

511.8
E88c

MATHEMATICS
LIBRARY

CONSTRUCTION DE MODÈLES DE SURFACES APPLICABLES

SUR LE

PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION

DÉFINIES PAR M. G. DARBOUX ;

Par E. ESTANAVE.

M. G. Darboux a fait connaître récemment ⁽¹⁾ deux surfaces applicables sur le parabolôïde de révolution qui a pour équation

$$x^2 + y^2 = 8a^2z.$$

Les formules qui définissent ces deux surfaces sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (\Sigma) \quad & \begin{cases} x = 4a \frac{u^3}{3}, \\ y = -2av \left(u^2 + \frac{v^2}{3} + 1 + a^2 \right), \\ z = \frac{1}{2} (u^2 + v^2)^2 + (a^2 + 1)(v^2 - u^2) + \frac{1}{2} (1 - a^4), \end{cases} \\ (\Sigma') \quad & \begin{cases} x = -2au \left(v^2 + \frac{u^2}{3} + a^2 - 1 \right), \\ y = 4a \frac{v^3}{3}, \\ z' = -\frac{1}{2} (u^2 + v^2)^2 + (a^2 - 1)(v^2 - u^2) - \frac{1}{2} (1 - a^4). \end{cases} \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXL, 13 mars 1905, p. 697.

Ces formules se prêtent très bien à l'étude de ces surfaces qui sont l'une et l'autre unicursales.

Comme l'a indiqué M. G. Darboux, elles ne diffèrent pas essentiellement au point de vue algébrique. On passe, en effet, de la surface Σ à la surface Σ' en remplaçant

$$a, u, v, x, y, z.$$

respectivement par

$$ia, iv, iu, y, x, -z,$$

Les sections planes de ces surfaces sont représentées par des courbes du quatrième ordre ayant les mêmes directions asymptotiques et par conséquent les surfaces sont du douzième ordre. Elles sont de dixième classe.

Sur l'invitation de M. G. Darboux, je me suis proposé de construire des modèles représentant ces surfaces.

Le procédé que j'ai adopté consiste à déterminer des sections planes de la surface considérée; à dessiner, le plus exactement possible, ces courbes sur du papier calque. On rapporte ensuite sur des feuilles de métal, et l'on obtient ainsi par découpage des sections rigides. On assemble en leur place ces diverses sections et on les maintient par un point de soudure. On obtient ainsi la carcasse métallique du modèle. Il n'y a plus qu'à recouvrir cette ossature de plâtre en suivant exactement les contours des diverses sections. On polit au besoin au papier de verre, afin de faire disparaître les bavures de plâtre qui se sont produites.

Ce procédé a l'inconvénient de nécessiter une charpente métallique pour chaque modèle. J'ai préféré obtenir par un moulage des surfaces qui ne contiennent pas à leur intérieur cette carcasse. Celle-ci peut alors servir à montrer les diverses sections que l'esprit aurait quelquefois de la peine à imaginer en raison de leur complication. Toutefois, lorsque le modèle était fragile, comme l'était celui représentant les surfaces (Σ'), il peut être avantageux de laisser l'ossature à l'intérieur.

Je vais indiquer ci-dessous les résultats des *principaux calculs* qui m'ont servi à déterminer les diverses sections de ces surfaces, ainsi que la forme de ces sections. On trouvera aussi la reproduction photographique des modèles qui ont été construits.

Considérons la surface (Σ) définie par les équations

$$\begin{aligned}x &= 4a \frac{u^3}{3}, \\y &= -2av \left(u^2 + \frac{v^2}{3} + 1 + a^2 \right), \\z &= \frac{1}{2} (u^2 + v^2)^2 + (a^2 + 1)(v^2 - u^2) + \frac{1}{2}(1 - a^4).\end{aligned}$$

Afin d'étudier plus facilement cette surface, remplaçons dans les équations précédentes u, v par $u\sqrt{1+a^2}, v\sqrt{1+a^2}$ et prenons de nouvelles coordonnées x', y', z' liées aux anciennes par les relations

$$\begin{aligned}x &= \frac{4a}{3} (1+a^2)^{\frac{3}{2}} x', \\y &= -\frac{4a}{3} (1+a^2)^{\frac{3}{2}} y', \\z - \frac{1-a^4}{2} &= \frac{(1+a^2)^2}{2} (z' - 1),\end{aligned}$$

les coordonnées des points de la surface deviennent

$$\begin{aligned}x' &= u^3, \\y' &= \frac{1}{2} v(v^2 + 3u^2 + 3), \\z' &= (u^2 + v^2 + 1)^2 - 4u^2.\end{aligned}$$

