Abhandlungen zur Sammlung Mathematischer Modelle

ABHANDLUNGEN

ZUR SAMMLUNG MATHEMATISCHER MODELLE

HERAUSGEGEBEN VON

HERMANN WIENER
IN DARMSTADT

ZWEITES HEFT

REIHE 31—48 DER MODELLSAMMLUNG VON P. TREUTLEIN

INHALTSÜBERSICHT

Abhandlungen von P. Treutlein in Karlsruhe

Vorbemerkung . . . . . S. 1
Über mathematischen Anschauungsunterricht . . . . . „ 3
Über mathematische Modelle und deren Verwendung im Unterricht . . . . . „ 7
Erläuterungen zu den Reihen und zu den einzelnen Modellen der Treutleinschen Sammlung. . . . . „ 10

LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

H. Wiener und P. Treutlein's

Sammlung mathematischer Modelle

für Hochschulen,
höhere Lehranstalten und technische Fachschulen

Die Modelle sind für den geometrischen Unterricht bestimmt und sollen dem Lernenden Raumformen und geometrische Beziehungen durch einfache und übersichtliche Darstellung anschaulich machen. Das Preisverzeichnis mit Figuren und Tafeln nach photographischen Aufnahmen der Modelle ist durch den Verlag unberechnet zu beziehen.

Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle

In zwanglosen Heften herausgegeben von

Hermann Wiener
in Darmstadt.

1. Heft.

[91 S.] gr. 8. 1907. Geh. ℳ 3.—

Die „Abhandlungen" geben zunächst dem Lehrer alles das an die Hand, was zum erfolgreichen Gebrauch der Modelle nötig ist: Anleitungen zur Handhabung und Hinweise auf die Verwendbarkeit im Unterricht, auf diejenigen mathematischen Sätze, die durch sie erläutert werden können, und auf die einschlägige Literatur. So sollen die Abhandlungen, wie die Modelle selbst, dem unmittelbar anschauenden Denken immer mehr Eingang verschaffen helfen, und darüber hinaus auf scharfe geometrische Begriffsbildung und Anwendung zweckentsprechender und reiner Methoden hinweisen.

Inhalt: Vorbemerkung. — Über mathematische Modelle und ihre Verwendung im Unterricht. — Zur Projektion einiger ebenen Figuren. — Die fünf regelmäßigen Vielflache Platons. Regelmäßigkeit in einer Gruppe. — Regelmäßige Vielstrahlen und geschlossene Spiegelsysteme. — Die regelmäßigen Vielflache, abgeleitet aus ihrer Gruppe. — Wie sollen Flächen, insbesondere die der zweiten Ordnung, gezeichnet werden? — Über Flächen zweiter Ordnung. — Bewegliche Fadenmodelle der Regelflächen zweiter Ordnung mit gleichbleibenden Fadenlängen. — Bewegliche Stabmodelle zur Überführung einer Fläche zweiter Ordnung in konfokale Flächen.

Abhandlungen

zur

Sammlung mathematischer Modelle

herausgegeben von

HERMANN WIENER.

Zweites Heft, Reihe 31 – 48 der Modellsammlung von P. Treutlein.

Vorbemerkung.

Die mathematischen Modelle, deren Erläuterung die nachfolgende Abhandlung gewidmet ist, sind aus vieljährigem und vielfältigem Unterricht heraus erwachsen, um dem Bedürfnis möglichster Anschaulichkeit mathematischer, zumal geometrischer Dinge zu genügen. So sind die Gestaltungen von einigen derselben schon seit mindestens drei Jahrzehnten bei mir in ständigem Gebrauch, und andere sind dann im Verlauf der Jahre hinzugekommen. So bietet sich jetzt die ganze Sammlung in nicht weniger als 18 Reihen dar.

Mit und neben mir haben im Verlauf der vielen Jahre nicht wenige Fachlehrer diese Modelle ebenfalls benützt, und, wie von allen bestätigt, durchweg mit gutem Erfolge: alle Beteiligten, Lehrer wie Schüler, haben die große Beihilfe anerkannt, welche Modelle überhaupt und die hier zu erläuternden im besonderen, *in richtiger Weise gebraucht*, beim mathematischen Unterricht aller Stufen zu gewähren vermögen. Beweis dessen ist auch die öfter wiederholte Nachbildung und Einführung, welche eine größere Anzahl meiner Modelle seit Jahren in nächst benachbarten Kreisen gefunden hat und zwar dies wie in Knaben-, so auch in Mädchenschulen.

Auch Professor Dr. H. WIENER in Darmstadt, dem Herausgeber der bekannten im Teubnerschen Verlag erschienenen größeren Sammlung von solchen mathematischen Modellen, die wesentlich für den Unterricht an Hochschulen bestimmt sind, erschien die Verwendbarkeit und Nützlichkeit der von mir entworfenen, zur Ausführung gebrachten und benützten Modelle einleuchtend, und er bestimmte mich dazu, meine Modelle als eine Abteilung, als gewissermaßen eine Unterstufe seiner eigenen Sammlung von Modellen zu veröffentlichen. Ich stimmte dem um so lieber zu, als die bekannte und um den gesamten mathematischen wie sonstigen Unterricht so verdiente Verlagshandlung von B. G. TEUBNER in Leipzig die Wiedergabe, die Vervielfältigung und den Vertrieb auch meiner Modelle in ihren Verlag mitübernahm.

In der Herrn Wiener gegebenen Einwilligung wurde ich bestärkt, als ich auf die gütige Anregung von Herrn Geh. Rat Professor Dr. F. KLEIN in Göttingen die Gelegenheit erhielt, wenigstens eine Auswahl meiner Modelle einem größeren Kreise von Sachverständigen vorzuführen: in dem von Klein angeregten und durch die Kgl. preußische Regierung unterstützten und geförderten Fortbildungskurs für Oberlehrer und Oberlehrerinnen, der im Oktober 1909 zu Göttingen abgehalten wurde, habe ich Art und Gebrauch der Modelle erläutert, und ich hatte die Genugtuung, daß die in der ungefähren Zahl von 80 anwesenden Zuhörer und Zuhörerinnen sowie der Leiter des Kurses, Herr Geh. Rat Klein, sich nicht nur mit diesen meinen Modellen und Hilfsmitteln und mit der von mir vorgetragenen Art der Verwendung zufrieden äußerten, sondern auch den Wunsch nach deren Veröffentlichung kundgaben. Das Gleiche durfte ich erfahren, als ich bei dem gelegentlich der Brüsseler Weltausstellung abgehaltenen Internationalen Mathematischen Unterrichtskongreß (11. und 12. August 1910) in Brüssel einen Vortrag gehalten hatte über geometrischen Anschauungsunterricht, und als ich im Anschluß daran ebenfalls eine Auswahl der einschlägigen Modelle vorgeführt und vor der internationalen sachverständigen Zuhörerschaft deren Verwendung dargelegt hatte: auch hier wurde von verschiedenen Seiten der Wunsch nach Veröffentlichung geäußert.

Diesen und auch sonst vielfach seit Jahren an mich gekommenen Wünschen entspreche ich jetzt, indem ich meine Sammlung von Modellen der Öffentlichkeit übergebe. Möchte die richtige Verwendung der hier gebotenen Hilfsmittel dem mathematischen Unterricht aller Schulgattungen und aller in Betracht kommenden Stufen reichlichen Nutzen bringen!

Auch die hier folgende „Abhandlung" möchte als eine wesentliche Ergänzung zu den Modellen selbst aufgefaßt sein; sie soll über die Bedeutung und Art und reichliche Verwertung der Anschauung im mathematischen Unterricht Auskunft geben; sie soll, soweit nötig, Anleitung gewähren zur Handhabung der Modelle und soll die Art des methodischen Betriebes bei deren Verwendung aufzeigen.

Wer ausführlichere Belehrung und Auskunft zu erhalten wünscht über Geschichte, theoretische Begründung und praktische Gestaltung des bezüglichen Unterrichtsstoffes, mag solche finden in der von mir im gleichen Verlag 1911 herausgegebenen Schrift: „Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen Unterrichts in Geometrie."

Karlsruhe, August 1911.

P. TRE UTLEIN.

1. Über mathematischen Anschauungsunterricht.

Der mathematische Unterricht auf allen Stufen beschäftigt sich mit den Zahlgrößen und mit den Raumgrößen und mit den sie beherrschenden Gesetzen. Beiderlei Gebilde sind Abstraktionen unseres Geistes, in ihren Grundlagen und einfachsten Bildungen zunächst abgeleitet aus der Welt der natürlichen Dinge, in den Anfängen unbewußt — „auch die Ente zählt ihre Jungen" — weiterhin mit mehr und mehr steigendem Bewußtsein gebildet, verknüpft und in Klarheit und Schärfe ausgestaltet, schließlich in den höchsten Gebieten der Abstraktion zu beinahe geisterhaften Denkwesen weitergeführt.

