallelogramms, wenn man die Maßzahlen von Grundlinie und

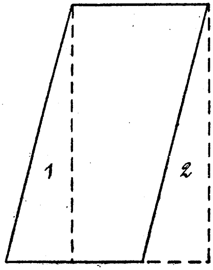


Fig. 104.

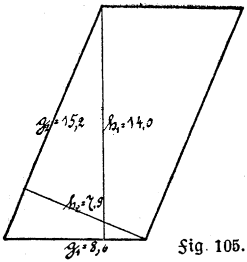


Fig. 105.

Höhe miteinander multipliziert. Also ist $J = g \cdot h$, wenn g die Maßzahl der Grundlinie und h die der Höhe bedeuten.

Welche Seite aber soll man denn Grundlinie nennen? Hält man das Buch senkrecht vor sich, so ist nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch in Fig. 105 die Seite $g_1 = 8{,}6$ cm die Grundseite, denn sie befindet sich eben unten. Dreht man dagegen das Buch seitlich herum, so kann man erreichen, daß sich jetzt $g_2 = 15{,}2$ cm unten befindet, also als Grundlinie zu bezeichnen ist. Mit anderen Worten kann man jede Seite als Grundlinie wählen, muß dann aber, um den Inhalt zu erhalten, mit der Maßzahl der zugehörigen Höhe multiplizieren. In der Fig. 105 ist deshalb der Inhalt des Parallelogramms

$$J = 8{,}6 \times 14{,}0 = 15{,}2 \times 7{,}9 = 120 \text{ qcm}.$$

In Formeln ausgedrückt:

$$J = g_1 \cdot h_1 = g_2 \cdot h_2.$$

Wieder ist angenommen, daß ein Zentimeter die Maßeinheit der ursprünglichen Figur war. In einem anderen Falle könnte auch ein Dezimeter oder ein Meter usw. gewählt sein. Nur, und das ist sehr wichtig, alle Längen müssen mit demselben Einheitsmaße gemessen werden. Sonst würde man ja bei der Zerlegung auch gar nicht Quadrate bekommen. Man darf also niemals eine Seite gemessen in Dezimetern und die andere gemessen in Millimetern miteinander multiplizieren. Wie sollte da wohl auch die Benennung lauten?

Die Berechnung von Rechteck, Parallelogramm usw. kann noch in ganz anderer Weise betrachtet werden. Ein Rechteck denkt man so entstanden, daß die Grundlinie in Fig. 102 von 9 cm parallel mit sich um 12 cm senkrecht nach oben geschoben wird. Die überstrichene Fläche ist dann offenbar gleich der Länge der erzeugenden Geraden multipliziert mit dem zurückgelegten Weg. Denn bei jeder Verschiebung um 1 cm entsteht eine Schicht von 9 qcm. Man muß aber senkrecht nach oben verschieben, damit wirklich Quadrate entstehen!

Das Parallelogramm in Fig. 106 denke man entstanden, indem man die Grundlinie g parallel mit sich schräg aufwärts schiebt. Damit die Inhaltsberechnung nach der vorigen Betrachtung möglich ist, muß die Verschiebung stufenweise ausgeführt werden, indem man zunächst senk-

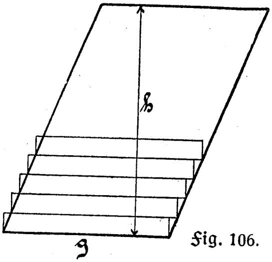


Fig. 106.

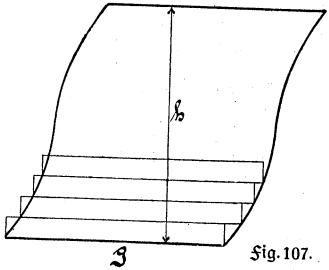


Fig. 107.

recht nach oben und dann seitlich verschiebt. Zur Fläche kommt immer nur etwas hinzu bei der Verschiebung senkrecht aufwärts. Deshalb ist auch hier der Inhalt gleich dem Produkt aus der erzeugenden Geraden und dem in senkrechter Richtung zurückgelegten Weg. Ja, diese Beziehung gilt überhaupt, wenn man eine gerade Linie parallel mit sich in irgendwelcher Richtung verschiebt. In Fig. 107 ist auch dafür noch ein Beispiel angedeutet. Natürlich braucht die Messung der erzeugenden Geraden nicht ganze Zentimeter zu ergeben, da ebensogut z. B. immer um 1 Millimeter aufwärts verschoben werden kann, wenn die Länge in Millimetern gemessen war. Die Schichten bestehen dann eben aus Quadratmillimetern usw.

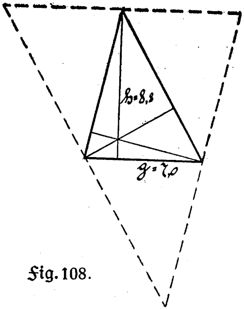


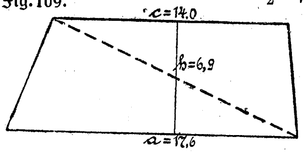
Fig. 108.

Ein Dreieck ist immer die Hälfte eines Parallelogramms. Ja, die Ergänzung zum Parallelogramm ist sogar in dreifacher Weise möglich, da das Dreieck, nach dem oben Gesagten, drei Grundlinien und drei Höhen hat. In Fig. 108 sind alle drei Ergänzungen mitgezeichnet. Den Inhalt berechnet man genau wie beim Parallelogramm, nur muß noch durch 2 dividiert werden, um die Hälfte zu erhalten. In Formeln heißt dies, es ist $J = \frac{1}{2} g \cdot h$.

Das oben gezeichnete Dreieck besitzt den Inhalt

$$J = \frac{1}{2}\, 7{,}0 \times 8{,}8 = 31 \text{ qcm}.$$

Fig. 109.



Wie das Parallelogramm hat auch das Trapez ein Paar paralleler Seiten, doch haben die beiden anderen Seiten eine beliebige Neigung gegen die Parallelen. In Fig. 109 ist ein Trapez gezeichnet und auch gleich in zwei Dreiecke zerlegt. Der Inhalt ist einfach gleich der Summe dieser beiden Dreiecke.

$$J = \frac{1}{2}\,17{,}6 \times 6{,}9 + \frac{1}{2}\,14{,}0 \times 6{,}9 = \frac{17{,}6 + 14{,}0}{2} \times 6{,}9 = 109 \text{ qcm}.$$

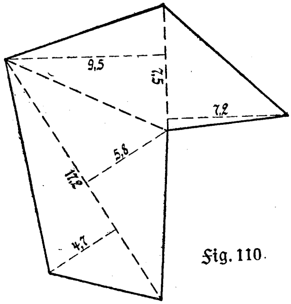


Fig. 110.

Hier multipliziert man also die halbe Summe der parallelen Seiten mit ihrem Abstand, in Formeln

$$J = \frac{a + c}{2} \cdot h.$$

Man beachte wohl, daß die parallelen Seiten zu nehmen sind; das andere Seitenpaar würde eine ganz andere Regel ergeben.

Hat man ein ganz beliebiges nur geradlinig begrenztes Vieleck, wie in Fig. 110, so zerlegt man es in Dreiecke, berechnet den Inhalt eines jeden Dreiecks und addiert die Einzelergebnisse. Diese Summe ist dann der gesuchte Inhalt des ganzen Vielecks. Durch geschickte Zerlegung und Ausmessung läßt sich manche Vereinfachung erzielen. So kann man hier z. B. wie folgt rechnen:

$$J = \frac{1}{2}\,7{,}5 \times 9{,}5 + \frac{1}{2}\,7{,}5 \times 7{,}2 + \frac{1}{2}\,17{,}2 \times 5{,}8 + \frac{1}{2}\,17{,}2 \times 4{,}7$$
$$= \frac{9{,}5 + 7{,}2}{2} \times 7{,}5 + \frac{5{,}8 + 4{,}7}{2} \times 17{,}2$$
$$= 153 \text{ qcm}.$$

Im ganzen erkennt man, daß die Quadratur, wie es oben genannt wurde, bei allen geradlinig begrenzten Flächen möglich ist.

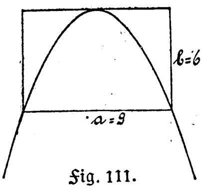


Fig. 111.

Ganz kurz sei erwähnt, daß krummlinig begrenzte Flächen, deren Quadratur möglich ist, verhältnismäßig nur selten sind. Am bekanntesten unter ihnen ist wohl die Parabel. Da ist jeder von einer Sehne begrenzte Abschnitt $^2/_3$ vom umschließenden Parallelogramm oder Rechteck. So liefert die Figur 111 das Ergebnis:

$$J = \frac{2}{3}\,9 \times 6 = 36 \text{ qcm},$$

oder in Formeln

$$J = \frac{2}{3}\,a \cdot b.$$

4. Der Kreis. Jahrhunderte hindurch ist es ein Lieblingsproblem der Mathematiker gewesen, die Quadratur des Kreises zu suchen. Heute weiß man, daß alles Mühen vergeblich bleiben mußte, weil eben die

Quadratur des Kreises unmöglich ist. Man kann den Kreis nicht, wie die oben genannten Figuren, mit Zirkel und Lineal in ein gleich großes Quadrat verwandeln. Freilich ist der Beweis dieser Unmöglichkeit für den Mathematiker schon schwierig, für den Laien gar nicht verständlich. Deshalb gibt es immer noch Laien, die nicht an ihn glauben wollen und munter weiter über die Quadratur des Kreises sich den Kopf zerbrechen. Ab und zu findet auch immer wieder einer von ihnen eine — natürlich falsche — Lösung des Problems, die er dann für teures Geld auf eigene Kosten drucken läßt, um zum Schluß ausgelacht zu werden. Es sind häufig nicht die schlechtesten Köpfe, die sich an diese Arbeit heranmachen. Schade um die Zeit, die sie darauf verwenden. Würde ihre Arbeitskraft auf vernünftige Fragen gelenkt, so könnte manch einer Tüchtiges leisten.