Enfin, en posant

$$u^2 + v^2 + 1 = 2t, \quad t^2 - u^2 = \beta^2,$$

l'on a pour l'expression des coordonnées les points de la surface en fonction de deux paramètres t et β

$$\begin{aligned}x &= (t^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}, \\y &= [\beta^2 - (t-1)^2]^{\frac{1}{2}} (t^2 + t + 1 - \beta^2) \\z &= 4\beta^2.\end{aligned}$$

Cherchons maintenant les sections par les plans de coordonnées et indiquons tout d'abord les formes générales de ces sections. Nous déterminerons ensuite le maximum de certaines coordonnées, ainsi que les points remarquables de ces sections.

1° *Section par le plan des xz .* — Il faut que $y = 0$. Prenons

$$\beta^2 = (1 - t)^2,$$

les équations de la section en fonction du paramètre t seront

$$\begin{aligned} x &= \pm(2t - 1)^{\frac{3}{2}}, \\ z &= 4(t - 1)^2. \end{aligned}$$

La courbe est symétrique par rapport à Oz , il suffit de construire la portion relative aux valeurs positives de x .

Le Tableau suivant résume la variation de x et de z lorsque t varie de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$. Le deuxième Tableau à droite indique les coordonnées de divers points de la section α de la figure 1; il suffit de multiplier ces nombres abstraits par une unité de longueur choisie pour avoir les valeurs des coordonnées à l'échelle adoptée.

t	$\frac{1}{2}$	$\frac{101}{110}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$	<i>fig. 1, α</i>	A	S	B	E	C
x	0	$\left(\frac{46}{55}\right)^{\frac{3}{2}}$	1	$2\sqrt{2}$	$(1 + \sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$	x	0	0,76	1	2,828	4,50
z	1	$\left(\frac{9}{55}\right)^2$	0	1	3	z	1	0,026	0	1	3

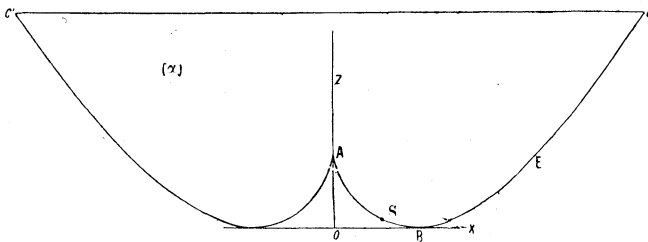
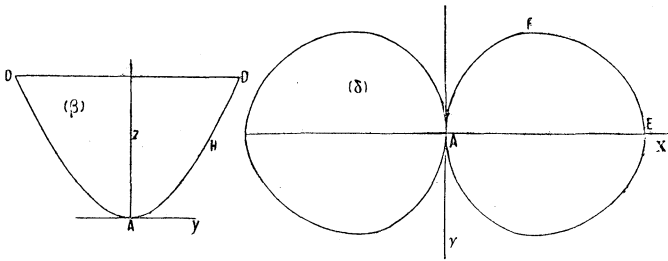
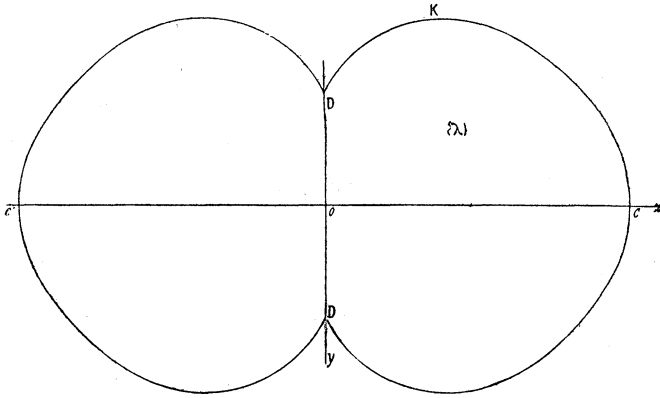
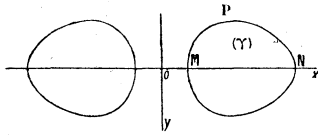
Dans les modèles construits au laboratoire de Géométrie supérieure de la Sorbonne, l'unité de longueur adoptée est de 32^{mm}.