Der Zahlbegriff ist ja entstanden aus der Tatsache des Nebeneinanderbestehens der Dinge und Vorgänge im Raum und ihres Nacheinandererscheinens in der Zeit, aus dem zunächst unbewußten Versuch, für diese eine Ordnung herzustellen, eine Anordnung zu gewinnen zur Wiederauffindung des einzelnen sowie zur Verknüpfung all der vielen Einzeldinge und zu deren Zusammenfassung unter höhere Einheiten.

Auch die geometrischen Vorstellungen und Begriffe sind Abstraktionen, abgeleitet aus der Welt der natürlichen Dinge, indem der menschliche Geist deren Unvollkommenheiten und Beschränktheiten abstreift, um sie in reiner und vollkommener Nachbildung in das Gebiet des durchaus Geistigen zu erheben und sie hier zu neuem Leben zu erwecken.

Der in dieses unbegrenzte Gebiet von Abstraktionen einzuführende Schüler, ja auch der zu einem gewissen höheren Standpunkt Gebrachte und von da Weiterzuführende muß oder sollte — das liegt im Wesen der Sache — beim Unterricht stets an die Quelle gewiesen werden, aus welcher der unendliche Reichtum mathematischer Begriffe und Gedanken entsprungen ist, an die sinnliche Wahrnehmung der Außenwelt, an die Beobachtung der körperlichen Dinge und die an ihnen auftretenden Erscheinungen und Vorgänge.

So führt also schon die theoretische Betrachtung, der Rückblick und die Überschau über das Zustandekommen der mathematischen Grundvorstellungen und Grundbegriffe zu der Forderung, daß der

in diese neue eigenartige Welt Einzuführende dazu angehalten und absichtlich in zielbewußter Weise so geleitet werde, daß auch er von der Beobachtung der Außenwelt, von der Betrachtung und Vergleichung der körperlichen Dinge ausgehe; die durch unmittelbare sinnliche „Anschauung" gewonnenen Auffassungen und Vorstellungen sind dann in der inneren Anschauung zu wiederholen, und in öfterer Wiederholung und steter Übung ist weiterhin die Befähigung zu gewinnen und auszubilden, nun auch bei untätigen Sinnen, allein in Verwertung der gebildeten inneren Anschauungen diese miteinander zu verknüpfen und so durch Sonderung, scharfe Erkennung und Festlegung ihrer unterscheidenden und ihrer gemeinsamen Merkmale zur Aufstellung der bezüglichen Begriffe zu gelangen, auch diese wiederum miteinander zu verbinden und aus einzelnen gewonnenen Begriffsverknüpfungen oder Urteilen in streng logischer Weise zur Ableitung neuer Urteile, also zur Begründung von Wahrheiten und zur Aufstellung eines wissenschaftlichen Systems zu gelangen.

Diesen Weg von den einfachsten Anfängen unbewußten Erfassens bis zu den höchsten Höhen abstrakten Denkens haben die uns vorangegangenen Geschlechter im Verlaufe langer Zeit und unter Aufbietung großer und mannigfaltiger geistiger Arbeit zurückgelegt. Entsprechend dem auch in geistiger Hinsicht im wesentlichen geltenden biogenetischen Grundgesetz muten wir den heranwachsenden Zöglingen unserer Kulturstufe zu, jenen Weg, wenn auch nicht in seiner vielfachen Verschlungenheit und in seinem abwechselnden Voran- und Rückwärtsführen, so doch in seinem aufwärts führenden Hauptgang ebenfalls zu durchlaufen. Wenn diese Wanderung aber gemäß allgemeiner Ansicht ins Werk gesetzt und mit begründeter Aussicht auf Erfolg durchgeführt werden soll, so muß behufs Gewöhnung an den aufsteigenden Marsch zumal der Beginn des Weges langsam durchschritten werden oder — in anderem Bilde — die Grundlagen des aufzuführenden Gebäudes, dessen Grundmauern müssen genügend breit angelegt und hinreichend fest ausgeführt werden, um auf ihnen das hochstrebende Gebäude zu errichten und zu gegebener Zeit selbst dessen Erweiterung zu ermöglichen.

Auf unseren vorliegenden Fall angewandt heißt dies nichts anderes als dem, der die Anfänge mathematischen Unterrichts zu lehren hat, die Verpflichtung aufzuerlegen, nicht bloß langsam und in wohl durchdachtem Aufbau seines Unterrichtes vorzugehen, sondern ganz besonders stets auf die Erwerbung und reichliche Ausnützung passender sinnlicher Anschauungen seiner Schüler bedacht zu sein. Seit Pestalozzi tut dies die Volksschule in ihrem Rechen-

unterricht in ausreichendem Maße. Die höhere Schule hat das Entsprechende in ihrem geometrischen Unterricht zu tun bislang meistens oder vielfach versäumt, und sie ist erst seit kürzerer Zeit dazu übergegangen oder ist mancherorts, zumal auf Mahnung der sog. Meraner Vorschläge, sogar erst im Begriffe dazu überzugehen, jener eindringlichen Lehre Geltung zu verschaffen und wie im geometrischen Unterricht überhaupt, so besonders in dessen Anfängen das räumliche Anschauungsvermögen zu pflegen, d. h. in erster Reihe dafür zu sorgen, daß vor der mehr oder minder rein und scharf deduktiv logischen Behandlung des Lehrstoffes zunächst eine reichliche und auch geordnete Sammlung von entsprechenden Erfahrungstatsachen, von Beobachtungen und zweckentsprechend geleiteten Versuchen vorhanden sei. Erst diese in ihrer Gesamtheit vermag in der inneren Anschauung des Lernenden die nötige Menge von Stoff niederzulegen, der weiterhin verwertet, gestaltet, kurz wissenschaftlich bearbeitet werden soll; nur jene zahlreichen und mannigfaltigen Vorübungen vermögen gleichzeitig die so wünschenswerte und im weiteren Unterricht so sehr erforderliche Auffassung von Zahl, Form und Lage als veränderlicher Dinge allmählich auszubilden und als Grundtatsachen geistiger Betrachtung einzuprägen.

Schon auf Grund theoretischer Erwägungen also war die vorgetragene Auffassung festzustellen, und vorerst nur von ihnen ausgehend konnten wir schon die genannte Hauptforderung für den Betrieb des mathematischen Unterrichtes aussprechen.

Zu demselben Ergebnis und zur selben Forderung kommt man aber auch auf Grund der vielen praktischen Schulerfahrungen des letzten Jahrhunderts, seitdem die Mathematik nicht mehr bloß des gemeinen Nutzens willen, sondern wiederum als Hilfsmittel allgemeiner geistiger Ausbildung im Vereine der Unterrichtsfächer betrieben wird. Ein kurzer geschichtlicher Rückblick mag hier herangezogen werden, um die Richtigkeit unserer Forderung zu erweisen.

Jahrhundertelang hatte man die Geometrie gemäß der Schrift des Boetius und seiner Nachfolger rein äußerlich gelehrt. Dann, etwa gleichzeitig mit Pestalozzis Bestrebungen, beim Rechenunterricht, zumal in dessen Grundlegung, der Anschauung zu ihrem Rechte zu verhelfen, ging man beim Geometrieunterricht auf den alten Euklid selbst als Lehrbuch zurück: als Stoff wurde das erste, im Fortschreiten der Anforderungen das zweite Buch usw. durchgenommen und (unter Auslassung der arithmetischen Bücher) wurden gegen Ende des Unterrichtes auch die Raumgebilde der letzten Bücher Euklids herbeigezogen. So sind zwei auffällige Erscheinungen unseres Unter-