Ist der Radius eines Kreises z. B. 10 cm lang, so besitzt der Kreis den Inhalt $\quad J = \pi \times 10 \times 10 = 314$ qcm,
in Formeln $\quad J = \pi \cdot r^2.$
Jener griechische Buchstabe π (sprich pi) bedeutet nämlich eine eigenartige Zahl, die man auf beliebig viele Dezimalstellen genau (707 sind schon berechnet worden) angeben könnte, die aber deren unendlich viele besitzt. Es ist $\quad \pi = 3{,}1416$ oder annähernd $\pi = \frac{22}{7}$.

Um die ganze Fruchtlosigkeit der Bemühungen, die Quadratur des Kreises zu finden, noch besonders hervorzuheben, sei nur erwähnt, daß es näherungsweise sehr wohl gelingt, den Kreis in ein Rechteck und dann weiter in ein Quadrat zu verwandeln. Fig. 112 zeigt eine solche Lösung, die wohl nach der Figur selbst unmittelbar verständlich ist. Wie die Ausrechnung zeigt, erhält man hier statt 3,1416 die Zahl 3,1415. Danach ist der Fehler so klein, daß er auch bei der genauesten Zeichnung keine Rolle mehr spielt. Würde also die Quadratur selbst ausführbar sein (was, wie ausdrücklich nochmals betont sei, als unmöglich bewiesen ist), so könnte man doch nicht mehr erreichen, als mit jener Zeichnung schon jetzt erreicht ist. Vielleicht schreckt diese Erkenntnis manchen von weiteren Versuchen ab. Die Praxis

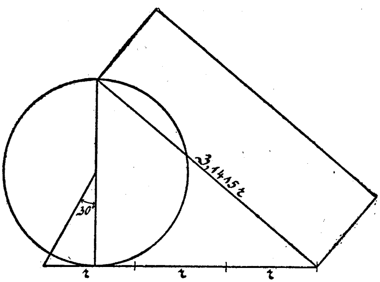


Fig. 112.

hat nicht einmal an solchen Näherungskonstruktionen erhebliches Interesse.

5. Über Projizieren und die Ausmessung der Ellipse. Mit Hilfe der senkrechten Parallelprojektion kann man ein Verfahren ableiten, das in manchen Fällen Inhalte leicht zu berechnen gestattet. Hierbei wird eine im Raume befindliche Figur auf das Zeichenblatt projiziert, indem man einfach die Figur Punkt für Punkt auf die ebene Zeichenfläche herunterlotet. Praktisch wird man natürlich nur die Begrenzungslinien zeichnen. Das tut z. B. die Sonne auf einer schrägen Wand, die gerade senkrecht zu ihren Strahlen steht. Hält man den Sonnenstrahlen ein Blatt Papier in den Weg, so ist der Schatten, den das Blatt auf jene Wand wirft, seine Projektion. Danach kann man sich sehr leicht die Projektion eines Gegenstandes zeichnen, gerade so wie man vor der Erfindung der Photographie die Schattenrisse von Personen herstellte. Wenn man insbesondere den Schatten von einem ebenen Blatt Papier betrachtet, so erkennt man, daß der Flächeninhalt der Projektion, also des Schattens, meist kleiner und höchstens, bei paralleler Lage, gleich der Größe des Papierblattes ist. Je mehr das Blatt aus der parallelen Lage herausgedreht wird, um so kleiner wird seine Projektion. Bei senkrechter Lage zur Wand schrumpft der Schatten zu einer geraden Linie zusammen.

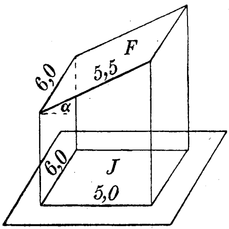


Fig. 113.

Jetzt nehme man ein rechteckiges Stück Papier und halte es, wie in Fig. 113, so, daß die eine Seite des Rechtecks ihrer Projektion parallel bleibt. Die andere 5,5 cm lange Seite wird verkürzt und schrumpft zur Länge 5,0 cm zusammen. Die Flächeninhalte F des ursprünglichen Rechtecks und J seines Schattens sind:

$$\mathrm{F} = 6 \times 5{,}5 \text{ qcm und } \mathrm{J} = 6 \times 5{,}0 \text{ qcm}.$$

Die geneigten Seiten sind im Verhältnis $\frac{5{,}0}{5{,}5} = \frac{10}{11}$ verkürzt, aber genau so auch die Inhalte, denn es ist ja

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{F}} = \frac{6 \times 5{,}0}{6 \times 5{,}5} = \frac{5{,}0}{5{,}5} = \frac{10}{11}.$$

Man beachte aber, daß zwei Rechtecksseiten parallel geblieben sind. Jedenfalls ist die Größe der Projektion

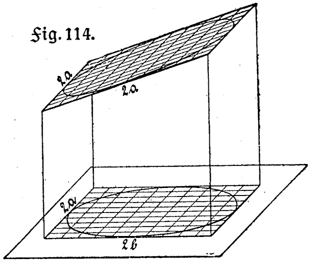
$$\mathrm{J} = \frac{10}{11}\,\mathrm{F}.$$

Mit Benutzung des Winkels α, unter dem das Rechteck gegen die Zeichenebene geneigt ist, lautet die Beziehung, da $\cos \alpha = \frac{5{,}0}{5{,}5}$ ist,

$$J = F \cdot \cos \alpha.$$

Eine Anwendung dieses Verfahrens führt zur Berechnung des Flächeninhalts von der Ellipse. Diesmal projiziert man wie in Fig. 114 einen Kreis, der auf Millimeterpapier gezeichnet wurde. Dabei hält man das Millimeterpapier so, daß die eine Schar der Teilungsgeraden zur Zeichenebene parallel bleibt. Die Projektion eines Kreises ist, wie sein Schatten sofort zeigen würde, eine Ellipse. Ein Kreisdurchmesser von der Länge 2 a bleibt auch der Ellipse als große Achse erhalten. Es ist das der Durchmesser, der mit einer Teilungsgeraden jener Parallelenschar zusammenfällt. Der dazu senkrechte Durchmesser, der auch in der Projektion senkrecht bleibt, wird am stärksten verkürzt und wird so zur kleinen Achse 2b der Ellipse. Bei der hier gewählten Lage, die sich ja immer durch Drehen des Kreises erreichen läßt, wird jedes Quadrat im gleichen Maße verkleinert. Danach aber erfährt auch die ganze Kreisfläche, die man beliebig genau mit kleinen Quadraten bedecken könnte (man könnte die Quadratmillimeter des Papiers natürlich noch weiter teilen), dieselbe Verkleinerung. Also ist hier, ganz entsprechend dem oben gefundenen Ergebnis,

Fig. 114.



$$E = \frac{2b}{2a} K,$$

wo E den Ellipseninhalt und K den Kreisinhalt bedeuten. Dieser ist aber, wie ebenfalls oben gezeigt, $K = \pi a^2$, so daß man schließlich erhält

$$E = \frac{2b}{2a} \pi a^2 = \pi a b.$$

6. Die Methoden der Wägung und der Abzählung. Wie soll man aber eine Fläche ausmessen, die irgendeine unregelmäßige Begrenzung besitzt? In solchem Falle können nur Methoden angegeben werden, die näherungsweise mehr oder minder gute Ergebnisse liefern.

Ein sehr einfaches und nicht schlechtes Verfahren besteht darin, daß man die zu messende Fläche auf starken Pappkarton aufzeichnet, ausschneidet und dann abwägt. Bei der Wägung möge z. B. das Gewicht 45 g ermittelt werden. Darauf schneidet man aus demselben Pappkarton 1 qdm heraus und stellt sein Gewicht z. B. zu 18 g fest. Man weiß jetzt, daß die gesuchte Fläche 45 : 18 = 2,5 mal so schwer ist als ein Quadratdezimeter. Da aber beide Flächen aus demselben Karton ausgeschnitten wurden, so muß die gesuchte Fläche auch 2,5 mal so groß sein als ein Quadratdezimeter. Also ist der gesuchte Inhalt 2,5 qdm.

Ein brauchbares Ergebnis erhält man freilich nur, wenn die Fläche einigermaßen groß ist. Sonst würden die beim Ausschneiden und Abwägen unvermeidlichen Fehler zu großen Einfluß gewinnen.

Hierher gehört auch die schon oben beschriebene Ausmessung einer Fläche, indem man sie auf Millimeterpapier aufzeichnet und die in der Fläche liegenden Quadrate, sei es die Quadratzentimeter oder die Quadratmillimeter, abzählt. Die Resultate sind ebenfalls durchaus brauchbar, nur ist das Verfahren im allgemeinen recht mühsam.

7. Die Trapezregel. Schon oben war erwähnt worden, daß die Flächen, deren Quadratur ausführbar ist, in gewisser Beziehung bevorzugt sind: ihr Inhalt läßt sich rechnerisch einfach ermitteln. In erster Linie sind die geradlinig begrenzten Flächen hervorzuheben, in zweiter die Parabel. Das legt den Gedanken nahe, die Ausmessung der Flächen zu versuchen, indem man sie möglichst gut durch geradlinig begrenzte ersetzt oder durch solche, deren Begrenzung von Parabelbögen gebildet wird. Danach erhält man wirklich zwei Regeln zur Inhaltsbestimmung beliebiger Flächenstücke: die Trapezregel und die Simpsonsche Regel.