J'ai limité la surface au plan $z = 3$. Les sections, par des plans de cote plus élevée, ont une forme qui s'éloigne peu de celle par le plan $z = 3$.

Nous n'avons pas considéré le facteur $\beta^2 = t^2 + t + 1$ pour lequel $y = 0$; il correspond à une courbe isolée.

2° *Section par le plan des yz .* — Pour que $x = 0$, il faut que

Fig. 1.



$\beta^2 = t^2$; les équations de la section sont alors

$$y = \pm (2t - 1)^{\frac{1}{2}}(t + 1)$$

$$z = 4t^2,$$

t doit être plus grand que $\frac{1}{2}$ pour que y soit réel.

Les Tableaux suivants indiquent les variations de y et z et les coordonnées de divers points de la figure 1, β :

t	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$fig. 1, \beta$	A	H	D
y	0	$\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$	y	0	1,096	1,60
z	1	2	3	z	1	2	3

On n'a, comme je l'ai fait déjà remarquer, à construire qu'une portion de ces sections, en raison des symétries. Si l'on cherche le plan tangent à la surface le long de cette section, on voit qu'il se confond avec le plan des xz ; cette ligne est une ligne de rebroussement sur la surface.

Dans l'assemblage des sections, cette courbe (β) sera dans un plan perpendiculaire à celui de la courbe (α), les points A étant en coïncidence.

SECTIONS HORIZONTALES.

1° *Section par le plan des xy .* — On obtient $z = 0$ en faisant $\beta = 0$. Les équations de la courbe sont

$$x = \pm t^3, \quad y = \sqrt{-(t-1)^2(t^2+t+1)}$$

qui donnent seulement deux points réels

$$y = 0, \quad x = \pm 1$$

correspondant à $t = 1$.

Section par le plan $z = \frac{1}{4}$. — Il faut prendre $\beta = \frac{1}{4}$, les équations de la section sont

$$x = \left(t^2 - \frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = \left(t^2 + t + \frac{15}{16}\right) \sqrt{\left(\frac{5}{4} - t\right)\left(t - \frac{3}{4}\right)}.$$

D'où les Tableaux de variations :

t	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	<i>fig. 1, γ</i>	M	P	N
x	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{(15)^{\frac{3}{2}}}{64}$	$\frac{(24)^{\frac{3}{2}}}{64}$	x	0,353	0,905	1,838
y	0	$\frac{47}{64}$	0	y	0	0,734	0

Section par le plan $z = 1$. — Prenons $\beta = \frac{1}{2}$. On a pour équations de la section

$$x = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = \left(t^2 + t + \frac{3}{4}\right) \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - t\right)}.$$

t doit varier entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Ces limites ont été déterminées par la condition que les trinomes $t^2 - \frac{1}{4}$ et $\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - t\right)$ soient positifs.

Le Tableau suivant résume la variation :

t	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	<i>fig. 1, δ</i>	A	L	F	E
x	0	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\left(\frac{21}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$	$2\sqrt{2}$	x	0	0,65	1,50	2,828
y	0	$\frac{11}{8}$	$\frac{57\sqrt{3}}{64}$	0	y	0	1,37	1,54	0

Le point F correspond à l'ordonnée maximum, elle a été déterminée comme je l'indique ci-après.

Section par le plan $z = 3$. — Dans ce cas, $\beta^2 = \frac{3}{4}$ et les équations de la section sont

$$x = \left(t^2 - \frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - t\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + t\right)}.$$

Pour que x et y soient réels, t doit varier entre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

Le Tableau des variations est, dans ce cas :

t	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$	$\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$
x	0	$\frac{(1 + 2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}}{8}$	$(1 + \sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$
y	$\frac{(\sqrt{3} + 1)^2 \sqrt{\sqrt{3} - 1}}{4}$	$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}}$	0

<i>fig. 1, λ</i>	D	K	C
<i>x</i>	0	1,17	4,50
<i>y</i>	1,58	2,70	0

Les autres parties s'obtiennent, comme pour les autres sections, par symétrie.