richtswesens nur geschichtlich zu erklären: *erstens* die Tatsache, daß lange Zeit allgemein und jetzt noch ziemlich verbreitet der Unterricht über Raumgebilde gegen das Ende des höheren Unterrichtes gerückt ist, so daß erst der Primaner — und doch wie wenige von allen in Sexta Eingetretenen gelangen bis zur Prima! — so daß also gar oft erst der Primaner von Dingen erfährt, die naturgemäß viel früher behandelt werden müßten und deren Kenntnis von jedem Abiturienten und jeder Abiturientin der einfachen Volksschule verlangt wird. Und noch ein *zweites* auffälliges Merkmal des Geometrieunterrichtes unserer höherer Schulen, zumal heute noch unserer Gymnasien, ist ebenfalls nur als geschichtlich Gewordenes und so nach Überlieferung festgehalten zu erklären, das ist das nach Euklidschem Muster durchgeführte dogmatische Lehrverfahren, das freilich seit einigen Jahrzehnten durch einen mehr und mehr eingeschobenen sog. heuristischen Zwischenbetrieb etwas gemildert worden ist. Aber stets noch verlangt jenes Lehrverfahren, daß mit dem neu an die Schüler herantretenden Stoff, d. i. mit der Auffassung von Gestalt und Lage der abstrakten geometrischen Gebilde zugleich auch deren „wissenschaftliche" Behandlung erfolgen soll, d. h. daß die „Lehrsätze" nach der Folge von Voraussetzung, Behauptung, Beweis abgehandelt und eingeprägt werden und daß ihnen die „Aufgaben" als Nutzanwendungen nachfolgen. Unzweifelhaft — denn alle Erfahrungen der Schulwelt bestätigen das — unzweifelhaft wird so im allgemeinen dem jugendlichen Geiste zuviel zugemutet, so daß entweder die gewünschten Erfolge in Einzelkenntnis und in Allgemeinbildung ausbleiben, ja auch der mathematische Unterricht vielen zum Schrecken und selbst Abscheu wird, oder daß (wie s. Zt. beim Stuttgarter Realgymnasiumsdirektor Dillmann) das Verlangen auftritt, der geometrische Unterricht könne und solle erst in einem vorgeschritteneren Alter mit der Schuljugend begonnen werden, d. h. die Weckung der Freude an und des Verständnisses für Raumformen solle gerade dem Alter entzogen bleiben, in welchem der Formsinn am entwickelungsfähigsten und am besten zu pflegen ist.

So ergibt sich also erneut die Berechtigung unserer Forderung, daß im früheren jugendlichen Alter, also etwa mit dem Eintritt in das 10. oder 11. Lebensjahr, d. i. also etwa mit dem Beginn der Quintaklasse unserer höheren Schulen, ein durch längere Zeit hin zu erteilender sog. propädeutischer geometrischer Unterricht ein- und durchgeführt werden soll, der unter steter Selbsttätigkeit des Schülers diesem eine reiche Fülle von Anschauungsstoff vermittelt und der zugleich in langsam ansteigendem Fortschreiten die Fähig-

keit zu mehr abstraktem Denken im Schüler entwickelt und ihn so auf die strenge logische Behandlung mathematischer Dinge vorbereitet, ihn auch befähigt, falls er nicht zu höheren Studien vorschreitet, das zunächst für das tägliche geschäftliche Leben notwendige mathematische Wissen und Können zu besitzen.

2. Über mathematische Modelle und deren Verwendung im Unterricht.

Schon im ersten Heft seiner „Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle" (1907, S. 3—8) hat sich Professor H. Wiener über den in der Überschrift genannten Gegenstand ausgesprochen. Seine Bemerkungen betreffen im wesentlichen die Art, Einzelausführung und Verwendung mathematischer Modelle im Unterrichte der Hochschulen, also für vorgebildete und vorgeschrittenere Schüler reiferen Alters; aber er weist auch darauf hin, daß gewisse verwickeltere Modelle selbst der Forschung wesentliche Dienste zu leisten vermögen, wie dies ja von Plückers bezüglicher Tätigkeit und von Chr. Wieners erstmals angefertigtem Modell einer Fläche dritter Ordnung mit ihren 27 reellen Geraden bekannt ist.

Wenn schon für die Hochschulen mit ihren durch jahrelangen Vorunterricht und reichliche Übung gestärkten und — so sollte man meinen — in der inneren Anschauung hinreichend ausgebildeten Schülern höheren Alters die Verwendung von Modellen im Unterricht nicht nur als fördersam, sondern als durchaus notwendig erachtet wird[1]) und erachtet werden muß, so ist eine Verwendung von Modellen im mathematischen Unterricht noch um so notwendiger und zwingender innerhalb der höheren Schulen mit ihren jüngeren, noch ungeübten und zur Ausbildung ihres Anschauungsvermögens erst noch zu erziehenden Schülern und Schülerinnen zum Teil ganz jugend-

[1]) So sagt Boltzmann (Katalog mathem. u. math.-physikal. Modelle usw., hrsgg. von W. Dyck, München 1892, S. 59f.); „In der Mathematik und Geometrie war es zunächst unzweifelhaft das Bedürfnis nach Arbeitersparnis, welches von den rein analytischen wieder zu den konstruktiven Methoden, sowie zur Veranschaulichung durch Modelle führte . . . . Das Bedürfnis nach der äußersten Ausnutzung der Mittel unserer Auffassungskraft existiert, und da wir mit dem Auge die größte Fülle von Tatsachen auf einmal erfassen (wir sagen charakteristisch genug „übersehen") können, so folgt hieraus das Bedürfnis, die Resultate des Kalkuls anschaulich zu machen und zwar nicht bloß für die Phantasie, sondern auch sichtbar für das Auge, greifbar für die Hand, mit Gips und Pappe. Wie wenig geschah in dieser Beziehung noch in meinen Studienjahren!"

lichen Alters. Und doppelt kräftig muß diese Forderung nach passender, gewohnheitsmäßiger und öfterer Verwendung von Modellen als Anschauungshilfsmittel im mathematischen Unterricht aller Klassen aller Schulen erhoben und muß die Erfüllung dieser Forderung verlangt werden, als gemäß den sog. Meraner Vorschlägen von 1906 „die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens" als eines der Hauptziele für den neuzeitlichen mathematischen Unterrichtsbetrieb aufgestellt und als solches von der Mehrzahl der Lehrer und von allen neueren Lehrplänen gebilligt wird.

Freilich, so wie ganz im allgemeinen für uns Lehrer die Aufgabe besteht und als solche stets beachtet und gelöst werden sollte, uns selbst schließlich für unsere Schüler unnötig zu machen, ganz so muß es mit den genannten Modellen gehalten werden: durch ihren vernünftigen Gebrauch müssen die Modelle je im Verlauf jedes Lehrabschnittes und schließlich am Ende des Gesamtunterrichtes unnötig geworden sein und müssen verschwinden. Denn welches sind die zwei Hauptzielpunkte eines guten mathematischen Unterrichtes? Doch wohl einerseits die Herausbildung einer genügenden Fähigkeit zur Abstraktion im Gebiete der Zahlen wie der Raumformen, also im geometrischen Gebiet die Schaffung räumlichen Anschauungsvermögens, und anderseits die Weckung und Erzielung der Einsicht in die logischen Zusammenhänge der mathematischen Gedanken.

Damit aber jene notwendige Abstraktion einsetzen und sich ausbilden kann und damit die gewünschte logische Bewältigung der mannigfaltigen Beziehungen des Denkstoffes sich einzustellen vermag, bedarf es der Beschaffung einer genügend reichlichen Menge von Stoff an Erfahrungstatsachen, eines fertig vorliegenden, durch Selbstarbeit des Schülers aus eigenster sinnlicher Wahrnehmung gewonnenen Beobachtungsstoffes sowie des Bewußtseins vom Vorhandensein solchen Stoffes.

Dies alles kann aber nur durch Wahrnehmung und geordnete Beobachtung von Dingen der Außenwelt beschafft werden. Diese letzteren bieten aber fast durchweg den doppelten Mißstand dar, daß sie miteinander in Zusammenhang stehen und so nicht losgelöst und für sich allein gut betrachtet werden können, und ferner den andern in Rücksicht auf geometrische Betrachtungen schwerwiegenden, daß sie nicht vollkommene, allerseits gut ausgebildete Formen darbieten. Beiderlei Rücksichten verbieten es nahezu, machen es wenigstens nicht wünschenswert, wie dies K. von Raumer wollte, die Betrachtung von Raumformen mit der von Kristallen zu beginnen.

So bleibt also nichts anderes übrig, als künstlich zu beschaffende Nachbildungen von jenen Dingen der Außenwelt zu benützen, d. h. Modelle der natürlichen Dinge der Betrachtung zu unterziehen. Diese bieten außer den Vorteilen, daß sie als losgelöste Einzelformen jede störende Nebenbetrachtung ausschließen und daß sie nach Belieben gewählt und in beliebigen Maßen vorgeführt werden können, noch den höchst bedeutsamen Vorzug, daß sie gutenteils durch die Schüler selbst angefertigt werden können, ja angefertigt werden müssen. Nicht nur, daß hierbei die Handarbeit als solche gepflegt wird und eine Reihe von praktischen Dingen geübt und gewisse Hindernisse überwunden werden müssen, sondern solchen selbstgefertigten, wenn auch nicht vollkommenen Gebilden bringt der Schüler an sich schon größere Teilnahme entgegen, und die an ihnen als an Eigenem gewonnenen Erfahrungen, verstärkt durch entsprechende mehr oder minder übereinstimmende Erfahrungen an den Modellen der Kameraden, haften auch viel tiefer in der Seele des Lernenden und werden nachmals leichter in der Erinnerung geweckt und in das Gedächtnis zurückgerufen, wenn neu Hinzukommendes daran angefügt oder, besser gesagt, damit verwebt werden soll.