Hat die Fläche der Fig. 115 als eine Begrenzungslinie eine Kurve, d. h. irgendeine krumme Linie, so zerlegt man die ganze Fläche in beliebig viele überall gleich breite Streifen. In jedem Streifen für sich ersetzt man das Kurvenstückchen durch eine geradlinige Verbindung der Endpunkte, also durch eine Sehne. Dann betrachtet man jeden Streifen als ein geradlinig begrenztes Trapez. Ein Blick auf die Zeichnung lehrt, daß der Fehler nicht sehr groß werden kann: nur wenige Sehnen ließen sich getrennt von der Kurve zeichnen.

Um die Ausrechnung durchzuführen, mißt man die sämtlichen Ordinaten, die parallelen Strecken, nach und ebenso die überall gleiche Breite der Streifen. Die Ergebnisse der Messung sind in die Figur eingetragen. Jetzt berechnet man Streifen für Streifen, wie oben beim Trapez, d. h. man multipliziert die halbe Summe der parallelen Seiten mit ihrem Abstand. Dabei braucht mit dem Abstand,

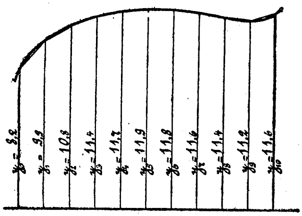


Fig. 115.

da er bei allen Trapezen der gleiche ist, nur einmal multipliziert zu werden. Das gibt:

$$J = 1{,}5\left(\frac{8{,}2+9{,}9}{2} + \frac{9{,}9+10{,}8}{2} + \frac{10{,}8+11{,}4}{2} + \cdots + \frac{11{,}4+11{,}2}{2} + \frac{11{,}2+11{,}6}{2}\right).$$

Jede Ordinate kommt zweimal vor, nur nicht die erste und die letzte. Faßt man deshalb die beiden halben Ordinaten jedesmal zu einer ganzen zusammen, so bleibt:

$$J = 1{,}5\left(\frac{8{,}2+11{,}6}{2} + 9{,}9 + 10{,}8 + 11{,}4 + \cdots + 11{,}4 + 11{,}2\right).$$

Das ganze Verfahren ist zusammengefaßt dies:

Man addiert sämtliche Ordinaten außer der ersten und der letzten, zur Summe fügt man die Hälfte der ersten und die Hälfte der letzten Ordinate hinzu und multipliziert zum Schluß mit der Breite der Streifen.

Im Beispiel sieht die Berechnung dann so aus:

$$\begin{array}{rr}
 & 9{,}9 \\
 & +\ 10{,}8 \\
 & +\ 11{,}4 \\
 & +\ 11{,}7 \\
 & +\ 11{,}9 \\
 & +\ 11{,}8 \\
 & +\ 11{,}6 \\
 & +\ 11{,}4 \\
 & +\ 11{,}2 \\
+\frac{1}{2}\ 8{,}2 = & +\ \ 4{,}1 \\
+\frac{1}{2}11{,}6 = & +\ \ 5{,}8 \\
\hline
 & 111{,}6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
111{,}6 \\
\times\ 1{,}5 \\
\hline
1116 \\
5580 \\
\hline
167{,}40
\end{array}$$

Ergebnis: J = 167 qcm.

Bezeichnet man die Ordinaten der Reihe nach mit y_0, y_1, y_2 usw. und die Streifenbreite mit h, so lautet die allgemeine Formel:

$$J = h\left(\frac{y_0+y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_8 + y_9\right).$$

Man könnte meinen, das Ergebnis würde immer genauer werden, je enger man nur die Streifen wählt. Bis zu einem gewissen Grade ist das auch sicherlich der Fall. Man kann daher dieselbe Rechnung mit doppelter Streifenzahl wiederholen. Soweit dann beide Ergebnisse übereinstimmen, wird man sie als richtig gelten lassen. Bedenkt man aber, daß die Ordinaten mit dem gewöhnlichen Maßstab abgemessen werden, und daß auch die Zeichnung selbst nicht absolut genau sein kann, so wird man einsehen, daß schon diese Ungenauigkeiten Fehler bedingen, die natürlich nicht beseitigt werden können, auch wenn man noch so viele Streifen zieht. Aus diesen Gründen begnügt man sich in der Regel mit zehn Streifen z. B. bei der Berechnung des Dampfdruckdiagramms. Nur bei großen Flächen geht man über diese Zahl hinaus.

8. Die Simpsonsche Regel. Noch günstiger als soeben werden meist die Ergebnisse, wenn man sich einer Regel bedient, die nach einem englischen Mathematiker Simpson, der sie zuerst angab, benannt worden ist. Die ganze Fläche teilt man gerade so wie vorher in Streifen ein, aber man faßt je zwei Streifen, wie in der Fig. 116 durch Schraffierung angedeutet ist, zusammen. Jeder Doppelstreifen enthält drei Ordinatenendpunkte, durch die man sich je eine Parabel gelegt denkt, deren Achse zu den Ordinaten parallel ist. Den Kurvenbogen ersetzt man durch den Parabelbogen. Also besteht dann jeder Doppelstreifen aus einem Trapez und einem Parabelabschnitt. Addiert man beider Inhalt nach den früheren Formeln, so findet man die Rechenregel:

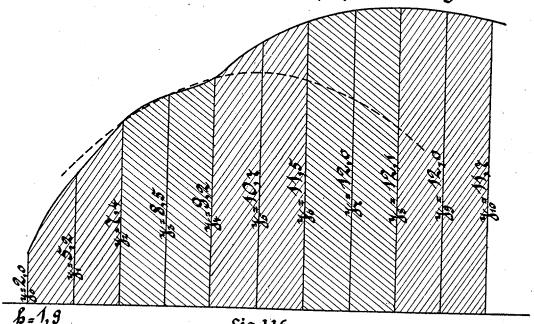


Fig. 116.

$$J = 2 \times 1{,}9 \left(\frac{2{,}0 + 4 \times 5{,}2 + 7{,}4}{6} + \frac{7{,}4 + 4 \times 8{,}5 + 9{,}2}{6} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{12{,}1 + 4 \times 12{,}0 + 11{,}7}{6} \right).$$

Statt jeden Bruch in der Klammer durch 6 zu dividieren, dividiert man ihn in der Regel nur durch 2 und nimmt dafür 3 einmal vor die Klammer in den Nenner. Man sieht, daß die erste und letzte Ordinate nur je einmal, die zweite, vierte, sechste usw. Ordinate auch nur je einmal, aber mit 4 multipliziert, und die dritte, fünfte, siebente usw. Ordinate je zweimal vorkommen. Deshalb kann man so zusammenfassen, wenn man noch den Nenner 2 nicht vergißt:

$$J = \frac{2 \times 1{,}9}{3}\left(\frac{2{,}0 + 11{,}7}{2} + 7{,}4 + 9{,}2 + 11{,}5 + 12{,}1 + 2\,[5{,}2 + 8{,}5 + 10{,}7 + 12{,}0 + 12{,}0]\right).$$

Also lautet hier die Regel:

Man addiert die Hälften der ersten und letzten Ordinaten, dazu alle übrigen ungeradzahligen Ordinaten und dazu das Doppelte der geradzahligen Ordinaten. Diese Summe multipliziert man mit der doppelten Streifenbreite und dividiert zum Schluß durch drei.

Danach sieht in dem Beispiel die Ausrechnung so aus:

$$\begin{array}{rrrr}
+\frac{1}{2} & 2{,}0 & = & 1{,}0 \\
+\frac{1}{2} & 11{,}7 & = & +\ 5{,}85 \\
 & & & +\ 7{,}4 \\
 & & & +\ 9{,}2 \\
 & & & +\ 11{,}5 \\
 & & & +\ 12{,}1 \\
+\,2 \times & 5{,}2 & = & +\ 10{,}4 \\
+\,2 \times & 8{,}5 & = & +\ 17{,}0 \\
+\,2 \times & 10{,}7 & = & +\ 21{,}4 \\
+\,2 \times & 12{,}0 & = & +\ 24{,}0 \\
+\,2 \times & 12{,}0 & = & +\ 24{,}0 \\
\hline
 & & & 143{,}85
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
143{,}85 \\
\times\ 3{,}8 \\
\hline
43155 \\
115080 \\
\hline
546{,}630 : 3 = 182{,}21
\end{array}$$

Ergebnis: J = 182 qcm.

Wählt man hier dieselben Buchstabenbezeichnungen wie oben, so lautet die allgemeine Formel der Simpsonschen Regel:

$$J = \frac{2h}{3}\left[\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + 2\,(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)\right].$$

Das Verfahren liefert im allgemeinen bessere Ergebnisse als die Trapezregel, weil die Parabeln sich meist der Kurve noch mehr anschmiegen als die Sehnen. Eine solche Parabel ist, damit sie deutlich sichtbar wird, an sehr ungünstiger Stelle in der Fig. 116 gezeichnet. Über die Anzahl der Streifen gilt genau das bei der Trapezregel Gesagte. Zu beachten ist nur, daß hier immer eine gerade Anzahl von Streifen gewählt werden muß.

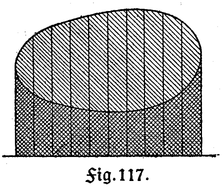


Fig. 117.