Cherchons le maximum de l'ordonnée des diverses sections horizontales. Les coordonnées d'un point d'une section par le plan $z = z$ sont

$$x = \left(t^2 - \frac{z}{4} \right)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = \left[\frac{z}{4} - (t-1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(t^2 + t + 1 - \frac{z}{4} \right);$$

on a

$$y' = \frac{-3t \left(t^2 - t - \frac{z}{4} \right)}{\sqrt{\frac{z}{4} - (t-1)^2}}.$$

Les valeurs de t qui annulent y' sont

$$t = 0, \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1+z}}{2},$$

$t = 0$ ne peut convenir, car x et y ne sont pas réels.

Une seule des deux autres valeurs de t , celle correspondant à la détermination $+$, convient. Les abscisses qui correspondent à cette valeur de t sont

$$x = \left(\frac{1 + \sqrt{1+z}}{2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{car} \quad t^2 - \frac{z}{4} = t,$$

d'après l'équation qui définit t .

La valeur de y correspondant au maximum sera

$$y = (2 + \sqrt{1+z}) \sqrt{\frac{\sqrt{1+z} - 1}{2}}.$$

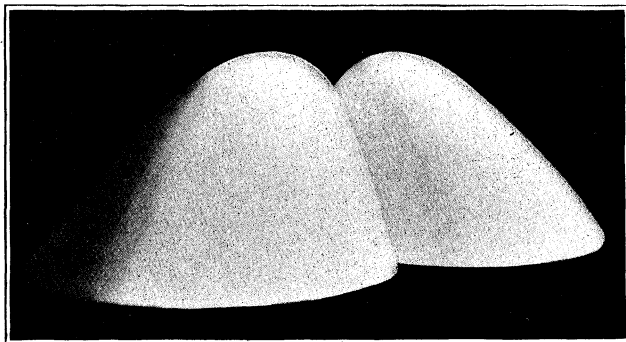
En donnant à z les valeurs $\frac{1}{4}$, 1, 3, on a les valeurs du maximum de l'ordonnée des sections horizontales

$$z = \frac{1}{4}, \quad z = 1, \quad z = 3,$$

ainsi que les valeurs de x qui correspondent.

La figure 2 donne une vue perspective de ce modèle.

Fig. 2.



Sommet du paraboloid. — Nous avons dit que la surface (Σ) était applicable sur le paraboloid qui a pour équation

$$x^2 + y^2 = 8a^2z.$$

Cherchons le point sur la surface qui correspond au sommet du paraboloid, dans l'application des deux surfaces l'une sur l'autre.

L'élément linéaire de la surface, comme l'indique M. G. Darboux dans le Mémoire déjà cité, a la forme

$$(1) \quad ds^2 = a^2 \frac{H+1}{H-1} dH^2 + 2(H-1) dU^2$$

où les quantités H et U ont pour valeurs

$$H = 1 + \frac{(u^2 + v^2 + a^2 - 1)^2 + 4v^2}{2a^2},$$

$$U = 2a^2v + 2a^2 \operatorname{arc tang} \frac{2v}{u^2 + v^2 + a^2 - 1}.$$

L'élément linéaire du parabolôide est de la forme

$$d\sigma^2 = \varphi(r) dr^2 + r^2 d\theta^2$$

en coordonnées semi-polaires.

Pour le sommet du parabolôide $r = 0$, donc le point de la surface (Σ) qui correspond au sommet du parabolôide sera tel que le coefficient de dV^2 dans la formule (1) soit nul. Il faut pour cela $H = 1$, c'est-à-dire

$$v = 0, \quad u^2 = 1 - a^2.$$

D'autre part, on a multiplié x et y par $\frac{4a}{3}(1+a^2)^{\frac{3}{2}}$ et z seulement par $\frac{(1+a^2)^2}{2}$. Pour que l'on retrouve une surface homothétique il faut que

$$\frac{(1+a^2)^2}{2} = \frac{4a}{3}(1+a^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{d'où} \quad a^2 = \frac{9}{55}.$$

Les paramètres correspondant au sommet sont par suite

$$u^2 = 1 - a^2 = \frac{46}{55}, \quad v = 0,$$

d'où

$$t = \frac{u^2 + 1}{2} = \frac{101}{110}, \quad \beta = \frac{9}{110}.$$

Par suite les coordonnées du point de la surface (Σ) qui correspond au sommet du parabolôide sont

$$x = \left(\frac{46}{55}\right)^{\frac{3}{2}} = 0,76, \quad y = 0, \quad z = \left(\frac{9}{55}\right)^2 = 0,026,$$

ce point est représenté en S sur la figure I, z.