So groß die Vorteile der Selbstanfertigung von Modellen durch die Schüler auch unzweifelhaft sind, so ist mit solchen Selbsterzeugnissen allein im mathematischen Unterricht doch nicht auszukommen. Denn unvollkommen, wie sie zumal bei jüngeren Schülern ausfallen, bieten solche Modelle nicht die erwünscht reinen, von jedem störenden Beiwerk freien Verhältnisse und nicht die klaren, scharfen Formen, wie sie der Betrachtung unterstellt werden müssen. Dann aber sind eine ganze Anzahl wichtiger, besonders räumlicher Modelle durch die große Mehrzahl der Schüler nicht einwandfrei oder überhaupt nicht herzustellen, so daß schon deshalb jede Schule eine größere Anzahl, freilich zum Teil nicht billiger Modelle besitzen sollte. Ein weiterer Mißstand tritt ein, wenn etwa bei Wiederholungen mehrere in denselben Gedankenkreis gehörige Modelle gleichzeitig nebeneinander benützt werden sollen: sie sind vielleicht nicht sämtlich vorhanden, jedenfalls aber sind sie als Schülermodelle nicht in dem genügend großen Maßstabe vorhanden, um daran für die ganze Klasse bestimmte Erläuterungen und Betrachtungen anknüpfen zu können, und selbst wenn dies der Fall wäre, so besitzen jene doch wohl als Schülerarbeiten aus Papier angefertigten Flächenmodelle nicht die nötige Steifigkeit und damit nicht die wünschenswerte, ja notwendige Bequemlichkeit der Handhabung, um daran der Gesamtklasse etwas vorweisen zu können. Deutliche Beispiele hierfür liefern etwa die

weiterhin aufgeführten Modelle der 36. Reihe. Die zerschnittenen, aus losen Teilen bestehenden Papiermodelle der Schüler lassen sich zwar auf der glatten Bankfläche bequem bald so, bald so anordnen, auseinanderziehen und zu neuer erwünschter Lage zusammenfügen und anordnen; aber frei in der Luft gehalten machen sie Umstellung und Neuordnung meist unmöglich, und mit Heftnägeln an die Tafel angesteckt, was ja auch z. T. empfehlenswert ist, erfordert die Umstellung der Teile oft genug kostbare Zeit, die besser verwendet, und vielleicht auch Unruhe in der Klasse, die vermieden werden kann.

So ergibt sich also unter Abwägung aller in Betracht kommenden Verhältnisse, daß die Benützung von Modellen im mathematischen Unterricht für die große Mehrzahl der Schüler eine Notwendigkeit ist, daß auch von den Schülern selbst z. T. innerhalb des Unterrichtes unter Aufsicht und Anleitung des Lehrers, z. T. auch als Hausaufgabe in dem bezüglichen Unterricht einschlägige Modelle angefertigt werden sollen, daß aber daneben auch noch möglichst vollkommen und in genügend großem Maßstab angefertigte Modelle verschiedener Art in der Schulsammlung vorhanden sein und im Unterricht benützt werden müssen.

Solche den gestellten Forderungen genügende und vor allem für den Gebrauch in den höheren Schulen bestimmte Modelle bietet meine im Verlag von B. G. Teubner erschienene Sammlung in vorerst 18 Reihen, über die ein besonderes Verzeichnis erschienen ist, aus dem auch der Preis des einzelnen Modells sowohl wie der etwas herabgeminderte Gesamtpreis der einzelnen Modellreihen ersehen werden kann.

Um diese Sammlung von Modellen möglichst nutzbringend zu machen, soll hier nachfolgend eine kurze Beschreibung der einzelnen Reihen und Stücke gegeben werden mit Begründung, soweit nötig, der gerade so gewählten Art der Ausführung und, jeweils damit verbunden, eine knapp gefaßte Anleitung zu deren Benützung im Unterricht.

3. Erläuterungen zu den Reihen und zu den einzelnen Modellen der Treutleinschen Sammlung.

A. Modelle für den Rechenunterricht.

Der mathematische Unterricht in den Unterklassen der höheren Schulen befaßt sich wesentlich mit dem *Rechnen*; er muß aber, wenn er auch nicht eigentliche Geometrie betreiben will, schon wegen der mannigfaltigen praktischen Anwendungen des Rechnens, mindestens

einige geometrische Grundbegriffe und Grundübungen mit in sein Bereich aufnehmen. Der Beihilfe für das Rechnen ist die erste Gruppe, der für das notwendigste Geometrische ist die zweite Gruppe von Modellen der Sammlung gewidmet.

31. Reihe.

Im Gebiete des elementaren Rechnens sind es hauptsächlich zwei Abschnitte, die eine Verdeutlichung durch Modelle, also eine Unterstützung der begrifflichen Abstraktion durch das Mittel sinnlicher Wahrnehmung wünschenswert erscheinen lassen, das sind erstens die Bildungsweise, die Ausdehnung und die Herrschaft des *Zehnergesetzes* in der gliedernden Stufenfolge der reinen Zahlen und zweitens die Entstehung und Vergleichung der *Bruchzahlen.* Diesen beiden Abschnitten sind die Modelle der 31. Reihe gewidmet.

Freilich sollen die in die unterste Klasse der höheren Schulen Eintretenden die Kenntnis des *Zehnergesetzes* und des *Stellenwertsystemes* schon mitbringen; aber jeder Lehrer weiß, wie sehr wünschenswert es ist, bei den häufig aus verschiedenen Quellen zusammenkommenden, verschieden vorgebildeten und nun gewissermaßen zusammenzuschweißenden Schülern gerade die genannten Dinge stets erneut einzuprägen und zu sicherem geistigen Besitz zu machen. Dazu dienen (Nr. 1001) die Rechenstäbchen, z. T. lose als Einzelstäbchen, dann in Bündeln von je 10 und auch in solchen von je 100 Stäbchen, letztere z. T. so zusammengefügt, daß man deren Zusammensetzung aus 10 Zehnerbündeln wohl erkennen kann, dann auch so, daß die 100 Einer als eine neue Einheit, als selbständiger Hunderter erscheinen. Entsprechend ist der Tausender in zweifacher Art zur Darstellung gebracht. — Mit diesen Einzelstäbchen und Bündeln lassen sich Zahlen wie $4 = 4E$, $54 = 5Z + 4E$, $365 = 3H + 6Z + 5E$ u. dgl. bequem zur Darstellung bringen bzw. durch die (schwächeren) Schüler selbst aus ihren Bestandteilen zusammensetzen.

Was dann zunächst die *erste Art der Entstehung der Brüche* anbelangt, so mag oft genug ein Holzstäbchen, das man in Teilstücke zerbricht, oder eine Schnur, die zerschnitten, oder ein Kreidestrich an der Tafel, der zerteilt wird, als Darstellung der Einheit dienen, aus der die Bruchteile gewonnen werden. Da aber jeder so abgetrennte Teil nicht an sich das Wesen eines Bruchstückes darstellt, sondern unmittelbar als selbständiges Ganzes aufgefaßt werden kann, entbehrt solche Darstellung des Grundmerkmals voller, zwingender Anschaulichkeit. Am besten wird doch wohl vom Zerschneiden eines Apfels

oder dgl. ausgegangen. Da aber solchen Naturdingen die volle Gleichförmigkeit, also ihren gleichartigen Bruchteilen die volle Gleichheit fehlt, und da ihre wiederholte Verwendung allerhand Mißstände mit sich bringt, so sind in unserer Sammlung *Holzkugeln* (von 9 cm Durchmesser) je als Einheit gewählt. An ihnen erscheinen die versinnlichten Brüche wirklich als Bruchstücke, und an ihrer Teilung kann auch sehr wohl die *Vergleichung von Bruchwerten* vorgenommen werden: das $\frac{1}{4}$-stück füllt die Öffnung des $\frac{1}{3}$-stückes nicht aus, das $\frac{1}{4}$-stück ist zu dick für die Öffnung des $\frac{1}{5}$-stückes, das $\frac{1}{3}$-stück ($= \frac{5}{15}$) reicht nicht voll aus, um die Öffnung des $\frac{2}{5}$-stückes ($= \frac{6}{15}$) auszufüllen u. dgl.