Hat man eine Fläche zu berechnen, die allseitig krummlinig begrenzt ist, so kann man dieselben Regeln benutzen. Man zieht zu dem Zwecke irgendeine Hilfsachse und zwei Grenzordinaten, wie Fig. 117 zeigt, und berechnet zuerst die von ihnen und dem oberen Kurventeil eingeschlossene Fläche.

Davon zieht man die durch dieselben Ordinaten, durch die Achse und durch den unteren Teil der Kurve begrenzte Fläche ab. Als Rest erhält man wirklich den nur von der Kurve eingeschlossenen Teil. In der Figur sind die zu berechnenden Flächenteile durch verschiedene Schraffierung angedeutet.

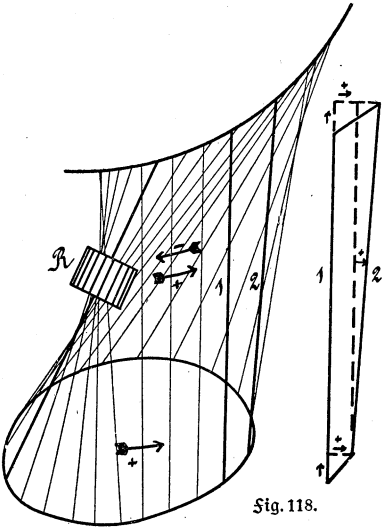


Fig. 118.

9. Das Polarplanimeter. Nach allen bisherigen Verfahren kam man auf rechnerischem Wege zum Ziel. Einfacher und schneller arbeitet man, wenn man einen Apparat benutzt, der rein mechanisch den Flächeninhalt ermittelt. Für diesen Zweck am gebräuchlichsten ist das sogenannte Polarplanimeter, das im Jahre 1854 von einem Mechaniker Amsler konstruiert wurde. Mit Hilfe von Fig. 118 soll die Theorie dieses Instrumentes erklärt werden. Dort betrachte man zunächst den Flächenteil, der von einer Kurve rings umschlossen ist, und den Kreisbogen. Statt des Kreisbogens könnte irgendein beliebiges Kurvenstück gewählt sein; bei der praktischen Ausführung des Planimeters läßt sich jedoch ein Kreisbogen am einfachsten verwirklichen. Einen Punkt des Kreisbogens verbinde man mit einem beliebigen Punkt der Kurve durch einen festen Stab, den man in diesen Punkten abschneidet. Zu Anfang möge etwa der Stab die Lage des stärker gezeichneten Strahles haben, der den Körper R, über den später zu sprechen ist, trägt. Jetzt bewegt man diesen Stab so zunächst nach rechts, daß seine Endpunkte ständig auf ihren Kurven bleiben. Zum vollen Verständnis ist es nötig, daß man die Bewegung an der Figur wirklich einmal ausführt. Ist der untere Teil durchlaufen, so kommt nunmehr der obere an die Reihe. Jetzt aber bewegt man den Stab nach links hin, bis er zur Anfangslage zurückkehrt. Dieser Stab, Fahrstrahl genannt, ist in der Figur in einer ganzen Reihe aufeinanderfolgender Lagen eingezeichnet.

Nunmehr sei die Verabredung getroffen: Bewegt sich der Fahrstrahl nach rechts, so soll die überstrichene Fläche positiv, bewegt er sich dagegen nach links, so soll die Fläche negativ gerechnet werden.[1]) Dieser Verabredung gemäß sind die Pfeilrichtungen in die Figur eingezeichnet. Man sieht, daß die von der Kurve eingeschlossene Fläche nur positiv, der andere überstrichene Flächenteil dagegen positiv und negativ überfahren wird; er fällt daher ganz fort.

Es bleibt noch übrig, die Bewegung des Fahrstrahls genauer zu betrachten, wenn er z. B. aus der stärker gezeichneten Lage 1 in die ebenfalls hervorgehobene benachbarte Lage 2 übergeht. Das kann man so machen, wie es in der Nebenfigur gezeichnet ist. Danach ersetzt man die Bewegung durch eine Parallelverschiebung und eine Drehung. Man schiebt nämlich den Fahrstrahl 1 zunächst in der Pfeilrichtung ein wenig nach oben, dann ebenfalls in der Pfeilrichtung seitlich in die gestrichelte, parallele Lage hinein. Endlich dreht man ihn noch um einen kleinen Winkel, so daß er in die Lage 2 gelangt.

Sind die Fahrstrahlen 1 und 2 nahe genug beieinander gewählt, so wird man sagen können, daß der überstrichene Flächenteil ebenso groß ist wie das Rechteck zusammen mit dem durch die Drehung gebildeten Kreisausschnitt. Bei wirklich benachbarter Lage wird das oben hinzugekommene Flächenstückchen sich so wenig von dem unten weggefallenen unterscheiden, daß man sich um diesen kleinen Unterschied nicht zu kümmern braucht.

Die Kreisausschnitte aber müssen im ganzen auch wieder wegfallen. Ihre Größe ist ja außer durch die Länge des Fahrstrahls, die immer gleich bleibt, nur durch die Winkelgrößen bestimmt. Da aber der Fahrstrahl zum Schluß wieder in die Anfangslage zurückkehrt, so muß er doch genau so weit nach links zurückgedreht werden, wie er anfangs nach rechts herausgedreht wurde. In Übereinstimmung mit der oben festgelegten Verabredung ist aber Rechtsdrehung positiv, Linksdrehung negativ zu rechnen. Also heben sich die Drehungen tatsächlich gegenseitig auf.

Es bleiben nur die Rechtecke übrig. Ihre Größe ist gleich dem Produkt aus der Länge des Fahrstrahls multipliziert mit all den seitlichen Verschiebungen zusammengenommen. Wieder ist eine Verschiebung nach rechts dabei positiv, eine nach links negativ zu rechnen.

Zusammengefaßt ist also das Ergebnis: wenn man nur imstande

1) Rechts und links ist natürlich nur in bezug auf diese Figur aufzufassen. Hat die Figur irgendeine beliebige Lage, so muß man sagen: bei der Bewegung in einer Richtung positiv und in der entgegengesetzten negativ.

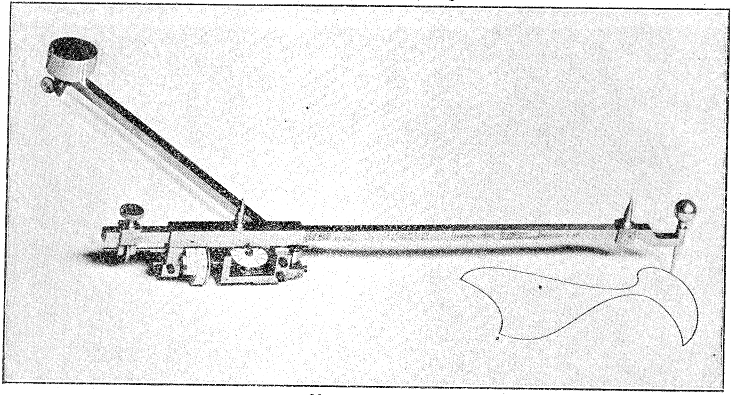


Fig. 119.

ist, die seitlichen Verschiebungen zu messen, dann kann man auch die gesuchte Flächengröße angeben.

Das leistet aber die am Fahrstrahl befestigte Rolle R. Auf dieser ist einfach eine Teilung angebracht, auf der man abliest, welcher Weg von ihr bei der ganzen Bewegung des Fahrstrahls zurückgelegt ist. Wirklich wird auch bei der Verschiebung und Drehung nach links der Weg negativ gerechnet, denn die Rolle wird ja notwendig im entgegengesetzten Sinne gedreht wie vorher, läuft also einfach das entsprechende Stück wieder zurück.

Fig. 119 ist ein Bild des Amslerschen Polarplanimeters selbst. Links trägt der Fahrstrahl die Rolle, rechts einen Stift, den man auf der Kurve entlang führen muß. Damit das andere Ende des Fahrstrahls einen Kreisbogen beschreibt, ist es drehbar an einer Stange befestigt. Diese Stange trägt am Ende eine Spitze, die durch ein Gewicht beschwert ist und deshalb während der ganzen Messung festliegt. Der Rollenumfang ist in hundert gleiche Abschnitte geteilt. Zur Berechnung des zurückgelegten Weges müßte man noch den Durchmesser der Rolle kennen. Bei gewöhnlichen Apparaten, die nur eine bestimmte Stangenlänge besitzen, sind aber Rollendurchmesser und Stangenlänge so gewählt, daß die auf der Rolle abgelesene Zahl unmittelbar den Flächeninhalt in Quadratzentimetern angibt Bei besseren Apparaten, wie z. B. bei dem hier abgebildeten, läßt sich die Stangenlänge verändern. Dann hat man Marken auf der Stange angegeben, bis

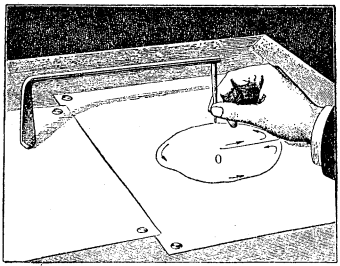


Fig. 120.

zu denen einzustellen ist; gleichzeitig steht daneben die Konstante, mit der die abgelesene Zahl zu multiplizieren ist, um den Flächeninhalt zu erhalten. Die ganzen Umdrehungen der Rolle werden an einem besonderen Zählwerk abgelesen.