Il y a un point S placé sur chaque mamelon de la surface; chacun correspond à un parabolôide. Le parabolôide qui est applicable a pour équation

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4(1+a^2)} z,$$

ou, en remplaçant a^2 par sa valeur,

$$x^2 + y^2 = 1,93 z.$$

Les parallèles du parabolôïde se transforment en cercles géodésiques de la surface (Σ). Ces courbes sont faciles à tracer mécaniquement, il suffit de prendre un fil inextensible fixé par l'une des extrémités au point S et de le faire glisser sur la surface en le maintenant tendu, l'autre extrémité décrira la transformée du parallèle.

Une deuxième surface applicable sur le parabolôïde indiquée par M. G. Darboux est celle qui a pour coordonnées

$$(\Sigma') \left\{ \begin{array}{l} x = -2au \left(v^2 + \frac{u^2}{3} + a^2 - 1 \right), \\ y = 4a \frac{v^3}{3}, \\ z = -\frac{1}{2} (u^2 + v^2)^2 + (a^2 - 1)(v^2 - u^2) - \frac{1 - a^4}{2} \quad a < 1. \end{array} \right.$$

Comme l'indique M. G. Darboux (1), cette surface réelle est applicable sur une partie imaginaire du parabolôïde, celle dont les points se projettent sur l'axe à gauche du plan directeur.

Ces surfaces sont bien applicables sur le parabolôïde réel, mais elles correspondent à une région entièrement imaginaire, dont toutefois l'élément linéaire est resté entièrement réel.

Pour étudier plus facilement ces surfaces, remplaçons u et v respectivement par $u\sqrt{1-a^2}$, $v\sqrt{1-a^2}$ et prenons de nouvelles coordonnées x' , y' , z' liées aux anciennes par les relations

$$\begin{aligned} x &= -\frac{4a}{3} (1-a^2)^{\frac{3}{2}} x', \\ y &= -\frac{4a}{3} (1-a^2)^{\frac{3}{2}} y', \\ z + \frac{1-a^4}{2} &= -\frac{(1-a^2)^2}{2} (z' - 1). \end{aligned}$$

Les équations de la surface deviennent

$$\begin{aligned} x' &= \frac{u}{2} (3v^2 + u^2 - 3), \\ y' &= v^3, \\ z' &= (u^2 + v^2)^2 - 2u^2 + 2v^2 + 1 = (u^2 + v^2 - 1)^2 + 4v^2. \end{aligned}$$

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XXIX, avril 1905.

Si enfin l'on pose

$$1 - u^2 - v^2 = t, \quad t^2 + v^2 = \beta^2,$$

on a l'expression des coordonnées des points de la surface en fonction de deux paramètres t et β . C'est à cette forme que nous nous arrêterons :

$$\begin{aligned} x &= [(t-1)^2 - \beta^2]^{\frac{1}{2}}(t^2 + t + 1 - \beta^2), \\ y &= (\beta^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}, \\ z &= 4\beta^2. \end{aligned}$$

Ces expressions montrent que la surface est symétrique par rapport au plan de xz et de yz . Nous tiendrons compte de cette symétrie dans la construction des sections horizontales. Nous déterminerons seulement le quart de la section. Procédons comme pour la surface que nous avons déjà étudiée et construisons les sections par les plans de coordonnées.

Section par le plan des xz . — On doit avoir $y = 0$, donc $\beta^2 = t^2$; les équations de la section sont

$$\begin{aligned} x &= (t+1)\sqrt{1-2t}, \\ z &= 4t^2. \end{aligned}$$

t doit varier de $-\infty$ à $\frac{1}{2}$ pour que x soit réel. Les Tableaux suivants indiquent les variations de x et de z :

t	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	<i>fig. 3, x</i>	D	A	B	C
x	0	1	0	$\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{1 + \sqrt{6}}$	x	0	1	0	0,40
z	1	0	4	6	z	1	0	4	6

J'ai limité la variation de z à $z = 6$. Les sections horizontales

de cote supérieure ont une forme générale analogue à celle par le plan $z = 6$.