Nach der Verwendung der Holzkugeln oder auch mit ihnen abwechselnd kann die Versinnlichung und Vergleichung der Bruchteile eines Ganzen auch mittels der *hölzernen Kreisscheiben* (von 22 cm Durchmesser) vorgenommen werden, und dann auch mittels der auf Eisenstäben verschiebbaren *Holzstäben* und deren Teilen. Erst wenn die letzteren zur Verdeutlichung herbeigezogen sind und so die Hilfsmittel erst *körperlicher*, dann *flächenmäßiger*, dann *linienartiger* Darstellung verwendet sind, empfiehlt sich die weitere Vorführung der Bruchteilung auch an gerad- oder kreislinigen Kreidestrichen an der Wandtafel und in den Schülerheften.

Die Holzscheiben- und Holzstäbchen - Modelle empfehlen sich besonders auch zur Versinnlichung der *zweiten Art der Entstehung der Zweigbrüche*, nämlich dieser als gleichwertig mit Quotienten, also zum anschaulichen Nachweis (an Beispielen) der Tatsache, daß $a : b = \frac{a}{b}$. Legt man zwei Kreisscheiben übereinander und bricht aus beiden vereint ein Dritteil aus, so besteht dieses aus $\frac{2}{3}$ des Ganzen; entsprechend vorzuzeigen, daß $3 : 4 = \frac{3}{4}$, daß $3 : 5 = \frac{3}{5}$ usw. Dasselbe läßt sich an den zu zwei oder drei oder vier vereinigten Holzstäben mit entsprechender Teilung nachweisen.

32. Reihe.

Dem für die Anwendungen des Rechnens notwendigsten Geometrischen ist die 32. Reihe von Modellen gewidmet. In diese sind der Anregung und der Vollständigkeit halber auch solche Hilfsmittel aufgenommen, die jeder Lehrer an seinem Wohnort selbst zu beschaffen vermag; diese sind durch ein der bezüglichen Nummer des Verzeichnisses vorgesetztes Kreuzchen hervorgehoben, werden also durch den Teubnerschen Verlag nicht geliefert.

In diese 32. Reihe gehören zunächst die gesetzlichen *Längen-, Flächen- und Körpermaße.*

Bei den Flächenmaßen sollte im Unterricht nicht genügen das Umfahren der Randlinien eines *Quadratmeters* oder *Quadratdezimeters* in der Luft oder auch deren Vorzeichnen auf der Wandtafel oder an der Zimmerwand; beide Maße sollen in voller flächenmäßiger Ausführung vorhanden und mit Handgriff versehen sein, um damit auch tatsächlich ebene Flächenstücke einzeln oder nebeneinander liegend bedecken zu können und um so der Abschätzung anderer durch Augenmaß vorzuarbeiten.

Auch bei den Raummaßen genügt nicht das Benützen bloß eines *Kubikdezimeters*, um von ihm aus durch Abgrenzung bloß eines Luftwürfels mittels Handbewegung („Denkt euch . . ."!) zur Vorstellung eines *Kubikmeters* zu gelangen. Auch hier muß die tatsächliche Vorführung eines Raummeters statthaben. Um aber einen solchen bequem umhertragbar zu machen, sind hier seine Kanten durch Holzstäbe dargestellt, die, alle zwölf durch Scharniere verbunden, in ein bequem zu tragendes Bündel zusammengelegt und wieder auseinandergefaltet werden können. So wird das Zusammensuchen von einzelnen Stäben und deren Einstecken in vorbereitete Aushöhlungen vermieden und damit Zeit erspart; mit wenigen Handgriffen kann vorliegender Kubikmeter vor den Augen der Schüler aufgerichtet, kann wie ein körperliches Gebilde umhergetragen und kann nach Gebrauch sofort wieder in seine Bündelgestalt zurückverwandelt werden.

Behufs bequemen Aufstellens brachte man die folgenden erstmals etwas einzuübenden Handgriffe: Beachte die 2 Gruppen von Stäben, der eine bei A (5), der andere bei B (7 Stäbe). Lege die Fläche, wo A u. B steht, obenauf, dann drehe beide Stabbündel beim Gelenk AB so weit auseinander, daß beide in eine Gerade zu liegen kommen. Darauf drehe den untersten Stab bei C im Sinne des bei C stehenden Pfeiles, bis die Stabenden bei C und D senkrecht aufeinander stehen. Während dessen und dann drehe den Stab mit dem Ende E heraus im Sinne des Pfeiles bei E, bis E an F stößt und durch Einstecken des Stiftes bei (EF) das Bodenquadrat vollendet ist. Erst nach Herstellung des Bodenquadrates wird die Gruppe der 3 Stäbe, an deren Ende A steht, aufwärts gedreht bis zum Senkrechtstehen und wird entfaltet; andererseits wird das Paar noch liegender Stäbe bei F aufgerichtet, und es wird der obere von beiden über den anderen um $3 \cdot 90^0$ gedreht; zuletzt wird die Gruppe von drei noch liegenden Stäben bei B aufgerichtet, und hierbei wird der mittlere um $3 \cdot 90^0$ um den unteren gedreht, und so wird das letzte Seitenquadrat gebildet Die (nicht unbedingt notwendige) Drehung der Schlußhaken verleiht dem Ganzen Festigkeit, so daß der Kubikmeter auch umhergetragen werden kann.

Daß der *Gebrauch einer Wage* der Erklärung und Benützung von Gewichten im Rechenunterricht vorangehen müßte, sollte selbstverständlich sein — nicht minder, daß eine solche Wage öfter wiederholt in Benützung genommen werden müßte.

B. Modelle für den Unterricht in Geometrie.

33. Reihe.

Im elementaren geometrischen Unterricht knüpft die Erklärung des *Winkels* und seiner Messung am besten an die auch den jüngsten Schülern bekannte *Uhr* und an deren *Zifferblatt mit Zeiger* an. Hieran wird durch Zeigerstellung auf 3 Uhr, 9 Uhr der rechte Winkel usw. deutlich gemacht, ebenso durch Aufstecken von Verlängerungen auf den einen oder auf beide Zeiger die Unabhängigkeit der Winkelgröße von der Schenkellänge.

Sind so die Grundvorstellungen anschaulich gewonnen, so kann das Modell bequem zurechtgemacht werden für die *Maßbestimmung von Winkeln:* die Zeiger werden umgesteckt auf die Rückseite des Modells, auf der die vorderseitigen Stundenzahlen nur je durch Punkte angedeutet sind und demnach jetzt einen Mittelpunktswinkelabstand von je 30^0 angeben. Winkelgrößenbestimmungen, Addition und Subtraktion von Winkeln bestimmter Größen und deren anschließende zeichnerische und rechnerische Behandlung ergeben sich dann, auf solch anschauliche Weise vermittelt, leicht.

Zur *Messung von Winkeln* auf dem Papier genügt ja freilich der übliche einfache *Winkelmesser* (aus Papier oder Horn oder Metall). Es sollten aber schon im elementaren Unterricht auch im freien Gelände Winkelmessungen vorgenommen werden und zwar sowohl in wagrechten als in lotrechten Ebenen (z. B. zur annähernden Bestätigung auch im Freien, daß die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks $= 180^0$, die eines Vierecks $= 360^0$ ist u. ä.). Hierzu ist am besten zu brauchen das doch in der Praxis allgemein verwendete *Theodolit*, freilich nicht in der üblich ausgeführten vollkommenen Form, sondern in der vereinfachten Gestalt des *Theodolitmodells* unserer Sammlung, an dem Libellen und Nonien weggelassen sind, die Winkeleinteilung von 5 zu 5 Grad in zweierlei Farbe durchgeführt und der Höhenkreis bequem abnehmbar ist, das Okular des „Fernrohres" durch eine kleine Öffnung und dessen Fadenkreuz durch zwei Messingdrähte dargestellt sind.