Der Apparat findet vielfache Verwendung. In der Erdkunde bestimmt man mit ihm Ländergrößen, in der Technik die Inhalte von Dampfdruckdiagrammen und vieles andere usw. Leider ist der Apparat recht teuer. In einfachster Ausführung kostete er ungefähr 30 M., in besserer doch mindestens ungefähr 60 M. Seinen Namen Polarplanimeter erhielt er von jenem Gewichtsteil, um den er sich dreht, und der Pol des Planimeters genannt wird. Um seine Theorie und Handhabung recht zu verstehen, muß man ihn vor allem einmal selbst in die Hand nehmen und mit ihm arbeiten.

10. Das Stangenplanimeter von Prytz. Wesentlich einfacher und billiger — es kostete ungefähr 12 M. — ist ein Planimeter, das von H. Prytz in Kopenhagen[1]) erfunden wurde. Fig. 120 zeigt ein Bild des Apparates. Er besteht aus einer Stange, die am einen Ende eine Spitze, am anderen eine keilförmige Erweiterung trägt. Der Abstand von Mitte Keil bis zur Spitze ist 25 cm lang. Der größte Durchmesser der auszumessenden Figur darf in der Regel nicht mehr als $^1/_3$ der Planimeterlänge sein; auch bei geringerer Genauigkeit darf er jedenfalls niemals mehr als die halbe Länge betragen. Die Messung geschieht in folgender Weise: man schätzt die Lage des Schwerpunktes ab und setzt die Spitze in ihm ein. Durch leichten Druck markiert man die Anfangslage des Keils. Dann umfährt man, wie in der Figur angedeutet ist, die Fläche, bis man wieder zum Ausgangspunkt zurück-

1) Zu beziehen von der Firma Cornelius Knudsen, Kopenhagen. Es sind noch eine Reihe ähnlicher Konstruktionen von anderen Firmen in den Handel gebracht worden; nach demselben Prinzip z. B., aber wesentlich verbessert wird ein Planimeter von der Firma Richter in Chemnitz hergestellt.

In der Arbeit: Sachs. Ein kalibriertes Stangenplanimeter, Zeitschrift für praktischen Maschinenbau (American Machinist) 1910, S. 1152, findet sich ein hübsches Verfahren angegeben, aus einem gewöhnlichen Radiermesser ein gut brauchbares Planimeter herzustellen.

kommt, und markiert wieder die Stellung des Keils, der beim Umfahren der Fläche sich vollständig selbst überlassen blieb. Das Produkt aus dem Abstand der Marken multipliziert mit der Länge des Planimeters ist der gesuchte Flächeninhalt.

Die Theorie dieses Stangenplanimeters ist wesentlich schwieriger als die des Polarplanimeters und muß hier weggelassen werden. Die gefundenen Werte sind überdies nur Näherungswerte, so daß die Ergebnisse höchstens auf ein Prozent genau werden. Das Ergebnis wird verbessert, indem man die Zeichenebene um 180^0 dreht und die Fläche in umgekehrter Richtung umfahrend das Verfahren wiederholt. Der Mittelwert aus beiden Messungen liefert ein genaueres Ergebnis. Der Vorzug dieses Planimeters besteht in seiner großen Billigkeit, dafür kann er aber auch nur gebraucht werden, wenn geringe Genauigkeit verlangt wird.

IV. Abschnitt.

Körpermessung.

Die Körpermessung findet zwar weniger zahlreiche Verwendung als die Flächenmessung, steht dieser aber an Wichtigkeit kaum nach. In den weitaus meisten Fällen handelt es sich darum, im voraus zu ermitteln, welches Gewicht ein Körper besitzen wird, den man herzustellen hat. Zu diesem Zwecke ist zunächst in Tabellen für jedes Material das sogenannte spezifische Gewicht angegeben, d. i. das Gewicht einer Volumeneinheit des betreffenden Materials. So besitzt z. B. Kupfer das spezifische Gewicht 8,9, das soll heißen

1 Kubikmeter Kupfer wiegt 8,9 Tonnen (t);
1 Kubikdezimeter wiegt 8,9 Kilogramm (kg);
1 Kubikzentimeter wiegt 8,9 Gramm (g).

Ermittelt man durch Rechnung, daß eine kupferne Platte 55 Kubikdezimeter Inhalt haben wird, so weiß man, daß ihr Gewicht 55 mal so groß sein wird als das Gewicht von einem Kubikdezimeter also $55 \times 8,9$ Kilogramm. In Formeln schreibt man

$$G = V \cdot s,$$

wo G das Gewicht, V den Körperinhalt oder das Volumen und s das spezifische Gewicht bedeuten.

1. Die Körpermaße. Die jetzt gebräuchlichen Namen der Körpermaße wurden bereits genannt. Auch hier benutzte man ursprünglich

Maße, die dem Sexagesimalsystem angepaßt waren. Scheffel, Metze, Lot sind alte Beispiele solcher. Jetzt ist das Grundmaß ein Würfel, dessen Kantenlänge ein Meter ist, dies Maß heißt ein Kubikmeter, 1 cbm. Zerlegt man alle Seitenflächen in Quadratdezimeter und baut darauf Würfel auf mit der neuen Kantenlänge von einem Dezimeter, bis das Kubikmeter ganz erfüllt ist, so erhält man in jeder Schicht hundert, und da, wie

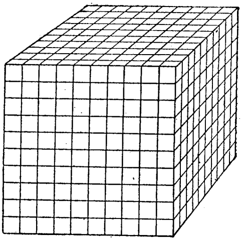


Fig. 121.

Fig. 121 zeigt, zehn Schichten übereinander liegen, im ganzen tausend der neuen Körpermaße, die man Kubikdezimeter (cdm) oder Liter (l) nennt. (Hundert Liter heißen auch ein Hektoliter (hl), so daß ein Kubikmeter zehn Hektoliter enthält.) Dies Maß läßt sich genau entsprechend in tausend Kubikzentimeter (ccm), und dieses wieder in tausend Kubikmillimeter (cmm) zerlegen. Ein Stecknadelknopf hat etwa die Größe von einem Kubikmillimeter.

2. Der Begriff der Körpermessung. Den Inhalt oder das Volumen eines beliebigen Körpers ausmessen, heißt angeben, wieviele Würfel von der gewählten Einheit in den Körper hineingelegt werden können.

Das wird praktisch selten genug möglich sein. Es genügt, wenn man nur weiß, wie viele Einheitswürfel zusammen dasselbe Volumen ausmachen, wie es der beliebige Körper besitzt. Dabei mag man die Würfel aus demselben Material wie den Körper hergestellt denken, um durch Abwägen, so genau es eben die Wage gestattet, festzustellen, wann das gleiche Volumen vorhanden ist.

3. Quader, Prisma, Umdrehungskörper. Wirklich ausmessen durch Hineinpacken von Würfeln kann man den Quader. Das ist ein auf einem Rechteck aufgebauter Körper, dessen Seiten sämtlich wieder Rechtecke sind. Ein Ziegelstein hat z. B. diese Gestalt. In Fig. 122 ergab die Messung der drei Seiten 4 cm, 3 cm und 7 cm. Daher kann jede horizontale Schicht mit $3 \times 4 = 12$ Würfeln bedeckt werden, und da sieben Schichten vorhanden sind, so enthält der ganze Körper $3 \times 4 \times 7 = 84$ ccm. Die Messung der Seiten wird nur selten so einfach aufgehen. Im allgemeinen muß man so genau wie möglich etwa bis auf $^1/_{10}$ mm nachmessen und dementsprechend kleine Würfel wählen. Hat

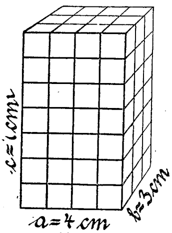


Fig. 122.

man auf diese Weise in einem anderen Beispiel die Seitenlängen 4,282 dm, 5,793 dm und 7,945 dm erhalten, so ist eben der Inhalt

$$V = 4{,}282 \times 5{,}793 \times 7{,}945 \text{ cdm}.$$

Wieder ist zu beachten, daß nicht etwa alle berechneten Dezimalstellen wirklich brauchbar sind. Vielmehr kann man auch hier nur sagen, daß der Inhalt sicher größer als $4{,}281 \times 5{,}792 \times 7{,}944$ cdm, aber auch sicher kleiner als $4{,}283 \times 5{,}794 \times 7{,}946$ cdm sein wird. Im zweiten Abschnitt des ersten Bandes ist gezeigt worden, wie man deshalb praktisch zu rechnen hat.

Das Ergebnis wäre also dies: Man berechnet den Inhalt des Quaders, indem man die Maßzahlen der drei Kanten, Länge, Breite und Höhe, ermittelt und miteinander multipliziert. In Formeln: $V = a \cdot b \cdot c$. Alle drei Kanten müssen mit derselben Längeneinheit gemessen sein, durch welche die Benennung des Volumens gleichzeitig bestimmt ist.

Zu demselben Ergebnis kann man noch auf einem anderen Wege gelangen, der nachher nützlich sein wird. Man kann nämlich den Quader der Fig. 122 auch so entstanden denken, daß man die rechteckige Grundfläche um 7 cm senkrecht nach oben verschiebt. Dann ist aber der Inhalt sofort gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche mal dem zurückgelegten Weg. Denn wenn der Weg von 1 cm zurückgelegt ist, dann ist eine Würfelschicht erzeugt, also nach 7 cm Weg auch 7 Würfelschichten. Es ist dabei wichtig, daß senkrecht nach oben verschoben werden muß, damit Würfel auch wirklich entstehen.