La considération des dérivées x' , z' et du rapport

$$\frac{z'}{x'} = -\frac{8}{3}\sqrt{1-2t}$$

permet de déterminer les variations des coordonnées ainsi que la tangente aux divers points de la courbe. Bien qu'il en ait été tenu compte dans la construction des sections, je ne les ai pas introduites dans les Tableaux qui ne contiennent que des résultats.

Section par le plan des yz . — Pour $x = 0$, il y a deux facteurs qui conviennent

$$\beta^2 = (t-1)^2 \quad \text{et} \quad \beta^2 = t^2 + t + 1.$$

Nous avons comme sections

$$\begin{aligned} y &= (1-2t)^{\frac{3}{2}} & \text{et} & & y &= (t+1)^{\frac{3}{2}}, \\ z &= 4(t-1)^2 & & & z &= 4(t^2+t+1). \end{aligned}$$

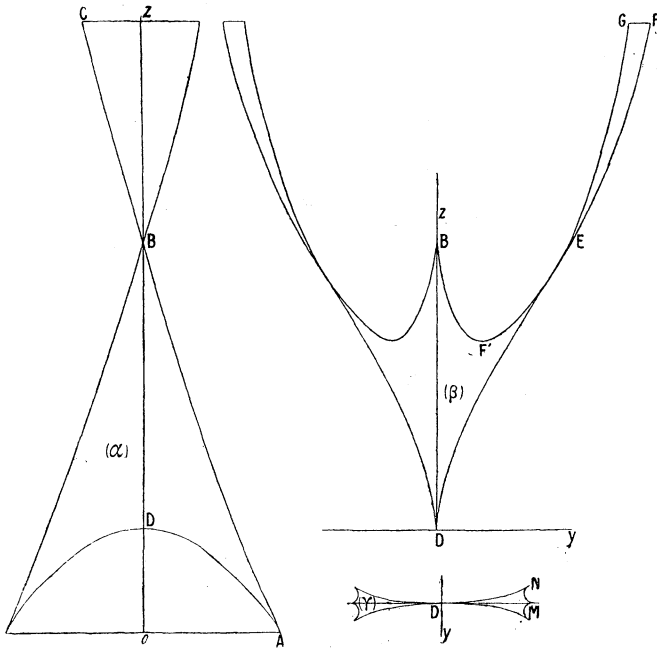
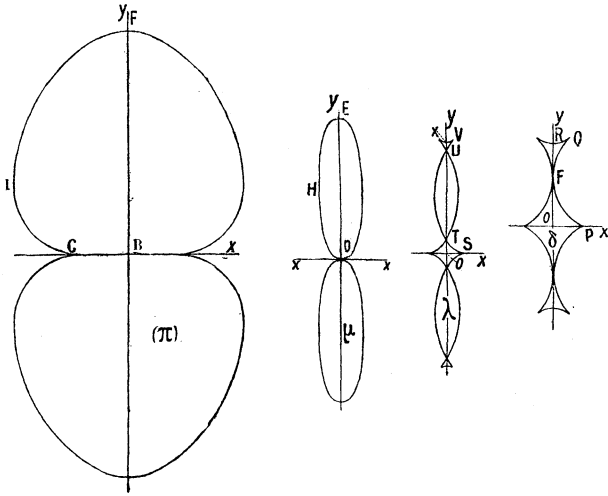
En tenant compte des domaines où t doit varier pour que y soit réel, nous avons, pour une moitié de la courbe, les Tableaux de variations :

t	$\frac{1}{2}$	0	$1 - \sqrt{\frac{3}{2}}$	<i>fig. 3, \beta</i>	D	E	F
y	0	1	$(\sqrt{6}-1)^{\frac{3}{2}}$	y	0	1	1,73
z	1	4	6	z	1	4	6

correspondant à

$$\beta^2 = (t-1)^2$$

Fig. 3.



et

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	<i>fig. 3, β</i>	B	F'	E	G
y	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	1	$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	y	0	$0,353$	1	$1,58$
z	4	3	4	6	z	4	3	4	6

correspondant à

$$\beta^2 = t^2 + t + 1.$$

Le coefficient angulaire des tangentes est donné par

$$\frac{z'}{y'} = -\frac{8}{3} \frac{(t-1)}{\sqrt{1-2t}}$$

pour la première courbe et par

$$\frac{z'}{y'} = \frac{8}{3} \frac{2t+1}{\sqrt{1+t}}$$

pour la seconde; les deux courbes sont tangentes au point $z = 4$, $y = 1$ en D et B; elles ont un point de rebroussement.