34. Reihe.

Ein anschaulich geometrischer Anfangsunterricht wird naturgemäß von der Betrachtung der körperlichen Gebilde ausgehen, um an und aus ihnen die Flächen, insbesondere die ebenflächigen Gebilde und die Linien abzuleiten. Mit Rücksicht hierauf sind zeitlich vor den Figuren und Modellen der 34. bis mit 38. Reihe vorliegender

Sammlung die Körper der 39. Reihe zu benützen, insbesondere zunächst *Würfel, quadratische Säule* und *Quader*. In welch methodisch vorgehender, vielseitiger und ausgiebiger Weise eine solche Benützung dieser Körperformen stattfinden kann und behufs Einführung in die Geometrie erfolgen sollte, ist in meiner schon oben (S. 2) erwähnten Schrift und zwar in deren §§ 46 bis 56 ausführlicher dargelegt. Dort ist u. a. gezeigt, wie anschließend an die Betrachtung des Würfels das *Quadrat* und an die der quadratischen Säule oder des Quaders das *Rechteck* aufgefaßt, zeichnerisch wiedergegeben und verwertet wird (ebenda S. 130 bis 142).

Diese beiden Figuren sollten aber nicht nur gezeichnet werden, und zwar nach vorgegebenen Maßen und in verschiedener Weise gezeichnet werden, um dabei Einblick zu erlangen in das Bildungsgesetz, d. h. in die Eigenschaften dieser Figuren, sondern diese letzteren sollten hierzu auch in Papier ausgeschnitten werden, um durch deren Zerlegung und abgeänderte Wiederzusammenfügung ihrer Teilstücke neue Formen durch den Schüler selbst gewinnen zu lassen und so die Freude an der Form zu pflegen.

So wird man, um hier die entsprechenden Übungen am *Quadrat* zu überspringen, aus dem *Rechteck* (Nr. 1111) ein doppelt so langes und halb so breites oder (Nr. 1112) ein doppelt breites und halb so langes Rechteck ableiten lassen. Ist aber das Rechteck längs einer Eckenlinie durchschnitten (Nr. 1113), so kann man zunächst finden lassen, daß beim Quadrat zwar diese Eckenlinie eine *Symmetrieachse* war, daß sie dies beim Rechteck aber nicht ist, und ferner, daß beim Beibehalten der Oberseiten beider Teilstücke des Rechteckes sich diese in 3facher, bei gestattetem Umwenden des einen Teilstückes in 6facher Weise aneinander legen lassen und daß so fünf neue Formen, aber nur drei neue Formarten aus dem Rechteck abgeleitet werden können (Parallelogramm, Deltoid [oder gleichschenkeliges Viereck], Gleichschenkeliges Dreieck). Teilweis entsprechende Übungen lassen sich an das Rechteck (Nr. 1114) anreihen, während Nr. 1115 dazu dient, ein Rechteck in ein gleichgroßes *schiefes Parallelogramm* umzuwandeln.

Ist auf eine der angegebenen Arten ein schiefes Parallelogramm entstanden (oder wohl auch schon an einem Parallelflächner der 39. Reihe von Modellen abgeleitet worden), so lassen sich aus ihm, indem es entweder längs der größeren Eckenlinien zerschnitten wird (Nr. 1116) oder längs der kürzeren Eckenlinie (Nr. 1117), ähnlich wie beim Rechteck durch andersartiges Zusammenfügen seiner Teilstücke neue, z. T. eigenartige, die Phantasie anregende Gestalten gewinnen.

Schon bei der Zerlegung des Quadrats und Rechteckes, dann bei der des schiefen Parallelogramms ist man auf die verschiedenen und besonderen Formen der *Dreiecksgestalt* gestoßen. An ihr ist, früher oder später, die gegenseitige Abhängigkeit seiner sechs „Stücke" zu erforschen und festzulegen, und zwar durch Zeichnen nach gegebenen Bestimmungsstücken — aber auch hier alsbald wieder durch Modellieren solcher Dreiecke in Papier und durch probeweises Aufeinanderlegen je zweier in gleicher Weise gebildeten Dreiecke. Hierbei zeigt sich die *Deckungsfähigkeit* (*Kongruenz*) z. B. bei Übereinstimmung der drei Seiten aber nur, wenn auch ein Umwenden des einen Dreieckes im Raume zugelassen wird. Diesem Teil der Betrachtung dienen die Modelle Nr. 1118.

Die nachfolgenden vier Modelle dienen der Umgestaltung eines schiefen Parallelogramms in ein andersartig schiefes, dabei ohne Änderung der Länge einer Seite (Nr. 1119 u. 1120), jedoch unter Änderung der Höhe, oder mit Abänderung sei es einer Seitenlänge (Nr. 1121) oder selbst zweier Seitenlängen (Nr. 1122).

Es sei hier ausdrücklich hervorgehoben, daß die Verwendung der vorstehend besprochenen Modelle sowie auch die nachfolgend in der 36., 37. und 38. Reihe angegebenen ganz und gar *nicht zu Anfang* der betreffenden geometrischen Betrachtungen in Benützung genommen werden sollen — sondern zuvörderst hat jeder Schüler an seinem eigenen, von ihm angefertigten Modell die bezüglichen Betrachtungen anzustellen und die geforderten Umlegungen und Neugestaltungen von Formen vorzunehmen, und *nachher erst* sollten zwecks zusammenfassender Erklärung oder zwecks Wiederholung oder auch gewünschter Vergleichung verschiedener Formen unsere Holzmodelle benützt werden.

35. Reihe.

Die Zerschneidung eines Parallelogrammes längs einer Eckenlinie liefert zwei gleichgroße Dreiecke. Anwendung hiervon wird bei den Modellen Nr. 1131 und 1132 gemacht, indem zuerst die ganzen Dreiecke der Parallelogramme als gleichgroß erfaßt und dann von ihnen je die kleineren Teildreiecke weggenommen werden: die Gleichwertigkeit bei bestehender Gestaltverschiedenheit der übrigbleibenden Parallelogramme ergibt den „Satz von den sog. Ergänzungsrechtecken bzw. -parallelogrammen" und dessen Verwendung zur Umwandlung eines recht- oder schiefwinkeligen Parallelogramms in ein gleichartiges mit gegebener einer Seite.

Die den Modellen Nr. 1133 und 1134 beigegebenen Pappstücke von Dreiecks- und von Trapezgestalt ermöglichen das Zudecken je

eines Teiles der betreffenden Gesamtfigur, um die jeweils nicht bedeckten Reststücke als gleichwertig zu erkennen.

36. Reihe.

Die Umwandlung dieser Modelle geschieht in Zwangsführung durch Scharniere. — Stets ist beim Gebrauch der Schülermodelle wie bei dem der vorliegenden behufs immer stärkerer Erregung des Beweisbedürfnisses auf das „Warum?“ zu achten, also weshalb entsteht (Nr. 1141) eine Gerade? weshalb entsteht (Nr. 1142) ein Trapez, weshalb (Nr. 1144 ff.) ein Rechteck? u. dgl.

37. Reihe.

Übereinstimmend sind hier die Mittelpunkte der Vierecksseiten die für die Zerlegung bestimmenden Ausgangsstellen. Die Umgestaltung erfolgt zwangläufig durch Scharniere. Auch hier sind Begründungsfragen nötig — z. B. warum wird Nr. 1164 rechtwinkeliges, Nr. 1165 schiefwinkeliges Parallelogramm?

38. Reihe.

Die wesentliche Bestimmung der Modelle dieser 38. Reihe ist die, die Wahrheit des *pythagoreischen Lehrsatzes* anschaulich darzutun. Diesem Zweck dienen mittelbar schon die Modelle Nr. 1171 und 1172, welche die sog. *Flächensätze beim rechtwinkeligen Dreieck* verdeutlichen, d. i. den sog. *Höhensatz* und den *Kathetensatz*. Ist im vollen rechtwinkeligen Dreieck von Nr. 1171 die Höhe gezogen, so wird das eine entstandene Teildreieck um $3\,R$ umgedreht und so an die Hypotenuse des anderen Teildreieckes angelegt, die Vervollständigung der Figur ergibt das Höhenquadrat; dann wird jenes gedrehte Dreieck (im zweiten Hilfsmodell) längs jener Hypotenuse verschoben, so ergibt die Vervollständigung der Figur offensichtlich das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten. — Entsprechend leicht ergibt sich der Nachweis des Kathetensatzes durch Nr. 1172, wenn man nur nicht in Euklidscher Weise Zwischendreiecke (als Hälften von Quadrat und Rechteck) benützt, sondern jedes der Vierecke selbst durch Verschiebung in je ein anderes flächengleiches umwandelt.

Die Modelle Nr. 1173 bis mit 1178 erklären sich von selbst.

39. Reihe.

Von hier ab enthalten die folgenden Reihen Modelle für die körperliche Geometrie. Die der vorliegenden 39. Reihe umfassen die

Hauptformen der *Parallelflächner*; über die Art ihrer Benützung behufs Einführung in einen ausgedehnteren Unterrichtsgang für geometrischen Anfangsunterricht mag meine besondere Schrift nachgesehen werden (s. ob. S. 2).