Auf Grund dieser Überlegung findet man die Inhalte aller sogenannten geraden Prismen, d. h. von Körpern, die dadurch entstehen, daß man irgendeine Fläche senkrecht zu sich selbst verschiebt. Jedesmal ist der Inhalt gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt multipliziert mit dem zurückgelegten Weg. Dieser zurückgelegte Weg wird auch Höhe des Körpers genannt. In Formeln schreibt man: $V = G \cdot h$, wo G die Grundfläche und h die Höhe bedeuten.

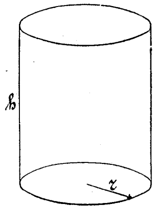
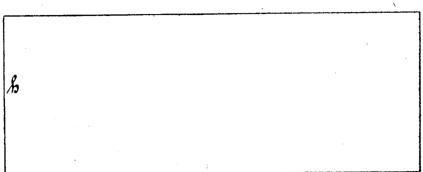


Fig. 123.

In Fig. 123 ist ein gerader Kreiszylinder gezeichnet, der offenbar zu den genannten Körpern gehört. Die Grundfläche ist ein Kreis, dessen Inhalt be-



$2\pi r$
Fig. 124.

kanntlich πr^2 ist. Deshalb ist das Volumen des geraden Kreiszylinders: $V = \pi r^2 h$.

Hier kann auch leicht der Mantel des Körpers berechnet werden, das ist die krumme Seitenfläche, die die Kreislinie bei der Bewegung beschreibt. Schneidet man diesen Mantel senkrecht auf und breitet ihn wie in Fig. 124 in der Ebene aus, so bildet er ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich dem Kreisumfang, also $2\pi r$, und dessen Höhe zugleich die Zylinderhöhe ist. Nach der Inhaltsformel des Rechtecks erhält man so $M = 2\pi r h$.

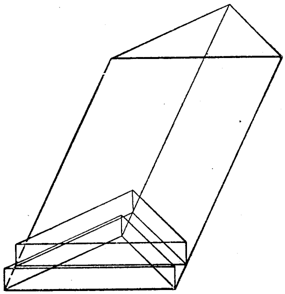


Fig. 125.

Wie aber, wenn die Grundfläche zwar auch noch parallel, aber schräg aufwärts verschoben wird? Dann hilft man sich, indem man stufenweise zunächst senkrecht aufwärts, dann aber jedesmal wieder seitlich in die richtige Lage hineinschiebt, wie es in Fig. 125 gezeigt ist. Zum Körperinhalt kommt immer nur etwas hinzu, wenn man senkrecht aufwärts bewegt, so daß auch jetzt der Körperinhalt gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche mal der Höhe, d. h. also mal dem senkrechten Abstand der Grund- und Deckfläche, wird. Freilich wird bei der stufenweisen Bewegung der Körper ja nicht genau erzeugt. Sind aber die Stufen niedrig genug gewählt, indem der Körper z. B. aus Papierblättern aufgeschichtet wird, dann wird der Fehler so klein, daß er nicht mehr in Betracht kommt.

Auch hier braucht die Grundfläche nicht längs gerader Linien verschoben zu werden. Vielmehr kann die Parallelverschiebung ganz entsprechend, wie es Fig. 107 des vorigen Abschnitts zeigt, willkürlich in irgendwelcher wechselnden Richtung geschehen.

Ganz ähnlich, wie soeben, kann man sich die Methode klarmachen, nach der man Inhalte von Umdrehungskörpern berechnet. In Fig. 126 ist ein Schnitt durch einen solchen gezeichnet, der durch Umdrehung des schraffierten Rechtecks um die Mittelachse entstanden ist. Die senkrechte Linie ab teilt das Rechteck in zwei kongruente Stücke, ein äußeres und ein inneres. Es ist klar, daß das äußere Stück einen wesentlich größeren Teil des Körpers erzeugt als das innere.

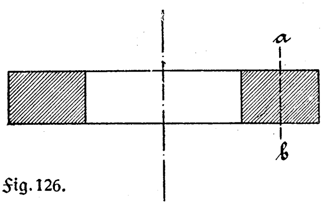


Fig. 126.

Jetzt stelle man sich vor, daß das Rechteck nur ein kleines Stückchen gedreht wird. Dann entsteht ein keilförmiger Körper. Von dem, was außen mehr liegt, werde durch einen Schnitt parallel zu einer Seitenfläche ein Stück abgeschnitten und innen zugelegt. Dann entsteht offenbar, falls nur die Drehung klein genug war, gerade ein Prisma, dessen Grundfläche das Rechteck, und dessen Höhe das Wegstückchen ist, welches a b zurückgelegt hat. Fährt man so fort, so erhält man einmal den aus lauter kleinsten Teilchen gebildeten ganzen Umdrehungskörper. Anderseits aber kann man aus den verwandelten kleinen Stückchen ein Prisma von genau gleicher Größe aufbauen. Dieses hat als Grundfläche das Rechteck und als ganze Höhe den von a b zurückgelegten Weg. Daher ist sein Inhalt ebenso wie der des Umdrehungskörpers gleich dem Produkt aus dem Inhalt des Rechtecks multipliziert mit dem Weg des Mittelpunktes (offenbar braucht man das Rechteck nicht einmal ganz herumzudrehen, obige Betrachtung gilt auch, wenn nur ein Teil der Kreisbahn zurückgelegt ist). Wählt man statt des Rechtecks eine beliebige andere Fläche, die einen Mittelpunkt besitzt, z. B. einen Kreis oder eine Ellipse, so ändert sich nichts an der Überlegung.

Ist die erzeugende Fläche von beliebiger Gestalt, so mag man sie auf Millimeterpapier gezeichnet denken. Dann beschreibt jedes der bedeckten Quadrate einen Körper, dessen Inhalt, wie oben gezeigt, berechnet werden kann. Aber die Mittelpunkte der außen liegenden Quadrate beschreiben größere, die der innen liegenden kleinere Wege. Statt einen Teil der Quadrate mit den größeren und einen Teil mit den kleineren Wegen zu multiplizieren, kann man sie alle zusammen, also auch den ganzen Flächeninhalt, mit dem mittleren Wege multiplizieren. Der Punkt, der diesen mittleren Weg beschreibt, ist der wohl von der Physik her bekannte Schwerpunkt der Fläche. Wie er durch Rechnung gefunden werden kann, muß hier übergangen werden. Annähernd kann man ihn finden, wenn man die Fläche aus Pappe ausschneidet und versucht, sie auf einer Nadelspitze schwebend ins Gleichgewicht zu bekommen. Da, wo in diesem Falle die Nadelspitze die Fläche trägt, liegt der Schwerpunkt. Besitzt eine Fläche einen Mittelpunkt, so ist dieser gleichzeitig der Schwerpunkt.

Die geschilderte Methode zur Berechnung vom Volumen der Umdrehungskörper heißt die Guldinsche Regel. Sie läßt sich kurz so aussprechen:

Der Inhalt eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche multipliziert mit dem Weg, den der Schwerpunkt der Fläche bei der Umdrehung zurückgelegt hat.

Durch ganz entsprechende Betrachtungen erhält man unmittelbar die zweite Guldinsche Regel für die Berechnung der Oberfläche des Umdrehungskörpers:

Die Oberfläche eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden Linie multipliziert mit dem Weg, den der Schwerpunkt der Linie bei der Umdrehung zurückgelegt hat.[1])

Die Umdrehungskörper sind in der Praxis von größter Wichtigkeit, so daß die Guldinschen Regeln außerordentlich oft verwendet werden.

4. Die Simpsonsche Regel. Da es mehr darauf ankommt, allgemeine Regeln zur Körperberechnung kennen zu lernen, während die Herleitung jeder einzelnen Formel weit weniger interessiert, so sei an die Spitze der weiteren Betrachtungen eine solche Regel gestellt, die nicht nur zur Berechnung der fünf einfachen Körper: Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel, hinreicht, sondern noch in sehr vielen anderen Fällen herangezogen werden darf. Es ist die Simpsonsche Regel, die auf die Ebene schon im vorigen Abschnitt angewendet wurde. Im Raume heißt sie so: ein Körper möge parallele Grund- und Deckfläche, G und D, besitzen, seine Höhe sei h, und durch die Mitte dieser Höhe werde ein zur Grund- und Deckfläche paralleler Schnitt, der Mittelschnitt vom Flächeninhalt M gelegt, dann ist das Volumen:

$$V = \frac{h}{6}(G + 4M + D).$$

Jedoch gilt diese einfache Regel nicht für alle Körper. Wichtige Beispiele sind zunächst die oben genannten fünf einfachen Körper. Ferner gilt sie immer dann, wenn Grund- und Deckfläche irgendwelche Vielecke sind, während die Seiten des Körpers aus Dreiecken oder Vierecken gebildet sind. Ein solcher Körper wird wohl ein Prismatoid genannt; in Fig. 127 ist ein einfaches Beispiel gezeichnet. Diese wenigen Beispiele mögen genügen.[2])

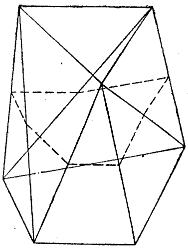


Fig. 127.

---

1) Die Schwerpunkte der erzeugenden Fläche bzw. Linie fallen im allgemeinen nicht zusammen. Bei den Flächen, die einen Mittelpunkt besitzen, ist es immer der Fall.