SECTIONS HORIZONTALES.

Section par le plan $z = 0$. — On a $\beta = 0$ et les équations de la section sont

$$x = \pm (t-1)(t^2+t+1),$$

$$y = (-t^2)^{\frac{3}{2}},$$

elles donnent deux points réels correspondant à $t = 0$ et dont les coordonnées sont

$$x = \pm 1, \quad y = 0.$$

Section par le plan $z = 1$. — Dans ce cas $\beta^2 = \frac{1}{4}$ et les équations de la section sont

$$x = \left(t^2 + t + \frac{3}{4}\right) \sqrt{t^2 - 2t + \frac{3}{4}},$$

$$y = \pm \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

t doit varier entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ pour que x et y soient réels.

Nous obtenons le Tableau de variations de coordonnées :

t	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	<i>fig. 3, γ</i>	D	N	M
x	0	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	x	0	0,65	0,707
y	0	$\frac{1}{8}$	0	y	0	0,12	0

L'étude de la variation se complète par la considération des dérivées x' , y' et du rapport $\frac{y'}{x'}$ qui donne le coefficient angulaire des tangentes aux divers points. Ce coefficient angulaire est donné un peu plus loin.

Section par le plan $z = 3$. — Alors on a $\beta^2 = \frac{3}{4}$.

Les valeurs de x et de y sont

$$x = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{t^2 - 2t + \frac{1}{4}},$$

$$y = \pm \left(\frac{3}{4} - t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que x et y soient réels, il faut que t varie entre $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où les Tableaux de variations :

t	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$
x	$\sqrt{1+\sqrt{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$	0	$\frac{1}{8}$	0
y	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$(\sqrt{3}-1)^{\frac{3}{2}}$
<i>fig. 3, δ</i>	P	F	Q	R
x	0,215	0	0,125	0
y	0	0,35	0,65	0,614

Section par le plan $z = \frac{7}{2}$. — Dans ce cas, $\beta^2 = \frac{7}{8}$ et par suite

$$x = \left(t^2 + t + \frac{1}{8}\right) \sqrt{t^2 - 2t + \frac{1}{8}},$$

$$y = \pm \left(\frac{7}{8} - t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que x et y soient réels, il est nécessaire que t soit compris entre $-\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ et $1 - \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. Les Tableaux de variations sont :

t	$-\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$	0	$1-\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$
x	$\frac{(4-\sqrt{14})\sqrt{2+\sqrt{14}}}{4\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{16\sqrt{2}}$	0
y	0	$\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-1\right)^{\frac{3}{2}}$

<i>fig. 3, λ</i>	S	T	U	V	X
<i>x</i>	0,12	0	0	0,044	0
<i>y</i>	0	0,053	0,78	0,809	0,803

Section par le plan z = 4. — Alors $\beta^2 = 1$ et les équations de la section sont

$$x = t(1+t)\sqrt{t(t-2)},$$

$$y = \pm (1-t^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que *x* et *y* soient réels, il faut que *t* varie entre -1 et 0. Le Tableau des variations est dans ce cas :

<i>t</i>	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	<i>fig. 3, μ</i>	B	H	E
<i>x</i>	0	$(2-\sqrt{5})\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$	0	<i>x</i>	0	0,28	0
<i>y</i>	0	$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	1	<i>y</i>	0	0,47	1

Section par le plan z = 6. — Alors $\beta^2 = \frac{3}{2}$.

Les coordonnées d'un point quelconque de la section sont

$$x = \left(t^2 + t - \frac{1}{2}\right)\sqrt{t^2 - 2t - \frac{1}{2}},$$

$$y = \left(\frac{3}{2} - t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que *x* et *y* soient réels, il faut que *t* varie entre $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $1 - \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le Tableau des variations est le suivant :

t	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	-1	$1-\sqrt{\frac{3}{2}}$
x	$\left(1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{1+2\sqrt{\frac{3}{2}}}$	$\frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	0
y	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$(\sqrt{6}-1)^{\frac{3}{2}}$

$fig. 3, \pi$	G	I	F
x	$-0,41$	$-0,79$	0
y	0	$0,353$	$1,73$

Dans les Tableaux de variations ci-dessus, ne figurent pas les valeurs des dérivées de x, y , bien que nous en ayons tenu compte dans la construction des sections. Afin de ne pas me répéter à propos de chaque section horizontale, j'ai calculé ces dérivées en laissant z indéterminé, et j'ai ensuite, pour chaque section, donné à z la valeur correspondante.