40. Reihe.

Diese Reihe enthält die für den Unterricht wichtigsten Formen von *Prismen*. Dabei sind mehrere derselben als durch Diagonalschnitt entstandene Hälften von Parallelflächnern der 39. Reihe gebildet, um zwischen diesen und jenen etwaige wünschenswerte Vergleichungen anstellen zu können. (Vgl. hierüber die Angaben des Preisverzeichnisses.)

41. bis 43. Reihe.

Hier sind die für einen gedeihlichen raumgeometrischen Unterricht wichtigsten Gestalten der *Zylinder*, *Pyramiden* und *Pyramidenstumpfe*, *Kegel* und *Kegelstumpfe* aufgenommen und zwar der mannigfaltigsten Übungen wegen nicht nur in Pappe ausgeführt, sondern auch in Draht — letztere durchsichtigen Formen auch deshalb, um von ihnen mittels Sonnenbeleuchtung parallelperspektive Bilder entwerfen lassen zu können.

Die Nummern 1254 und 1255 sind aufgenommen, um unter Verwendung eines ebenen Spiegels die Tatsachen und Gesetze *räumlicher Symmetrie* anschaulich entwickeln zu können.

44. und 45. Reihe.

Der *Geometrie der Kugel* sind die Modelle dieser beiden Reihen gewidmet. Hervorzuheben sind die Nummern 1284a), b) und c), alle drei je einen Kugelausschnitt (Sektor) darstellend, aber in steigender Größe des bezüglichen Mittelpunktswinkels (von 37^0, 100^0, 166^0), hauptsächlich um dem Grenzfall nahe zu kommen, wo der Kugelausschnitt übergeht in die Halbkugel. An die Formen der Kugel und ihrer Teile schließen sich hier in den Nummern 1285, 1286, 1287 drei Formen des besonderen und des allgemeinen Ellipsoides an, hauptsächlich in Hinsicht auf die Verwendung mathematischer Kenntnisse und Vorstellungen im physikalischen und erdkundlichen Unterricht. Der Gegensatz durch den nur eiförmigen Körper (Nr. 1288) dürfte eine erwünschte Zugabe sein.

Waren die Modelle der 44. Reihe massive Körper, so erscheinen als solche der 45. Reihe flächenartig ausgebreitete Modelle von Teilen der Kugeloberfläche, stets aber mit angefügten Halbmessern der

letzteren. Solche Modelle sind besonders nutzbringend im Unterricht über sphärische Trigonometrie. Hierbei ist hervorzuheben Modell Nr. 1309a), das zwar die punktsymmetrische Lage zweier Gegendreiecke, aber trotzdem ihre Nichtübereinstimmung deutlich erkennen läßt.

46. Reihe.

Für die Auffassung der *geometrischen Verwandtschaften*, also für die Verwandtschaften der *Deckungsfähigkeit* (Kongruenz), *Ähnlichkeit*, *Affinität* (mit *Affingleichheit*) dürfte es angezeigt und jedenfalls für die Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens ersprießlich und für bessere Erkenntnis der Sache vorteilhaft sein, von Raumbetrachtungen auszugehen, selbst wenn im wesentlichen nachher der Gang innerhalb der ebenen Geometrie beibehalten werden möchte.*)

Für eine solche Beihilfe mittels räumlicher Betrachtungen sollen die Modelle vorliegender Reihe dienen.

Ein Prisma und zwar des einfachsten Falles wegen ein dreiseitiges Holzprisma ist parallel der Grundfläche durchschnitten (Nr. 1321) und die Schnittfigur auf einer Glasplatte abgebildet; diese letztere kann durch Parallelverschiebung (mittels Messingstangen) in die Ebene der Grundfläche und damit in die Ebene des Grundflächendreiecks, also in die Lage *perspektiver Kongruenz* gebracht werden — die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken beider Dreiecke sind parallel. — Im selben Modell ist auch eine (dreiseitige) Pyramide parallel der Grundfläche durchgeschnitten, und entsprechend können die beiden ähnlichen Dreiecke in *ähnliche Lage* gebracht werden.

Das Entsprechende ist in den Modellen Nr. 1322 und 1323 für die Fälle der *Affingleichheit* und *Affinität* durchgeführt: hierbei wird die Glasplatte mit ihrer Dreiecksfigur um die in der Grundebene liegende Achse umgedreht und mit der Grundfigur in eine Ebene und in dieser je in die besondere Lage gebracht.

47. Reihe.

Die 47. Reihe behandelt die *perspektive Abbildung des Kreises*. Das Bild wird eine Ellipse (im Sonderfall ein Kreis), oder eine Parabel, oder eine Hyperbel, je nachdem die parallel zur

*) Vgl. hierzu meine Übersetzung des italienischen Werkes von Lazzeri und Bassani „Elemente der Geometrie" (unter Verschmelzung der ebenen und der räumlichen Geometrie). Leipzig, B. G. Teubner, 1911.

Bildtafel durch das Auge gelegte Ebene den Urkreis in keinem Punkt trifft, oder berührt, oder in zwei Punkten schneidet, je nachdem also kein oder ein Sehstrahl oder ein Sehstrahlenpaar parallel zur Tafel nach dem Kreis gezogen werden kann. Im letzten Fall teilt jene Ebene den Kreis in zwei Stücke, von denen auf der begrenzten Tafel nur ein Teil des vorderen Stücks wirklich und ein Teil des hinteren geometrisch in einem endlichen Teil je eines Hyperbelastes abgebildet wird.

Es muß betont werden, daß dieser Fall der Abbildung eines Kreisbogens in einen Hyperbelast durchaus nichts außergewöhnliches ist: er tritt z. B. immer dann ein, wenn der Beschauer im Innern eines Kreises steht, den er auf eine aufrechte Tafel abbilden will, also bei der Abbildung des Innern eines Rundbaues*). Auch der scheinbare Umriß einer Kugel kann bei perspektiver Abbildung ein Hyperbelast werden, nämlich dann, wenn der wahre Kugelumriß (der ja stets ein Kreis ist) die Ebene durchschneidet, die parallel zur Bildtafel durch das Auge gelegt ist; also z. B. wenn der Beschauer auf einer kugelförmigen Kuppe steht, und diese auf eine aufrechte Ebene abbildet.

Anmerkung: Die drei Modelle sind von H. Wiener entworfen, von dem auch die obige Erläuterung herrührt. Sie verdanken aber ihre Entstehung der Anregung von P. Treutlein, der solche Modelle in anderer Anordnung und Ausführung hergestellt hatte, nämlich so, daß ein in einer aufrechten (nicht durchsichtigen) Ebene befindlicher Kreis unter Festhaltung seiner Größe auf die drei Arten in eine horizontale Ebene projiziert wurde.

48. Reihe.

Einen wichtigen Teil der mathematischen Aufgabe unserer Oberklassen nimmt ein die Lehre von den *Kegelschnitten.* Zur Versinnlichung ihrer Entstehung und zum Nachweis ihrer Ableitung nach der Art von Quetelet-Dandelin sind hier der Kegel bzw. der Zylinder durch starke Seidenschnüre dargestellt, die Schnittebene mit darauf gezeichnetem Kegelschnitt ist aus gutem Zelluloid gefertigt, und die eingeschriebenen Kugeln bestehen aus Holz und sind hellrot angestrichen. Die zu den betreffenden Beweisen nötigen Hilfslinien sind besonders hervorgehoben, und auch die Leitgeraden sind zur Darstellung gebracht.

*) Man vergl. z. B. das Bildchen aus dem Innern der Darmstädter katholischen Kirche in F. Meisels „Lehrbuch der Perspektive". S. 62 (Leipzig 1908).

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

v. Dalwigk, Prof. Dr. **F.**, Privatdozent an der Universität Marburg a. L., Vorlesungen über darstellende Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: Die Methoden der Parallelprojektion. Mit 184 Figuren. [XVI u. 364 S.] 1911. *M.* 13.—

II. — In Vorbereitung.

Das Buch behandelt die darstellende Geometrie in zwei Bänden. Der erste Band enthält die Orthogonalprojektion mit Grund- und Aufriß, außerdem besonders die schiefe Parallelperspektive, die Axonometrie und die kotierte Projektion Die Axonometrie tritt in dem Buche ziemlich stark zurück. Nur das Wichtigste über die orthogonale axonometrische Projektion ist gebracht, und zwar mit entschieden vorherrschendem mathematischen Interesse. Der zweite Band behandelt die Zentralprojektion, zuerst die Hauptmethoden der malerischen Perspektive, dann die freie Perspektive und die Zentralkollineation in der Ebene mit Anwendungen auf die Kegelschnitte. Der zweite Band wird eine kurze Übersicht über die Entwicklung der darstellenden Geometrie bringen. Das Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser in Marburg seit über zehn Jahren hielt. Ohne daß es gerade beabsichtigt ist, umfaßt das Buch ungefähr den Stoff, der im Unterricht an technischen Hochschulen geboten wird, in manchen Punkten geht es darüber hinaus.