2) Ob ein Körper nach der Simpsonschen Regel berechnet werden darf oder nicht, erkennt man so: Man drückt einen beliebigen parallel zur

5. Pyramide, Kegel, Kugel. Jetzt soll gezeigt werden, wie diese Simpsonsche Regel anzuwenden ist. Zuerst einmal beim Prisma. Bei ihm sind Grundfläche, Mittelschnitt und Deckfläche nach der Art, wie es durch Verschiebung der Grundfläche erzeugt wurde, gleich groß. Bezeichnet man diese gleichen Flächen mit G, so liefert die obige Regel

$$V = \frac{h}{6}(G + 4\,G + G) = \frac{h}{6}\,6\,G = G\,h.$$

Das ist aber die schon oben gefundene Formel.

Verbindet man die Punkte des Umfangs von irgendeinem ebenen Vieleck mit einem außerhalb der Ebene liegenden Punkte, so entsteht eine Pyramide. In Fig. 128 ist eine solche gezeichnet. Die zur Grundfläche parallelen Querschnitte sind alle untereinander ähnlich. Ihre Inhalte nehmen regelmäßig mit der Höhe ab. In halber Höhe sind die Seiten des Querschnittes nur noch halb so lang wie die entsprechenden der Grundfläche, dann aber ist der Inhalt nur der vierte Teil der Grundfläche. Darauf wurde schon im vorigen Abschnitt hingewiesen. Fig. 129 mag es noch einmal erläutern. Das Rechteck mit halber Seitenlänge kann offenbar viermal in das ganze Rechteck hineingelegt werden. Nennt man die Grundfläche der Pyramide wieder G, dann ist also der Mittelschnitt $\frac{1}{4}$ G. Die Deckfläche ist zu einem Punkt zusammengeschrumpft, also 0. Deswegen liefert die Simpsonsche Regel:

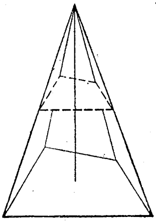


Fig 128.

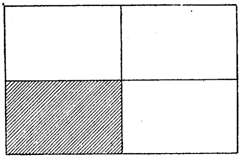


Fig. 129.

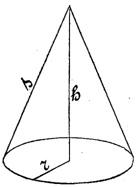


Fig. 130.

$$V = \frac{h}{6}\left(G + 4 \cdot \frac{1}{4}\,G + 0\right) = \frac{2}{6}\,G\,h = \frac{1}{3}\,G\,h.$$

Ist die Grundfläche, wie in Fig. 130, ein Kreis, so entsteht der Kreiskegel mit der Grundfläche πr^2 und dem Inhalt

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Grundfläche gelegten Querschnitt Q in der Höhe y als Funktion von y aus. Dann muß der Querschnittsinhalt die Form haben

$$Q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

wo a, b, c, d Konstanten sind und y nur mit positiven ganzen Exponenten bis 3 vorkommt.

Endlich soll noch die Kugel berechnet werden. Da sind, wie Fig. 131 zeigt, sowohl die Grund- als auch die Deckfläche zu einem Punkt zusammengeschrumpft, also 0. Der Mittelschnitt ist ein Kreis, dessen Radius zugleich der Kugelradius ist, und die Höhe ist der Durchmesser der Kugel. Also ist der Inhalt

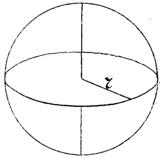


Fig. 131.

$$V = \frac{2r}{6}(0 + 4\pi r^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die Oberfläche der Kugel genau so groß ist wie der Mantel des umbeschriebenen Zylinders, wie er in Fig. 132 gezeichnet ist; also nach dem schon oben Gesagten

$$F = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2,$$

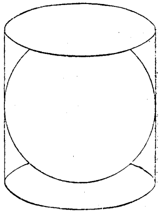


Fig. 132.

da die Höhe des Zylinders $2r$ ist. Ferner kann auch noch in einfacher Weise der Mantel des geraden Kreiskegels, also eines solchen, dessen Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Grundkreises liegt, berechnet werden. Schneidet man diesen Mantel auf und breitet ihn in einer Ebene aus, so erhält man den in Fig. 133 gezeichneten Kreisausschnitt. Dessen Inhalt ist aber $M = \frac{1}{2} 2\pi r s = \pi r s$.

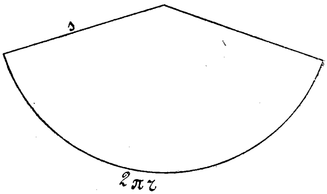


Fig. 133.

Denn der Inhalt eines Kreisausschnitts wird wie der eines Dreiecks berechnet.[1]) Die Grundlinie ist der Kreisbogen, der hier gleich dem Umfang des Grundkreises von dem Kegel ist, und die Höhe ist der Radius des Kreisbogens, also hier die Seitenlinie s des Kegels.

6. Das Volumen beliebig geformter Körper. Soll das Volumen eines Körpers ganz beliebiger Gestalt bestimmt werden, so kann man annähernd zum Ziele kommen, wenn man ihn möglichst genau aus Körpern der oben besprochenen Art zusammengesetzt denkt. Damit kommt man in vielen Fällen aus, wo es sich nur um überschlägliche Berechnung handelt. Liegt ein fertiger Körper vor, so bleibt jene alte Methode, die schon Archimedes verwendete, als er die Krone des Hiero von Syrakus untersuchen sollte. Man füllt ein Gefäß genau bis zum

1) Man kann den Kreisausschnitt in lauter schmale Dreiecke von gleicher Höhe zerlegt denken, die man addiert.

Rande mit Wasser und taucht dann den Körper hinein. Der Körper verdrängt eine Wassermenge, die genau gleich seinem eigenen Volumen ist. Die übergeflossene Wassermenge wird deshalb abgemessen oder abgewogen, dann ist auch das gesuchte Volumen bekannt. Bestimmt man nämlich das Gewicht in Kilogramm, dann erhält man sofort das Volumen in Kubikdezimetern, denn 1 cdm Wasser wiegt ja 1 kg; hat man in Gramm gewogen, so ist das Volumen in Kubikzentimetern bekannt, weil 1 ccm Wasser 1 g wiegt. So besitzt man auch für die Körperberechnung eine Methode, die auf jeden noch so komplizierten Körper anwendbar ist. Bei der Herstellung des Körpers muß freilich ein Material verwendet werden, das nicht im Wasser löslich ist. Andernfalls bliebe immer noch die Möglichkeit, eine andere geeignete Flüssigkeit statt Wasser zu wählen, von der man dann wissen muß, wievielmal schwerer oder leichter sie als Wasser ist.

Sachverzeichnis.

Teubners kleine Fachwörterbücher

geben rasch und zuverlässig Auskunft auf jedem Spezialgebiete und lassen sich je nach den Interessen und den Mitteln des einzelnen nach und nach zu einer Enzyklopädie aller Wissenszweige erweitern.

„Mit diesen kleinen Fachwörterbüchern hat der Verlag Teubner wieder einen sehr glücklichen Griff getan. Sie ersehen tatsächlich für ihre Sondergebiete ein Konversationslexikon und werden gewiß großen Anklang finden." **[Die Warte.]**

„Wer ist jetzt in der Lage, teuere Nachschlagebücher zu kaufen? Wie viele aus den Reihen der Volkshochschulbesucher verlangen nach Handreichungen, die das Studium der Natur- und Geisteswissenschaften ermöglichen. Die Erklärungen sind sachlich zutreffend und so kurz als möglich gegeben, das Sprachliche ist gründlich erfaßt, das Wesentliche berücksichtigt. Die Bücher sind eine glückliche Ergänzung der Bändchen „Aus Natur und Geisteswelt" des gleichen Verlags. Selbstverständlich ist dem neuesten Stande der Wissenschaft Rechnung getragen." **[Pädagog. Arbeitsgemeinschaft.]**

„Diese handlichen Nachschlagebücher bieten nach Form und Inhalt Vorzügliches und werden sich, wie zu erwarten steht, in unseren Volksbüchereien schnell einbürgern." **[Blätter für Volksbibliotheken.]**

Bisher erschienen:

Philosophisches Wörterbuch. 2. Aufl. V. Studienrat Dr. P. Thormeyer. (Bd. 4.) geb. M. 36.—

Psychologisches Wörterbuch von Privatdozent Dr. Fritz Giese. (Bd. 7.) geb. M. 32.—

Wörterbuch zur deutschen Literatur von Studienrat Dr. H. Röhl. (Bd. 14.) geb. M. 36.—

***Musikalisches Wörterbuch** von Privatdoz. Dr. J. H. Moser. (Bd. 12.)

***Wörterbuch zur Kunstgeschichte** von Dr. H. Vollmer.

Physikalisches Wörterbuch v. Prof. Dr. G. Berndt. (Bd. 5.) geb. M. 36.—

***Chemisches Wörterbuch** von Privatdozent Dr. H. Remy. (Bd. 10.)

***Astronomisches Wörterbuch** v. Observator Dr. H. Naumann. (Bd. 11.)

Geologisch-mineralogisches Wörterbuch von Dr. C. W. Schmidt. (Bd. 6.) geb. M. 36.—

Geographisches Wörterbuch v. Prof. Dr. O. Kende. I. Allgem. Erdkunde. (Bd. 8.) geb. M. 36.—. *II. Wörterbuch d. Länder- u. Wirtschaftskunde. (13.)