Les coordonnées d'un point d'une section horizontale $z = z$ sont

$$x = \left(t^2 + t + 1 - \frac{z}{4}\right) \sqrt{t^2 - 2t + 1 - \frac{z}{4}},$$

$$y = \left(\frac{z}{4} - t^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On trouve

$$x' = \frac{3t\left(t^2 - t - \frac{z}{4}\right)}{\sqrt{t^2 - 2t + 1 - \frac{z}{4}}}, \quad y' = -3t\left(\frac{z}{4} - t^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

y sera maximum ou minimum pour les valeurs de t

$$t = 0, \quad t = \pm \frac{\sqrt{z}}{2},$$

lorsque ces valeurs seront comprises dans l'intervalle où t doit varier pour que x et y soient réels. Sous les mêmes restrictions relatives à t , x sera maximum ou minimum pour

$$t = 0 \quad \text{et} \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1+z}}{2}.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en un point d'une section horizontale est

$$\frac{y'}{x'} = - \frac{\sqrt{\left(\frac{z}{4} - t^2\right)\left(t^2 - 2t + 1 - \frac{z}{4}\right)}}{t^2 - t - \frac{z}{4}}.$$

Le lieu des points A, N, Q, V, E (*fig.* 3, $\alpha, \gamma, \delta, \lambda, \mu$) est une courbe de rebroussement; nous allons chercher sa projection ou le plan des xz pour comparer l'abscisse de ces divers points correspondant à une même valeur de z à l'abscisse des points de la courbe passant par les points A, M, P, S, O (*fig.* 3, $\alpha, \gamma, \delta, \lambda, \mu$); l'équation de la courbe passant par les points A, M, P, S, O est

$$X = \sqrt{1 + \sqrt{z}} \left(1 - \frac{\sqrt{z}}{2}\right);$$

l'équation de la projection sur le plan des xz de la courbe passant par A, N, Q, ... est

$$x = \left(1 - \frac{z}{4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Montrons que la différence $X - x$ est positive, z variant de 0 à 4; pour $\sqrt{z} = h$, on a

$$X - x = \left(1 - \frac{h}{2}\right) \left[(1+h)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{h}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right];$$

le fait que $1 - \frac{h}{2}$ est > 0 montre que le crochet est aussi positif;

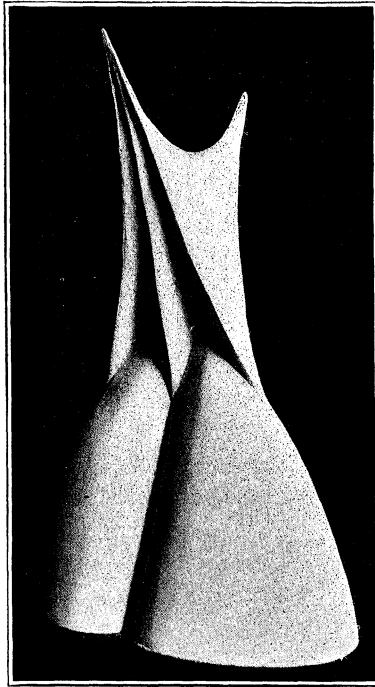
on a, en effet, en élevant au carré :

$$1+h > 1+h - \frac{h^3}{4} - \frac{h^4}{16}.$$

Donc l'arête de rebroussement lieu des points A, M, P, S, O, ... fait saillie par rapport à la ligne de rebroussement lieu des points A, N, Q, V. E.

J'ai construit les modèles en prenant pour unité de longueur 32^{mm} pour la surface Σ . En ce qui concerne la surface Σ' , afin

Fig. 4.



d'avoir des modèles moins effilés et par suite moins fragiles, j'ai pris pour unité pour les coordonnées x et y 64^{mm} et 48^{mm} pour la coordonnée z . Les figures 2 et 4 représentent les modèles en plâtre construits à cette échelle.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathém.*, 2^e série, t. XXIX; août 1905.)

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
37253 Quai des Grands-Augustins, 55.