Fiedler, Dr. **W.**, vorm. Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich, die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen und zum Selbststudium. 3 Teile. gr. 8. Geh. *M.* 40.30, geb. *M.* 43.80.

Einzeln:

I. Teil: Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektivischen Geometrie. 4. Auflage. Mit zahlreichen Figuren. [XXIV u. 431 S.] 1904. Geh. *M.* 10.—, in Leinwand geb. *M.* 11.—

II. — Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 3. Auflage. Mit zahlreichen Figuren und 16 lithogr. Tafeln. [XXXIII u. 560 S.] 1885. Geh. *M.* 14.—, in Leinwand geb. *M.* 15.40.

III. — Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 3. Auflage. Mit zahlreichen Figuren und 1 lithogr. Tafel. [XXX u. 660 S.] 1888 Geh. *M.* 16.—, in Leinwand geb. *M.* 17.40.

Lazzeri, G., u. **A. Bassani**, Professoren an der Marineakademie zu Livorno, Elemente der Geometrie. (Unter Verschmelzung von ebener und räumlicher Geometrie.) Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von P. Treutlein, Direktor der Goetheschule zu Karlsruhe. Mit 336 Figuren. [XVI u. 491 S.] gr. 8. 1911. In Leinw. geb. *M* 14—

Neben den vielen vorhandenen „Elementen der Geometrie" nimmt das vorliegende, erstmals 1891 erschienene Werk eine besondere Stelle ein: es verwebt die sogenannte ebene Geometrie mit der räumlichen, es dient also der sogenannten **„Fusion"**. Wissenschaftlich durch Monge, Poncelet und von Staudt eingeführt und gefördert, von Gergonne und Crelle für den Unterricht gefordert, war diese Fusion, abgesehen von einem Versuch Bretschneiders (1844) und einem von Frischauf (1870), hauptsächlich in Frankreich (Mahister und Méray) und in Italien gepflegt. Das italienische Hauptwerk verdient in Deutschland bekannt zu werden nnd es steht zu hoffen, daß die deutsche Ausgabe des Buches auch in Deutschland der „Fusion" Freunde gewinnen, jedenfalls der methodischen Behandlung des geometrischen Unterrichtsstoffes mannigfache Anregung geben wird.

Loria, Dr. **Gino**, Professor an der Universität Genua, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von Fr. Schütte. In 2 Teilen. Mit vielen Figuren. gr. 8. Geb.

I. Teil: Die Darstellungsmethoden. [XI u. 219 S.] 1907. *M.* 6.80,

II. — [Erscheint im Januar 1912.]

Das vorliegende Werk, aus mehrjährigen Vorlesungen des Verfassers hervorgegangen, setzt nur elementare Kenntnisse der projektiven und analytischen Geometrie voraus. Der erste Band, der die Darstellungsmethoden behandelt, beginnt mit einem kurzen Abriß der Geometrie des Zirkels und der Geometrographie und geht dann im ersten Buche zur Methode der Orthogonalprojektion über. Das zweite Buch behandelt in gleicher Weise die Zentralprojektion, während das dritte der Methode der kotierten Ebenen gewidmet ist. Das vierte Buch betrifft die Axonometrie, das fünfte — zum erstenmal in einem Schulbuche — einen theoretisch und praktisch wichtigen Zweig der „darstellenden" Geometrie, der augenblicklich in rechter Blüte steht: die Photogrammetrie. Reichlicher Übungsstoff dient dem Leser zur Vertiefung und Befestigung der aus diesem Werke geschöpften Kenntnisse; viele Zeichnungen erleichtern das Verständnis in hohem Maße.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Müller, Dr. **E.**, Professor an der k. k. Technischen Hochschule zu Wien, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. In 2 Bänden. I. Band. Mit 273 Figuren und 3 Tafeln. [XIV u. 368 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. *M* 12.—

Das Werk behandelt die gebräuchlichen Darstellungsmethoden und in jeder von ihnen jene Aufgaben und Anwendungen, die für den Bauingenieur und Architekten in Betracht kommen. Der erste Band ist der Abbildung durch zugeordnete Normalrisse und der darauf gegründeten konstruktiven Behandlung der Kurven und Flächen (mit besonderer Berücksichtigung der Schattenkonstruktionen) gewidmet. Überall wurde erstrebt, den Anschluß an das praktische technische Zeichnen, zugleich aber auch einen höheren geometrischen Standpunkt zu gewinnen.

Müller, C. H., Professor Dr., Oberlehrer am Kgl. Kaiser-Friedrichs-Gymnasium zu Frankfurt a. M., und Professor **O. Presler**, Oberlehrer an der städt. Oberrealschule zu Hannover, Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie.

Ausgabe A. Vorzugsweise für Realgymnasien und Oberrealschulen. Mit 233 Figuren. [VIII u. 320 S.] gr. 8. 1903. Geb. *M* 4.—

— B. Für Gymnasien und sechsstufige Realanstalten. Mit 122 Figuren. [VI u. 133 S.] gr. 8. 1903. Geb. *M* 2.—

Diese Leitfäden umfassen in leicht lesbarer Darstellung den gesamten projektivischen (perspektivischen) Übungsstoff, soweit er auf stereometrischer Grundlage für höhere Schulen in Betracht kommen kann. Durch die beiden Ausgaben (A und B) ist auf die Unterschiede zwischen den humanistischen Gymnasien und den realistischen Schulen hinreichend Rücksicht genommen. Dabei hat die Ausgabe B (für Gymnasien) so gestaltet werden können, daß sie zugleich den Lehrstoff für sechsstufige Realschulen enthält. Der sehr niedrig gesetzte Preis der Leitfäden ermöglicht die Einführung in allen genannten Anstalten, wobei berücksichtigt werden muß, daß sie für mehrere Fächer und eine Reihe von aufsteigenden Jahreskursen bestimmt sind.

Richter, Professor Dr. **Otto**, Oberlehrer am König-Albert-Gymnasium zu Leipzig, Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Für den Unterricht und zum Selbststudium. Mit 147 Figuren. [X u. 188 S.] gr. 8. 1908. Geh. *M* 4.40, in Leinwand geb. *M* 4.80.

Angesichts des oft und seit langem beklagten Übelstandes, daß die für die Schulung des Raumanschauungsvermögens so wichtige Darstellung der Kugel und ihrer Kreise nicht nur im stereometrischen Unterrichte hintangesetzt, sondern sogar in der darstellenden Geometrie wenig gepflegt und selbst schematisiert wird, hat der Verfasser den Versuch gemacht, eine Anzahl der in der Raumlehre häufig auftretenden Körper in allgemeiner Lage gezeichnet darzubieten und die genaue Bildherstellung zu begründen und unter Hinweis auf die obwaltenden mathematischen Beziehungen und bei möglichster Beschränkung auf eine einzige Bildtafel, um die Verwendung der Konstruktionen im Unterrichte zu erleichtern. Vorausgesetzt wird die Kenntnis der elementaren Planimetrie und Stereometrie, einschließlich der harmonischen Eigenschaften des Kreises, an einigen Stellen auch der Trigonometrie und der Algebra.

Schilling, Dr. **Friedrich**, Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig, über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. Geh. *M* 4.60, in Leinwand geb. *M* 5.—

Treutlein, P., Direktor der Goetheschule in Karlsruhe, geometrischer Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen Unterrichts in Geometrie. Mit 87 Abbildungen und 38 Tafeln. gr. 8. 1911. Geh. *M* 5.—, in Leinwand geb. *M* 5.60.

Wiener, Christian, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8. Geh. *M* 30.—

Einzeln:

I. Band: Geschichte der darstellenden Geometrie, ebenflächige Gebilde, krumme Linien (I. Teil), projektive Geometrie. Mit Figuren. [XX u. 477 S.] (1884.) Unveränderter anastatischer Abdruck 1906. *M* 12.—

II. — Krumme Linien (II. Teil) und krumme Flächen. Beleuchtungslehre, Perspektive. Mit Figuren und 4 Tafeln. [XXX u. 649 S.] 1887. *M* 18.—