Zoologisches Wörterbuch von Dir. Dr. Th. Knottnerus-Meyer. (2.) geb. M. 32.—

Botanisches Wörterbuch von Dr. O. Gerke. (Bd. 1.) geb. M. 32.—

Wörterbuch der Warenkunde von Prof. Dr. M. Pietsch. (Bd. 3.) geb. M. 36.—

Handelswörterbuch von Handelsschuldir. Dr. V. Sittel u. Justizrat Dr. M. Strauß. Zugleich fünfsprachiges Wörterbuch, zusammengestellt von V. Armhaus, verpfl. Dolmetscher. (Bd. 9.) geb. M. 36.—

* in Vorbereitung bzw. unter der Presse (1922)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preisänderung vorbehalten

Teubners
Naturwissenschaftliche Bibliothek

Serie A. Für reifere Schüler, Studierende und Naturfreunde

Alle Bände sind reich illustriert und geschmackvoll gebunden

Große Physiker. Von Joh. Keferstein. Mit 12 Bildnissen . . . . . . M. 27.—

Physikalisches Experimentierbuch. Von H. Rebenstorff. In 2 Teilen. I. Teil. 2. Aufl. Mit 99 Abbildungen M. 34.50. II. Teil. Mit 87 Abbildungen . M. 27.—

Chemisches Experimentierbuch. Von K. Scheid. In 2 Teilen. I. Teil. 4. Aufl. Mit 77 Abbildungen. M. 27.—. II. Teil. 2. Aufl. Mit 51 Abbildungen . M. 30.-

An der Werkbank. Von E. Gscheidlen. Mit 110 Abbildungen u. 44 Tafeln. M. 40.—

Hervorragende Leistungen der Technik. Von K. Schreber. Mit 56 Abb. M. 20.—

Vom Einbaum zum Linienschiff. Streifzüge auf dem Gebiete der Schiffahrt und des Seewesens. Von K. Radunz. Mit 90 Abbildungen. . . . . M. 18.—

Die Luftschiffahrt. Von R. Nimführ. Mit 99 Abbildungen . . . . . M. 15.—

Aus dem Luftmeer. Von M. Sassenfeld. Mit 40 Abbildungen . . . . . M. 15.—

Himmelsbeobachtung mit bloßem Auge. Von F. Rusch. 2. Aufl. Mit 30 Figuren und 1 Sternkarte . . . . M. 30.-

An der See. Geogr.-geologische Betrachtungen. Von P. Dahms. Mit 61 Abb. M. 12.-

Küstenwanderungen. Biologische Ausflüge. Von V. Franz. Mit 92 Fig. M. 13.50

Geologisches Wanderbuch. Von K. G. Volk. 2 Teile. I. 2. Aufl. Mit 201 Abb. u. 1 Orientierungstafel. M. 54.-. II. 2. Aufl. Mit zahlr. Abb. [U. d. Pr. 22.]

Große Geographen. Bilder aus der Geschichte der Erdkunde. Von F. Lampe. Mit 6 Porträts, 4 Abb. u. Kartenskizze. M. 27.—

Geographisches Wanderbuch. Von A. Berg. 2. Aufl. Mit 212 Abb. M. 33.-

Anleitung zu photographischen Naturaufnahmen. Von G. E. F. Schulz. Mit 41 photographischen Aufnahmen. M. 33.-

Vegetationsschilderungen. Von P. Gräbner. Mit 40 Abbildungen . . M. 11.25

Unsere Frühlingspflanzen. Von Fr. Höck. Mit 76 Abbildungen . . M. 18.—

Große Biologen. Bilder aus der Geschichte der Biologie. Von W. May. Mit 21 Bildnissen . . . . M. 20.—

Biologisches Experimentierbuch. Anleitung zum selbständigen Studium der Lebenserscheinungen für jugendliche Naturfreunde. Von C. Schäffer. Mit 100 Abbildungen . . . . M. 30.-

Insektenbiologie. Von Chr. Schröder. [U. d. Presse 1922.]

Erlebte Naturgeschichte. Von C. Schmitt. 2. Aufl. Mit 35 Abb. i. Text. Kart. M. 33.-

Serie B. Für jüngere Schüler und Naturfreunde.

Physikalische Plaudereien f. die Jugend. Von L. Wunder. Mit 15 Abbildungen. Kart. . . . . M. 10.-

Chemische Plaudereien für die Jugend. Von L. Wunder. Mit 5 Abbildungen. Kart. . . . . M. 10.-

Mein Handwerkszeug. Von O. Frey. Mit 12 Abbildungen . . . Kart. M. 8.—

Vom Tierleben in den Tropen. Von K. Guenther. Mit 7 Abb. Kart. M. 8.—

Versuche mit lebenden Pflanzen. Von M. Oettli. Mit 7 Abb. Kart. M. 8.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preisänderung vorbehalten

Teubners Künstlersteinzeichnungen

Wohlfeile farbige Originalwerke erster deutscher Künstler fürs deutsche Haus

Die Sammlung enthält jetzt über 200 Bilder in den Größen 100×70 cm (M. 60.-), 75×55 cm (M. 50.-), 103×41 cm (M. 30.-), 60×50 cm (M. 40.-), 55×42 cm (M. 35.-), 41×30 cm (M. 25.-). Geschmackvolle Rahmung aus eigener Werkstätte.

Neu: Kleine Kunstblätter

18×24 cm je M. 8.-. Liebermann, Im Park. Prentzel, Am Wehr. Hecker, Unter der alten Kastanie und Weihnachtsabend. Treuter, Bei Mondenschein. Weber, Apfelblüte.

Schattenbilder

K. W. Diefenbach „Per aspera ad astra". Album, die 34 Teilb. des vollst. Wandfrieses fortlaufend wiederg. (20½×25 cm) M. 80.—. Teilbilder als Wandfriese (42×80 cm) je M. 30.-, (35×18 cm) je M. 10.-, auch gerahmt in versch. Ausführ. erhältlich.

„Göttliche Jugend". 2 Mappen, mit je 20 Blatt (25½×34 cm) je M. 60.-. Einzelbilder je M. 5.-, auch gerahmt in versch. Ausführ. erhältlich.

Kindermusik. 12 Blätter (25½×34 cm) in Mappe M. 50.-, Einzelblatt M. 5.-.

Gerda Luise Schmidt (20×15 cm) je M. 4.50. Auch gerahmt in verschiedener Ausführung erhältlich. Blumenorakel. Reifenspiel. Der Besuch. Der Liebesbrief. Ein Frühlingsstrauß. Die Freunde. Der Brief an „Ihn". Annäherungsversuch. Am Spinett. Beim Wein. Ein Märchen. Der Geburtstag.

Teubners Künstlerpostkarten

(Ausf. Verzeichnis v. Verlag in Leipzig.) Jede Karte 60 Pf. Reihe von 12 Karten in Umschlag M. 6.-, jede Karte unter Glas mit schwarzer Einfassung und Schnur eckig oder oval M. 3.80. Die mit * bezeichneten Reihen auch in feinen ovalen Holzrähmchen (M. 9.- bzw. M. 10.50, eckig M. 8.30), oder in Kettenrahmen eckig oder oval (M. 5.30). **Teubners Künstlersteinzeichnungen in 12 Reihen. Teubners Künstlerpostkarten nach Gemälden neuerer Meister.** 1. Macco, Maienzeit. 2. Köselitz, Sonnenblick. 3. Buttersack, Sommer im Moor. 4. Hartmann, Sommerweide. 5. Kühn jr., Im weißen Zimmer. In Umschlag M. 3.— ***Diefenbachs Schattenbilder in 7 Reihen.** (Kindermusik, je M. —.60, Reihe M. 6.-). **Aus dem Kinderleben,** 6 Karten nach Bleistiftzeichn. von Hela Peters. 1. Der gute Bruder. 2. Der böse Bruder. 3. Wo drückt der Schuh? 4. Schmeichelkätzchen. 5. Püppchen, aufgepaßt! 6. Große Wäsche. In Umschlag M. 4.50. ***Schattenrißkarten** von Gerda Luise Schmidt: 1. Reihe: Spiel und Tanz, Fest im Garten, Blumenorakel, Die kleine Schäferin, Belauschter Dichter, Rattenfänger von Hameln. 2. Reihe: Die Freunde, Der Besuch, Im Grünen, Reifenspiel, Ein Frühlingsstrauß, Der Liebesbrief. 3. Reihe: Der Brief an „Ihn", Annäherungsversuch, Am Spinett, Beim Wein, Ein Märchen, Der Geburtstag. Jede Reihe in Umschlag M. 3.-.

Rudolf Schäfers Bilder nach der Heiligen Schrift

Der barmherzige Samariter (M. 50.-), Jesus der Kinderfreund (M. 40.-), Das Abendmahl (M. 50.-), Hochzeit zu Kana (M. 40.-), Weihnachten (M. 50.-), Die Bergpredigt (M. 40-) (75×55 bzw. 60×50 cm).

Diese 6 Blätter in Format 23×30 unter dem Titel **Biblische Bilder** in Mappe M. 50.-, als Einzelblatt je M. 10.- (Auch als „Kirchliche Gedenkblätter" und als „Glückwunsch- u. Einladungskarten" erhältlich.)

Karl Bauers Federzeichnungen

Führer und Helden im Weltkrieg. Einzelne Blätter (28×36 cm) M. 3.-
2 Mappen, enthaltend je 12 Blätter, je . . . . . . M. 12.-

Charakterköpfe zur deutschen Geschichte. Mappe, 32 Bl. (28×36 cm) M. 45.-,
12 Bl. M. 18.-, Einzelblätter . . . . . . M. 3.-

Aus Deutschlands großer Zeit 1813. In Mappe, 16 Bl. (28×36 cm) M. 18.-,
Einzelblätter . . . . . . M. 3.-

Vollständiger Katalog üb. künstl. Wandschmuck mit farb. Wiedergabe von über 200 Blättern gegen Einsend. von M. 8.50 oder gegen Nachn. (M. 10.-) v. Verlag in Leipzig, Poststr. 3, erhältlich

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preisänderung vorbehalten